

VILNIAUS MIESTO MOKSLEIVIŲ MATEMATIKOS OLIMPIADA

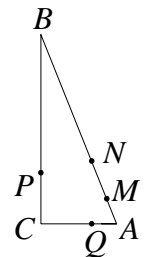
Vilnius, 2008

UŽDAVINIAI

X klasė

1. Ant stalo stovi 13 neuždegtų lempų, kiekviena su savo jungikliu, kuris nedegantią lempą uždega, o degantią – užgesina.
 - 1) Vienu ėjimu galima nuspausti bet kuriuos 8 jungiklius. Ar taip elgiantis galima pasiekti, kad visos lempos degtų vienu metu?
 - 2) Vienu ėjimu galima nuspausti bet kuriuos 7 jungiklius. Ar taip elgiantis galima pasiekti, kad visos lempos degtų vienu metu?

2. Stačiojo trikampio ABC įžambinėje AB pažymėti taškai M ir N taip, kad $AN = AC$ ir $BM = BC$ (žr. pav.). Tada statiniuose BC ir AC pažymėti atitinkamai tokie taškai P ir Q , kad $BP = BN$ ir $AQ = AM$. Įrodykite, kad taškai C, P, N, M ir Q priklauso vienam apskritimui.



3. Tegū x – dešimties iš eilės einančių sveikųjų teigiamų skaičių suma, o y – tų pačių dešimties skaičių kubų suma. Įrodykite, kad $y^2 - x^2$ dalijasi iš 12.
4. Duota kvadratinė lentelė, sudaryta iš 4×4 vienetinių langelių. Kai kurie langeliai nudažyti taip, kad vienu metu išbraukus bet kurias dvi eilutes ir bet kuriuos du stulpelius, gautoje 2×2 lentelėje lieka bent vienas nudažytas langelis. Kiek mažiausiai langelių reikia nudažyti?