Vilniaus miesto matematikos olimpiada, 2007

Užduotis XII klasių mokiniams

1. Tegu $\{a_1, a_2, ..., a_{201}\}$ yra aibė, sudaryta iš natūraliųjų skaičių, mažesnių už 300. Įrodykite, kad egzistuoja tokie i, j, kad $\frac{a_i}{a_j} = 3^k$ su kokiu nors $k > 0$.

2. Raskite visus natūraliųjų skaičių a, b, c ir d rinkinius (a, b, c, d), kurie tenkina lygčių sistemą $\begin{cases} a \cdot b + c \cdot d = 34, \\ a \cdot c - b \cdot d = 19 \end{cases}$.

3. Apskaičiuokite reiškinį
$$\frac{\left(1^4 + \frac{1}{4}\right) \cdot \left(3^4 + \frac{1}{4}\right) \cdot \left(5^4 + \frac{1}{4}\right) \cdot ... \cdot \left(19^4 + \frac{1}{4}\right)}{\left(2^4 + \frac{1}{4}\right) \cdot \left(4^4 + \frac{1}{4}\right) \cdot \left(6^4 + \frac{1}{4}\right) \cdot ... \cdot \left(20^4 + \frac{1}{4}\right)}.$$

4. Tegu a, b, c yra bet kurio trikampio kraštinių ilgiai. Įrodykite, kad galioja nelygybė
$$a^2 b(a-b) + b^2 c(b-c) + c^2 a(c-a) \ge 0 .$$