



RIETAVO DEŠIMTOJI KOMANDINĖ MATEMATIKOS OLIMPIADA MOKYTOJO KAZIO ŠIKŠNIAUS TAUREI LAIMĖTI

Rietavas, 2011 m. gruodžio 2 d.

Užduotis vyresniųjų klasių mokiniams
Uždavinių sprendimo trukmė - 2val.

1. Lentoje parašyta lygtis $x^3 + \dots x^2 + \dots x + \dots = 0$. Du draugai žaidžia taip. Pirmasis vietoje bet kurio daugtaškio įrašo sveikąjį skaičių, antrasis taip pat vietoje kurio nors iš likusių dviejų daugtaškių įrašo sveikąjį skaičių, po to sveikąjį skaičių į likusią vietą vėl įrašo pirmasis. Ar gali pirmasis žaidėjas žaisti taip, kad gautosios lygties sprendiniai būtų sveikieji skaičiai?
2. Funkcija $f(x)$, apibrėžta natūraliųjų skaičių aibėje, su visais natūraliaisiais m ir n turi savybę $f(m) + f(n) = f(mn)$. Apskaičiuokite $f(12)$, jeigu $f(2) = 7$ ir $f(3) = 10$.
3. Keturženklis skaičius $n = \overline{abcd}$ yra natūraliojo skaičiaus kvadratas, o jo skaitmenys tenkina lygybes $a = c$, $b = d + 1$. Koks šis skaičius?
4. Tegu ABC yra statusis trikampis, kurio statusis kampas B . Kvadratas $ACDE$ nubrėžtas išorinėje trikampio ABC pusėje. M yra šio kvadrato centras. Raskite kampo MBC didumą.
5. Su kokia realiųjų skaičių x ir y pora (x, y) reiškinių

$$x^2 + 13y^2 - 6xy - 4y - 2$$

reikšmė mažiausia? Raskite šią reikšmę.

6. Raskite sumą $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \dots + n \cdot n!$.
7. Tegu x, y, z yra skirtingi nelygūs nuliui realieji skaičiai, tenkinantys lygybes $x + \frac{1}{y} = y + \frac{1}{z} = z + \frac{1}{x}$. Apskaičiuokite sandaugą xyz .
8. Raskite visas natūraliųjų skaičių poras (x, y) , tenkinančias lygtį $x^2 - 3xy + 2y^2 + 6 = 0$.
9. Jonas Rietaviškis sugalvojo tris natūraliuosius skaičius. Kiekvienai iš šių skaičių sudarytai porai (a, b) jis apskaičiavo skirtumą $ab - (a + b)$. Pasirodė, kad vienas skirtumas yra teigiamas ir vienas neigiamas. Koks trečias skirtumas?
10. Jonas Rietaviškis nusprendė aplankyti draugą Petrą Plungiški. Prisikepė bandelių ir išvažiavo nepusryčiaęs. Ties Stalgėnais labai išalko ir nusprendė suvalgyti tris pačias didžiausias bandeles. Dėl to lauktuvių masė sumažėjo 35%. Privažiavęs Milašaičius, nusprendė dar šiek tiek pasistiprinti ir suvalgė tris pačias mažiausias bandeles. Dabar jo lauktuvių masė sumažėjo $\frac{5}{13}$ lyginant su prieš tai buvusia. Kiek bandelių Jonas išsivežė iš namų?