



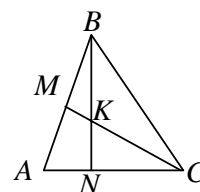
## Rietavo penktoji komandinė matematikos olimpiada mokytojo Kazio Šikšniaus taurei laimėti

Rietavas, 2006 m. sausio 28 d.

Užduotis vyresniųjų klasių mokiniams

1. Raskite mažiausią teigiamą realųjį skaičių, kurio ir 15%, ir 33% yra natūralieji skaičiai.
2. Išspręskite lygtį  $2x^2 - 6xy + 9y^2 - 12x + 36 = 0$ .
3. Kiek iš viso skaitmenų reikia užrašyti skaičiams  $2^{2006}$  ir  $5^{2006}$  ?
4. Raskite tris natūraliuosius skaičius, kurių visų trijų ir kiekvienų dviejų suma būtų kvadratai.
5. Skaičiai  $m$  ir  $n$  – sveikieji, tenkinantys nelygybę  $\frac{m}{n} < \sqrt{2}$ . Įrodykite, kad  $\sqrt{2} - \frac{m}{n} > \frac{1}{2\sqrt{2}n^2}$ .
6. Apskaičiuokite  $\cos^2 3 + \cos^2 1 - \cos 4 \cdot \cos 2$ .
7. Teigiamas ar neigiamas yra reiškinys  $\cos \frac{3}{6-x}$  su  $x$  reikšmėmis, tenkinančiomis nelygybę  $3x^2 - 31x + 80 < 0$  ?
8. Seka  $x_1, x_2, x_3, \dots$  apibrėžta rekurentiškai lygybėmis 
$$\begin{cases} x_0 = 1, \\ x_n = x_{n-1} + \frac{1}{x_{n-1}} \end{cases}$$
 . Įrodykite, kad  $x_{20000} > 200$ .

9. Trikampyje  $ABC$   $\angle BAC = 60^\circ$ ,  $K$  – pusiaukraštinės  $CM$  ir aukštinės  $BN$  susikirtimo taškas,  $CK = 6$  cm,  $KM = 1$  cm (žr. pav.). Raskite kitus du trikampio kampus.



10. Dviejų Rietavo krašto ūkininkų – kaimynų Petro ir Jono žemes skiria tvora  $ABCD$ , kurios dalių ilgiai tokie:  $AB = 30$  m,  $BC = 24$  m,  $DC = 10$  m. Jie nusprendė tvorą ištiesinti, t. y. užtvirti tiesią tvorą  $AF$ , tačiau taip, kad nei vienas, nei kitas neprarastų žemės (žr. pav.). Raskite atkarpos  $FD$  ilgį.

