# PASVALIO KRAŠTO MOKSLEIVIŲ MATEMATIKOS TREČIOJI KOMANDINĖ OLIMPIADA PROFESORIAUS BRONIAUS GRIGELIONIO TAUREI LAIMĖTI

## U Ž D A V I N I A I

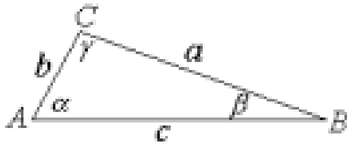
**Pasvalys, 2001 m. lapkričio mėn. 23 d.**
**Uždavinių sprendimo trukmė – 2 val.**

**1.** Sveikųjų skaičių aibės Z poaibio $A$ elementai turi savybę: jei $x, y \in A$, tai $x - y \in A$. Žinoma, kad $2001 \in A$ ir intervale [–100, 100] yra nemažiau 10 ir nedaugiau 67 aibės $A$ elementų. Kiek aibės $A$ elementų yra intervale [–2001; 2001]?

**2.** Duota skaičių seka $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ . Žinoma, kad $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = n^2 a_n$, $n \in$ N. Su kokiomis $a_1$ reikšmėmis $a_{2001}$ yra sveikasis skaičius?

**3.** Raskite skaičiaus $2^{2n}(2^{2n+1} - 1)$ ($n \in$ N, $n$ nelyginis) paskutinį skaitmenį.

**4.** Duotas trikampis $ABC$, kuriame $\angle BAC = 3\angle ABC$.
Įrodykite, kad $(a+b)(a-b)^2 = bc^2$.




**5.** Automobilio priekinės padangos visiškai nusidėvi nuvažiavus $n_1$ km, o užpakalinės – nuvažiavus $n_2$ km, $n_2 < n_1$. Norint, kad visos padangos nusidėvėtų vienu metu, jos tam tikru momentu keičiamos vietomis. Kiek tada pailginama automobilio rida (naudojant vieną keturių padangų komplektą)?

**6.** 100 apskritimo taškų pažymimi skaičiais 1, 2, … , 100 (nebūtinai eilės tvarka). Skaičiuojamos visos gretimų skaičių trejetų sumos. Įrodykite, kad egzistuoja du trejetai, kurių sumų skirtumas didesnis už du.

**7.** Išspręskite lygtį $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+3} + \frac{1}{x+4} = 0$.

**8.** Įrodykite, kad

$$\underbrace{22\ldots2}_{n\text{ kartų}} + (\underbrace{3\ldots3}_{n\text{ kartų}})^2 = \underbrace{11\ldots1}_{2n\text{ kartų}}.$$

**9.** Urnoje yra $M$ baltų ir $N$ juodų rutulių. Atsitiktinai ištraukiami vienas po kito du rutuliai, grąžinant juos į urną. Raskite tikimybę, kad abu ištraukti rutuliai yra tos pačios spalvos ir įrodykite, kad ji yra nemažesnė už 1/2.

**10.** Raskite taškų su sveikomis koordinatėmis, esančių tarp parabolės $y = x^2$ ir tiesės $y = n^2$ ($n$ – fiksuotas natūralusis skaičius), skaičių, patikrinus, kad $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.