PASVALIO KRAŠTO MOKSLEIVIŲ AŠTUNTOJI KOMANDINĖ MATEMATIKOS OLIMPIADA PROFESORIAUS BRONIAUS GRIGELIONIO TAUREI LAIMĖTI

Pasvalys, 2006 m. lapkričio mėn. 24 d.
Uždavinių sprendimo trukmė – 2 val.

U Ž D A V I N I A I
(vyresniųjų klasių grupė)

1. Raskite formulę sumai $3+33+333+...+\underbrace{333...3}_{n \text{ trejetukų}}$ skaičiuoti.

2. Išspręskite lygtį

$$\sqrt[3]{1+x}+\sqrt[3]{1-x}=a.$$

3. Duotas 19° kampas. Skriestuvo ir liniuotės pagalba nubrėžti 1° kampą.

4. Teigiami skaičiai x ir y tenkina nelygybę

$$y^3+y\le x-x^3.$$

Įrodykite, kad a) $y<x<1$ ir b) $x^2+y^2<1$.

5. Lentoje užrašyti skaičiai 1, 2, 3, ..., 2006. Leidžiama nutrinti du skaičius ir vietoje šių skaičių parašyti jų skirtumą. Įrodykite, kad jeigu atlikus tam tikrą skaičių kartų šią procedūra lieka tik nulis, tai skaičiavimuose padaryta klaida.

6. Ar galima iš trijų trikampių su kraštinėmis 3, 5 ir 7 ir vieno trikampio su kraštinėmis 2, 2, 2 sudaryti lygiakraštį trikampį?

7. Raskite natūraliųjų skaičių x, tenkinančių lygtį

$$\left[\frac{x}{99}\right]=\left[\frac{x}{101}\right], \qquad (1)$$

skaičių; čia $[a]$ yra skaičiaus a sveikoji dalis.

8. Įrodykite tokį teiginį: jei realieji skaičiai a, b ir c tenkina nelygybes

$$|a-b|\ge|c|,\ |b-c|\ge|a|,\ |c-a|\ge|b|,$$

tai nors vienas iš jų yra kitų dviejų suma.

9. Trys dviženkliai skaičiai pasižymi tokia savybę: bet kurių dviejų suma yra lygi trečiajam, tik su sukeistais skaitmenimis. Kokia galėtų būti šių trijų skaičių suma?

10. Sporto turnyras vyksta olimpine sistema: dalyviai varžosi vienas prieš vieną, pralaimėjęs iškrenta, o nugalėtojas patenka į kitą etapą. Kiekvienas iš 512 sportininkų turi individualų numerį (nuo 1 iki 512). Ar gali nutikti taip, kad visose varžovų porose jų numerių skirtumas neviršija 30?