



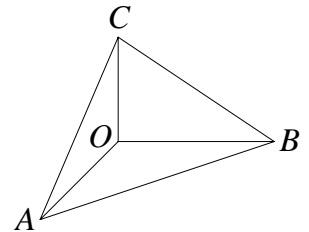
**PASVALIO KRAŠTO MOKINIŲ
DEŠIMTOJI KOMANDINĖ MATEMATIKOS OLIMPIADA
PROFESORIAUS BRONIAUS GRIGELIONIO
TAUREI LAIMĖTI**

**Pasvalys, 2008 m. lapkričio mėn. 28 d.
Uždavinių sprendimo trukmė – 2 val.**

**U Ž D A V I N I A I
VYRESNIŲJŲ KLASIŲ MOKINIAMS**

1. Tegu tiesių atkarpos OA , OB ir OC yra tarpusavyje statmenos ir sudaro trisienį kampą su viršūne O . Įrodykite, kad trikampių ABC , OAB , OAC ir OBC plotai tenkina lygybę

$$S_{\Delta ABC}^2 = S_{\Delta OAB}^2 + S_{\Delta OAC}^2 + S_{\Delta OBC}^2.$$



2. Tegu a , b ir c yra kurio nors trikampio kraštinių ilgių. Įrodykite, kad
- $$ab + bc + ac \leq a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + bc + ac).$$

3. Įrodykite, kad su visais $n \geq 2$ galioja nelygybė

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < 1.$$

4. Išspręskite lygtį $x^3(x+1) = 2(x+a)(x+2a)$, a – realusis skaičius.

5. Funkcija $f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, tenkina šias sąlygas: $f(1) = 1$, $f(x+5) \geq f(x) + 5$, $f(x+1) \leq f(x) + 1$. Raskite funkcijos $g(x) = f(x) + 1 - x$ reikšmę $g(2008)$.

6. Iš nelyginių natūraliųjų skaičių sudaryta tokia trikampė lentelė:

1							
3	5	7					
9	11	13	15	17			
19	21	23	25	27	29	31	

.....
Nustatykite, koks skaičius yra 61-os eilutės viduryje.

7. Raskite visus natūraliųjų skaičių x , y ir z trejetus $(x; y; z)$, $x \leq y \leq z$, su kuriais galioja lygybė

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right) \left(1 + \frac{1}{y}\right) \left(1 + \frac{1}{z}\right) = 3.$$

8. Raskite didžiausią natūralųjį skaičių n , kurio skaitmenų kubų suma didesnė už n .

9. Tarkime, kad daugianario $P(x) = p_0 + p_1x + p_2x^2 + \dots + p_nx^n$ koeficientai $p_0, p_1, p_2, \dots, p_n$ yra sveikieji skaičiai. Įrodykite, kad nėra tokio skirtingų sveikųjų skaičių a, b ir c trejeto, su kuriuo galiotų visos trys lygybės: $P(a) = b$, $P(b) = c$ ir $P(c) = a$.

10. Mokinys sugalvojo nelyginį natūralųjį skaičių. Prie jo iš dešinės pusės prirašė dar vieną skaitmenį. Iš gautojo skaičiaus atėmė sugalvoto skaičiaus kvadratą ir gavo skaičių, 8 kartus didesnį už sugalvotąjį. Kokį skaičių mokinys sugalvojo ir kokį skaitmenį prie jo prirašė?