



**PASVALIO KRAŠTO MOKINIŲ
DVYLIKTOJI KOMANDINĖ MATEMATIKOS OLIMPIADA
PROFESORIAUS BRONIAUS GRIGELIONIO
TAUREI LAIMĖTI**

**Pasvalys, 2010 m. lapkričio mėn. 26 d.
Uždavinių sprendimo trukmė – 2 val.**

**U Ž D A V I N I A I
JAUNESNIŪJŲ KLASIŲ MOKINIAMS**

- Įrodykite, kad su visais natūraliaisiais n trupmena $\frac{12n+1}{30n+2}$ yra nesuprastinama.
- Kvadratas su kraštine a tiesėmis, lygiagrečiomis su jo kraštinėmis, padalytas į n^2 lygių kvadratų. Į kiekvieną gautą kvadratą įbrėžiamas skritulys. Įrodykite, kad pradinio kvadrato dalies, nepadengtos skrituliais, plotas nepriklauso nuo n .
- Skaičiai a_1, \dots, a_n , kurių kiekvienas lygus $+1$ arba -1 , yra tokie, kad
$$a_1a_2 + a_2a_3 + \dots + a_{n-1}a_n + a_na_1 = 0.$$
Įrodykite, kad n yra dalus iš 4.
- Nustatykite, kiek nesuprastinamų trupmenų yra tarp šių trupmenų:
$$\frac{1}{144}, \frac{2}{144}, \frac{3}{144}, \dots, \frac{143}{144}.$$
- Natūralieji skaičiai 12, 15 ir n turi tokią savybę: bet kurių dviejų sandauga dalijasi iš trečiojo. Raskite galimai mažiausią n reikšmę.
- Skaičiai a ir b tenkina dvi sąlygas:
$$ab + ab^2 + \dots + ab^{10} = 18$$
ir
$$\frac{1}{ab} + \frac{1}{ab^2} + \dots + \frac{1}{ab^{10}} = 6.$$
Raskite skaičių ab, ab^2, \dots, ab^{10} sandaugą.
- Taškas K yra už 60 metrų į vakarus nuo taško P . Katė tupi taške K , o pelė yra taške P . Apskaičiuokite, per kiek laiko katė pagautų pelę, jei, bėgdama 13 m/s greičiu, ji pasirinktų optimalų maršrutą, o pelė bėgtų nuo katės 7 m/s greičiu tiese PM , kuri su rytų kryptimi sudaro 60° kampą.
- Raskite visų sveikųjų parametro a reikšmių, su kuriomis lygtis
$$x^3 - ax + a + 11 = 0$$
turi bent vieną natūralųjį sprendinį x , sumą.
- Keturių skirtingų natūraliųjų skaičių vidurkis lygus 8. Raskite galimai didžiausią iš jų.
- Stačiakampio $ABCD$ kraštinėje AB pažymėtas taškas E , o kraštinėje BC – taškas F taip, kad trikampio AED plotas lygus 5, trikampio BEF plotas lygus 4, o trikampio CFD plotas lygus 3. Raskite trikampio DEF plotą.