



**PASVALIO KRAŠTO MOKINIŲ  
VIENUOLIKTOJI KOMANDINĖ MATEMATIKOS  
OLIMPIADA  
PROFESORIAUS BRONIAUS GRIGELIONIO  
TAUREI LAIMĖTI**

**Pasvalys, 2009 m. lapkričio mėn. 20 d.  
Uždavinių sprendimo trukmė – 2 val.**

**U Ž D A V I N I A I  
JAUNESNIŲJŲ KLASIŲ MOKINIAMS**

1. Raskite visas sveikųjų skaičių  $x$  ir  $y$  poras  $(x; y)$ , su kuriomis galioja lygybė  $x + y = xy$ .
2. Raskite visas natūraliųjų skaičių  $m$  ir  $n$  poras  $(m; n)$ , su kuriomis
$$2^n = m^2 + 1.$$
3. Šachmatų pavidalo  $4 \times 4$  lentos langeliuose bet kaip išdėliota 16 akmenukų (po vieną kiekviename langelyje). Šie akmenukai trijų spalvų: baltos, mėlynos ir raudonos. Įrodykite, kad yra bent viena eilutė ir stulpelis, turintys dar po vieną tos pačios spalvos akmenuką kaip ir jų susikirtimo langelyje esančio akmenuko.
4. Šachmatų turnyre dalyvavo dvi mergaitės ir ne daugiau kaip trylika berniukų. Visos dalyvių poros sužaidė po vieną partiją. Mergaitės surinko 8 taškus, o visi berniukai – po vienodą taškų skaičių (už pergalę skiriamas vienas taškas, už lygiąsias – pusė taško, o pralaimėjus taškai neskiriami). Kiek žaidėjų dalyvavo šiame turnyre?
5. Dešimtyje dėžučių yra po 50 vienodų monetų. Devyniose yra tikros monetos, sveriančios po 10 gramų, o vienoje dėžutėje monetos netikros; jos sveria po 9 gramus, tačiau vizualiai nesiskiria nuo tikrų. Vienu svėrimu (elektroninėmis svarstyklėmis) reikia nustatyti, kurioje dėžutėje yra netikros monetos.
6. Išspręskite lygtį  $x = 1 - 2009(1 - 2009x^2)^2$ .
7. Atkarpa  $AM$  yra trikampio  $ABC$  pusiauakraštinė, o  $N$  – atkarpos  $AM$  vidurio taškas. Nustatykite, kokių santykiu kraštinę  $AC$  dalija tiesė, einanti per taškus  $B$  ir  $N$ .
8. Įrodykite, kad  $x^8 - x^5 + x^2 - x + 1 > 0$ , kai  $x$  yra bet kuris realusis skaičius.
9. Tarkime, kad  $m$  ir  $n$  yra tokie sveikieji skaičiai, kuriems esant  $m^2 + 9mn + n^2$  dalijasi iš 11. Įrodykite, kad tada  $m^2 - n^2$  taip pat dalijasi iš 11.
10. Stačiojo trikampio  $ABC$  statinio  $AB$  vidurio taškas  $D$  yra apskritimo, kurio skersmuo lygus  $AB$ , centras. Šis apskritimas įžambinę  $BC$  dalija santykiu 1:3. Raskite trikampio  $ABC$  smailuosius kampus.