PASVALIO KRAŠTO MOKSLEIVIŲ SEPTINTOJI KOMANDINĖ MATEMATIKOS OLIMPIADA PROFESORIAUS BRONIAUS GRIGELIONIO TAUREI LAIMĖTI

Pasvalys, 2005 m. lapkričio mėn. 25 d.
Uždavinių sprendimo trukmė – 2 val.

XI–XII klasių uždaviniai

1. Įrodykite, kad jei $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ ir $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=0$, tai $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

2. Raskite sumą

$$\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\ldots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}.$$

3. Nustatykite, kiek nulių yra sumoje S, kai

$$S=9+99+999+\ldots+\underbrace{99\ldots99}_{99\text{ skaitmenys}}.$$

4. Išspręskite lygtį

$$2(x-6)=\frac{x^2}{(1+\sqrt{x+1})^2}.$$

5. Įrodykite, kad kvadratinė lygtis $ax^2+bx-c=0$ turi tik vieną sprendinį, priklausantį intervalui $[0;1]$, kai a, b ir c yra kurio nors trikampio kraštinių ilgiai.

6. Natūraliųjų skaičių x, y ir z suma yra lygi 407. Raskite didžiausią skaičių nulių, kuriais gali baigtis sandauga xyz.

7. Užpildykite lentelę įrašydami skaičius tuščiuose langeliuose ir vietoj raidžių. Šioje lentelėje kiekvienos eilutės, kiekvieno stulpelio ir kiekvienos įstrižainės skaičių sandauga yra ta pati ir lygi skaičiui $\overline{ABCD}$ (A, B, C ir D yra skirtingi skaitmenys).

		4
	$\overline{AC}$	
	C	24

8. Raskite begalinių periodinių trupmenų $0{,}\overline{19}=0{,}191919\ldots$ ir $0{,}\overline{199}=0{,}199199199\ldots$ sumos $0{,}\overline{19}+0{,}\overline{199}$ periodą (trupmenos $0{,}\overline{a_1a_2\ldots a_n}$ periodas yra n).

Nurodymas. $0{,}\overline{19}=\frac{19}{99}$, nes $0{,}\overline{19}\cdot(100-1)=19{,}\overline{19}-0{,}\overline{19}=19$.

9. Taškas E trapecijos $ABCD$ šoninę kraštinę CD dalija santykiu 2:1 ($CE:ED=2:1$). Atkarpa AE trapecijos įstrižainę BD kerta taške O; be to, $AO:OE=5:1$. Trikampio AOB plotas lygus 26 cm^2. Raskite: 1) trikampio DOE plotą; 2) trapecijos $ABCD$ plotą.

10. Su kokiu sveikuoju skaičiumi k lygties $\operatorname{tg}^2\alpha-2005\operatorname{tg}\alpha+1=0$ sprendinių, priklausančių intervalui $[0;2\pi]$, suma yra lygi $k\pi$?