



**PASVALIO KRAŠTO MOKSLEIVIŲ MATEMATIKOS  
KETVIRTOJI KOMANDINĖ OLIMPIADA  
PROFESORIAUS BRONIAUS GRIGELIONIO  
TAUREI LAIMĖTI**

**U Ž D A V I N I A I**  
(Jaunesniųjų klasių grupė)

**Pasvalys, 2002 m. lapkričio mėn. 29 d.**  
**Uždavinių sprendimo trukmė – 2 val.**

1. Pavaizduokite plokštumoje geometrinę vietą taškų  $(x; y)$ , tenkinančių nelygybę

$$\min(x, y) \geq 1; \text{ čia } \min(x, y) = \begin{cases} x, & \text{jei } x \leq y, \\ y, & \text{jei } y < x. \end{cases}$$

2. Iš lygybės  $3^2 + 4^2 = 5^2$  išplaukia, kad  $5 \times 5$  kvadratą galima supjaustyti į baigtinį skaičių dalių, iš kurių galima sudaryti  $4 \times 4$  ir  $3 \times 3$  kvadratus. Raskite minimalų tokių dalių skaičių.
3. Irkluodamas statmenai upės srovei, sportininkas nuplaukė į kitą krantą per 10 min. Po to jis 50 min. irklavo išilgai kranto prieš srovę, vėl perplaukė upę (irkluodamas statmenai upės srovei) ir 20 min. irkluodamas išilgai kranto grįžo į pradinę vietą. Koks irkluotojo greičio ramiaame vandenyje ir upės greičio santykis?

4. Tegų skaičius  $a + \frac{1}{a}$  yra natūralusis. Įrodykite, kad  $a^3 + \frac{1}{a^3}$  yra taip pat natūralusis.

5. Jonas ir Agnė kalbasi:

Agnė: *Kokio amžiaus tavo vaikai?*

Jonas: *Visų trijų vaikų metų sandauga lygi 36.*

Agnė: *Man dar ne viskas aišku.*

Jonas: *Jų amžių suma tokia pat kaip tavo namo numeris.*

Agnė: *Vis tiek dar trūksta informacijos.*

Jonas: *Turinčio daugiausiai metų plaukai rudi.*

Agnė: *O! Dabar jau žinau.*

Nustatykite, kiek metų turi Jono vaikai.

6. Įrodykite, kad su visais natūraliaisiais skaičiais  $k$  ir  $m$ , skaičius  $k^2 + m^2$  dalijasi iš 7 tada ir tik tada, kai  $k$  ir  $m$  dalijasi iš 7.

7. Įrodykite, kad  $\frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{2}}} + \frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{3}}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{99+\sqrt{100}}} = 9$ .

8. Visi skaičiai nuo 1 iki milijono surašyti į vieną eilę. Kiek skaitmenų yra toje eilėje?

9. Įrodykite, kad yra sveikųjų skaičių pora  $(x; y)$ , tenkinanti lygtį  $x^2 - y^2 = a^3$ , kurioje  $a$  yra natūralusis skaičius.

10. Įrodykite, kad  $a + b + c \geq \sqrt{bc} + \sqrt{ca} + \sqrt{ab}$ , kai  $a \geq 0$ ,  $b \geq 0$ ,  $c \geq 0$ .