



PASVALIO KRAŠTO MOKSLEIVIŲ MATEMATIKOS
TREČIOJI KOMANDINĖ OLIMPIADA
PROFESORIAUS BRONIAUS GRIGELIONIO
TAUREI LAIMĖTI

UŽDAVINIAI

Pasvalys, 2000 m. lapkričio mėn. 24 d.
Uždavinių sprendimo trukmė – 2 val.

1. Tarkime, kad $u_1 = u_2 = 1$, $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$, $n \geq 3$, $\alpha_n = \frac{u_{n+1}}{u_n}$, $n \geq 1$. Įrodykite, kad su visais $n \geq 1$

$$1 \leq \alpha_n \leq 2, \quad |\alpha_n - \alpha| < \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{n-1};$$

čia α yra aukso pjūvio santykis, t. y. $\alpha = 1 + \frac{1}{\alpha}$, $\alpha > 0$.

2. Įrodykite, kad jeigu trikampio ilgiausioji kraštinė trumpesnė už 3, tai to trikampio plotas mažesnis už 4.
3. n lygiagrečiųjų plokštumos tiesių kerta kitas m lygiagrečiąsias plokštumos tieses. Kiek lygiagretainių yra gautame tinkle?
4. Rasti lygties $(x^2 + ax)^2 + b(x^2 + ax) + c = 0$ šaknų kvadratų sumą.
5. Tarkime, kad $0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_n < \frac{\pi}{2}$. Įrodykite, kad $\operatorname{tg} \alpha_1 < \frac{\sin \alpha_1 + \dots + \sin \alpha_n}{\cos \alpha_1 + \dots + \cos \alpha_n} < \operatorname{tg} \alpha_n$.

6. Išspręskite lygčių sistemą

$$\begin{cases} (y^2 + 6)(x - 1) = (x^2 + 1)y, \\ (x^2 + 6)(y - 1) = (y^2 + 1)x. \end{cases}$$

7. Išspręskite lygtį $\left[\frac{1-3x}{2}\right] = x^2 - 2x$; čia $[a]$ yra skaičiaus a sveikoji dalis.

8. Raskite lygties $x^2 y^2 = x^2 + xy + y^2$ sveikuosius sprendinius.

9. Nubrėškite funkcijos $y = \min(x - 1, 1 - x)$ grafiką. Užrašykite šią funkciją, naudojant modulio ženklą.

10. Duoti skaičiai x_1, x_2, \dots, x_n ir $\bar{x}_n = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$. Tarkime, kad $x_{n+1} = \bar{x}_n$. Kas didesnis:

$$\bar{x}_n \text{ ar } \bar{x}_{n+1} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{n+1}}{n} ?$$