

XVI LIETUVOS KOMANDINĖ MATEMATIKOS OLIMPIADA

Vilniaus universiteto Matematikos ir informatikos fakultetas, 2001 10 06

Uždavinių sąlygos

1. Išspręskite lygtį

$$2001 - 3x^2 = |3x^2 - 2001|.$$

2. Išspręskite lygtį

$$8(\cos x)^2 + \sin 5x = 8(\cos x)^4 + 1.$$

3. Išspręskite lygtį

$$x^3 = 4 + [x].$$

(Čia $[x]$ yra skaičiaus x sveikoji dalis.)

4. Įrodykite nelygybę

$$\frac{a^4 + b^4 + 3}{\sqrt{a^4 + b^4 + 2}} > \frac{21}{10},$$

kai a ir b yra bet kokie realieji skaičiai.

5. Raskite mažiausiąją reiškinio

$$5(a^2 + b^2 + 2c^2) - 2(2ab + 6ac + bc - 2a + 3c)$$

įgyjamą reikšmę, kai a, b, c – realieji skaičiai.

6. Raskite visas teigiamųjų skaičių poras (x, y) , tenkinančias lygčių sistemą

$$\begin{cases} x^{2y+x} = y^{3y-5x}, \\ x^3y = 1. \end{cases}$$

7. Raskite visas sveikąsias m reikšmes, su kuriomis reiškinys $\sqrt{m^2 + m + 1}$ irgi įgyja sveikąsias reikšmes.

8. Raskite visas natūraliąsias n reikšmes, su kuriomis $4^n - 1$ dalijasi iš 7 be liekanos.

9. Tegul

$$a_n = \sqrt{|60\sqrt{11} - 199|} + \sqrt{60\sqrt{11} + 171 + n}.$$

Ar sekoje a_1, a_2, a_3, \dots yra bent vienas natūralusis skaičius?

10. Raskite visas natūraliąsias reikšmes, kurias įgyja dviejų skirtingų natūraliųjų skaičių sandaugos ir sumos santykis.

11. Ar galima $1/2$ užrašyti baigtine suma $1/n_1^2 + 1/n_2^2 + \dots + 1/n_\ell^2$, kai n_1, n_2, \dots, n_ℓ – skirtingi natūralieji skaičiai?

12. Raskite visus daugianarius $p(x)$, tokius kad lygybė $p(3x)p(-3x) = 81(x^2 - 1)^2$ yra teisinga su visomis realiosiomis x reikšmėmis.

13. Funkcija $f(x)$ yra apibrėžta realiųjų skaičių aibėje ir įgyja realiąsias reikšmes. Tarkime, kad

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$$

su visomis realiosiomis x_1 ir x_2 reikšmėmis. Ar visada

$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2) + f(x_3)}{3}$$

su visomis realiosiomis x_1, x_2, x_3 reikšmėmis?

14. Šachmatų lentą 6×6 dengia 18 domino kauliukų 2×1 . (Vienas kauliukas dengia lygiai du lentos laukelius.) Įrodykite, kad vienu statmenu arba horizontaliu pjūviu lentą galima perpjauti į dvi (nebūtinai lygias) dalis nesugadinant nė vieno domino kauliuko.

15. Įrodykite, kad ant vienetinio apskritimo, kurio centras – koordinačių pradžia, yra be galo daug taškų su racionaliosiomis koordinatėmis.

16. Į kelias dalis padalija plokštumą 2001 tiesė, jei jokios trys tiesės nesikerta viename taške ir jokios dvi tiesės nėra lygiagrečios?

17. Kiek mažiausiai plokštumos taškų su sveikosiomis koordinatėmis uždengia kvadratas, kurio kraštinė yra lygi 2,1?

18. Tegul M yra trikampio ABC kraštinės AB vidurio taškas, O yra apibrėžto apie trikampį ABC apskritimo centras, $\widehat{COM} = 90^\circ$. Įrodykite, kad

$$|\widehat{ABC} - \widehat{BAC}| = 90^\circ.$$

19. Žinoma, kad į trapeciją, kurios pagrindai yra lygūs 4 ir 16, galima įbrėžti apskritimą bei apie ją galima apibrėžti apskritimą. Raskite tų apskritimų spindulius.

20. Styga, kuri remiasi į 60° apskritimo lanką, dalija skritulį į du segmentus. Į mažesnįjį segmentą įbrėžtas kvadratas. Raskite jo kraštinę, jei to apskritimo spindulys yra lygus R .