Organizuoja

VILNIAUS UNIVERSITETAS

Remia

UAB „INFORMACINĖS TECHNOLOGIJOS“
LIETUVOS JAUNŲJŲ MATEMATIKŲ MOKYKLA
ALMA LITTERA
NACIONALINIS EGZAMINŲ CENTRAS
TEV
TYTO ALBA
LIETUVOS MATEMATIKŲ DRAUGIJA

XXIII LIETUVOS KOMANDINĖ MOKSLEIVIŲ MATEMATIKOS OLIMPIADA PROF. JONO KUBILIAUS TAUREI LAIMĖTI

Vilniaus universiteto Matematikos ir informatikos fakultetas, 2008 09 27

Uždavinių sąlygos

1. Išspręskite lygtį

$$\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}-\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}=\frac{4}{x+1}.$$

2. Išspręskite lygčių sistemą

$$\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=9, \\ \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}+\frac{1}{\sqrt[3]{y}}\right)\left(1+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)\left(1+\frac{1}{\sqrt[3]{y}}\right)=18. \end{cases}$$

3. Išspręskite lygtį

$$\sqrt{x+1}+\sqrt{x+3}=\sqrt{2x-1}+\sqrt{2x+1}.$$

4. Raskite visas tokias realiąsias funkcijas f, kad $f(x)\,f(y) - f(xy) = x + y$ su visomis realiųjų skaičių x ir y poromis.

5. Ar galima trupmeną 3/2011 užrašyti trijų trupmenų suma, kurių visų skaitikliai yra 1, o vardikliai yra skirtingi nelyginiai skaičiai?

6. Raskite visus galimus sveikųjų skaičių x, y ir z trejetus (x; y; z), tenkinančius lygčių sistemą

$$\begin{cases} x+y+z=3, \\ x^3+y^3+z^3=3. \end{cases}$$

7. Sveikieji teigiami skaičiai x ir y yra skirtingi, $x < y$, o $x^2 + y^3$ dalijasi iš $x^3 + y^2$.

(A) Nurodykite vieną tokią sveikųjų teigiamų skaičių x ir y, $x < y$, porą (x; y).
(B) Ar galima nurodyti dvi tokias skirtingas poras?
(C) Ar galima nurodyti 2008 tokias poras?
(D) Ar tokių porų (x; y) yra be galo daug ar baigtinis skaičius? Atsakymą pagrįskite.

8. Įrodykite, kad kiekvienas natūralusis skaičius N turi tokį kartotinį, kurio skaitmenų suma irgi yra N.

9. Lentoje yra parašyti skaičiai 1, 2, 3, 4 ir 5. Viena operacija galima paimti bet kuriuos du skaičius a ir b ir pakeisti juos skaičiais ab ir $a + b$. Ar pakartotinai taikant tokią operaciją kada nors lentoje gali atsirasti skaičiai 21, 27, 64, 180, 540?

10. Turime aritmetinę progresiją

$$18, 41, 64, 87, \dots .$$

(A) Ar toje progresijoje kada nors pasitaikys skaičius, kurio (dešimtainė) išraiška užrašoma vienais devynetais be jokių kitokių skaitmenų?

(B) Ar toje progresijoje yra keli tokie skaičiai?

(C) Ar toje progresijoje yra be galo daug vienais devynetais užrašomų skaičių?

11. Ar yra tokių sveikųjų teigiamų skaičių n (ir jei yra, tai kiek), kad visų sveikųjų skaičių nuo 1 iki n sandauga baigiasi:

(A) lygiai 98 nuliais?

(B) lygiai 99 nuliais?

12. Robinzonas Kruzas ir jo asistentas Penktadienis pakaitomis spalvina po vieną arba po du turinčius bendrą kraštinę dar nenuspalvintus lentelės 2×9 langelius. Pirmasis spalvinti pradeda Robinzonas. Laimi tas, kuris nuspalvina patį paskutinį lentelės langelį. Įrodykite, kad pradedantis Robinzonas visada gali spalvinti taip, kad laimėtų, nesvarbu kaip bespalvintų jo asistentas Penktadienis.

13. Stačiakampį vadinsime *skaidomu*, jeigu jis gali būti padalintas į du arba daugiau kvadratų taip, kad kiekvieno kvadrato kraštinės ilgis yra sveikasis skaičius ir tame skaidinyje yra vienintelis kvadratas su trumpiausiu kraštinės ilgiu. Kokie yra paties mažiausio ploto *skaidomo* stačiakampio matmenys?

14. Keliais skirtingais būdais galima nudažyti kiekvieną 8×8 lentelės langelį arba balta, arba juoda spalva taip, kad bet kurioje jos 2×2 dalyje yra lygiai 3 vienos kurios spalvos langeliai?

Pastaba. Du lentelės nudažymai laikomi skirtingais, jeigu bent vienas jos langelis yra nudažytas nevienodai.

15. Kiekvienas iš 25 kvadratinio 5×5 skydelio langelių gali būti dviejose būsenose: būsenoje „į“ arba būsenoje „iš“. Palietus bet kurį to skydelio langelį jo būsena pasikeičia priešinga: jeigu langelis buvo būsenoje „į“, tai palietus jis pereina į būseną „iš“ ir, atvirkščiai, jeigu jis buvo būsenoje „iš“, tai palietus jo būsena pasikeičia į būseną „į“. Kartu su paliestojo langelio būsena į priešingą būseną pasikeičia ir gretimų jam, t.y. su paliestuoju langeliu bendrą kraštinę, turinčių langelių būsenos. Pradžioje visi 25 tos 5×5 lentelės langeliai buvo būsenoje „iš“. Po kelių langelių palietimų pasirodė, kad vienintelis lentelės langelis yra būsenoje „į“. Nurodykite visas galimas to vienintelio lentelės langelio, esančio būsenoje „į“, buvimo vietas.

16. Baronas Miunchauzenas, tapęs patyrusiu fermeriu, įsigijo keturias tvoros dalis, kurių ilgiai yra 1, 4, 7 ir 8 metrai. Kokio didžiausio ploto keturkampį sklypą gali su jomis atitverti baronas Miunchauzenas?

17. Trikampyje ABC kraštinės $AB = 2$, $BC = \sqrt{3}$, o $\angle ABC = 150^\circ$. Taškas P yra toks trikampio ABC plokštumos taškas, kad $\angle APB = 45^\circ$, o $\angle BPC = 120^\circ$. Raskite BP.

18. Trikampio ABC kraštinėje AC yra pažymėtas taškas E, o kraštinėje AB – taškas F. Taškas D yra BE ir CF sankirtos taškas. Jeigu trikampių BDF, BCD ir CDE plotai yra atitinkamai 3, 7 ir 7, tai kam tada yra lygus keturkampio $AEDF$ plotas?

19. Du susikertantys apskritimai S ir T turi bendrą liestinę, kuri apskritimą S liečia taške P, o apskritimą T taške Q. Apskritimų sankirtos taškai yra M ir N ir taškas N yra arčiau bendrosios liestinės PQ nei taškas M. Tiesė PN dar kartą kerta apskritimą T taške R. Įrodykite, kad MQ yra kampo PMR pusiaukampinė.

20. Taškas D yra toks trikampio ABC vidaus taškas, kad $\angle DAC = \angle DCA = 30^\circ$, o $\angle DBA = 60^\circ$. Taškas E yra atkarpos BC vidurio taškas, o taškas F yra toks atkarpos AC taškas, kad $AF = 2FC$. Įrodykite, kad DE yra statmena EF.

Organized by

VILNIUS UNIVERSITY

Sponsored by

INFORMACINĖS TECHNOLOGIJOS,
LITHUANIAN MATHEMATICAL SOCIETY,
Publishing house ALMA LITTERA,
LITHUANIAN SCHOOL OF YOUNG MATHEMATICIANS,
NATIONAL EXAM CENTRE,
Publishing house TEV,
Publishing house TYTO ALBA

23rd TEAM CONTEST OF LITHUANIA IN MATHEMATICS

Department of mathematics and informatics of Vilnius University
September the 27th 2008

1. Solve the equation

$$\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}-\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}=\frac{4}{x+1}$$

2. Solve the system of equations

$$\begin{cases}\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=9,\\ \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}+\frac{1}{\sqrt[3]{y}}\right)\left(1+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)\left(1+\frac{1}{\sqrt[3]{y}}\right)=18.\end{cases}$$

3. Determine all real numbers x satisfying

$$\sqrt{x+1}+\sqrt{x+3}=\sqrt{2x-1}+\sqrt{2x+1}.$$

4. Find all real functions f such that $f(x)\,f(y)-f(xy)=x+y$ for all real values x and y.

5. Is it possible to represent the fraction 3/2011 as a sum of three fractions all numerators of which are 1 and all denominators are different and odd positive integers?

6. Find all integer solutions of the system of equations

$$\begin{cases}x+y+z=3,\\ x^3+y^3+z^3=3.\end{cases}$$

7. The positive integers x and y are different, $x<y$, and x^2+y^3 is divisible by x^3+y^2.

(A) Determine one such pair $(x; y)$ of positive integers x and y with $x<y$.
(B) Is it possible to find some 2 such pairs?
(C) Is it possible to determine 2008 such pairs?
(D) Are there infinitely many such pairs $(x; y)$?

8. Prove that for any positive integer N there exists a multiple of N whose decimal digits add up to N.

9. The five numbers 1, 2, 3, 4, 5 are written on a blackboard. A student may erase any two numbers a and b and replace them with the numbers ab and $a+b$. If this operation is performed repeatedly, can the numbers 21, 27, 64, 180, 540 ever appear on the board?

10. We have a sequence 18, 41, 64, 87, … , Does there in that sequence ever appear:
(A) a number consisting entirely of 9'?
(B) several such numbers each consisting entirely of 9'?
(C) Are there infinitely many such numbers?

11. Does there exists the positive integer *n* (and if there then how many) such that the product of all integers from 1 to *n* ends:
(A) by exactly 98 zeroes?
(B) by exactly 99 zeroes?

12. Robinson Crusoe and his assistant Man Friday are marking in turn either one or two neighbouring (sharing common side) unmarked squares in the 2 x 9 board below. The player who marks the last square, wins. If Robinson starts, show that he can always win the game independently what Friday is doing.

13. Call a rectangle *splittable* if it can be divided into two or more square parts such that the side of each square is of integral length and there is a unique square with smallest side length. Find the dimensions of the *splittable* rectangle with the least possible area.

14. The squares of an 8×8 chessboard are colored black and white, in such a way that every 2×2 square contains exactly three squares of the same color. In how many ways can this be done?
Remark. Two coloring are regarded to be different if at least one square in the chessboard is colored differently.

15. A regular (5×5)-array of lights is defective, so that toggling the switch for one light causes each adjacent light in the sam row and in the same column as well as the light itself to change state, from on to off, or from off to on. Initially all the lights are switched off. After a certain number of toggles, exactly one light is switch on. Find all possible positions of this light.

16. Baron Munchhausen acting as a skilled farmer has four straight fences, with respective lenghts 1, 4, 7 and 8 metres. Wha is the maximum area of the quadrilateral Baron Munchhausen can enclose?

17. In triangle ABC, $AB = 2$, $BC = \sqrt{3}$, and the angle $ABC = 150^\circ$. P is a point on the plane of triangle BC such that the angle $APB = 45^\circ$ and the angle $BPC = 120^\circ$. Find BP.

18. In triangle ABC, E is a point on AC and F is a point on AB. BE and CF intersects at D. If the areas of triangles BDF, BCD and CDE are 3, 7 and 7 respectively, what is the area of the quadrilateral $AEDF$?

19. Two intersecting circles S and T share a common tangent which touches S at P and T at Q. The two circles intersect at M and N, where N is nearer to PQ than M is. The line PN meets the circle T again at R. Prove that MQ bisects angle PMR.

20. Point D lies inside triangle ABC such that $\angle DAC = \angle DCA = 30^\circ$ and $\angle DBA = 60^\circ$. Point E is the midpoint of segment BC. Point F lies on segment AC with $AF = 2FC$. Prove that DE is perpendicular to EF.