Organizuoja

VILNIAUS UNIVERSITETAS

Remia

ALMA LITTERA
BALTIC AMADEUS
INFORMACINĖS TECHNOLOGIJOS
LIETUVOS JAUNŲJŲ MATEMATIKŲ MOKYKLA
NACIONALINIS EGZAMINŲ CENTRAS
TEV
TYTO ALBA

XXII LIETUVOS KOMANDINĖ MOKSLEIVIŲ MATEMATIKOS OLIMPIADA PROF. JONO KUBILIAUS TAUREI LAIMĖTI

Vilniaus universiteto Matematikos ir informatikos fakultetas, 2007 09 29

Uždavinių sąlygos

1. Išspręskite lygčių sistemą

$$\begin{cases} 1-\dfrac{12}{y+3x}=\dfrac{2}{\sqrt{x}}, \\ 1+\dfrac{12}{y+3x}=\dfrac{6}{\sqrt{y}}. \end{cases}$$

2. Raskite visus galimus skaičių a, b, c ir d ketvertus (a; b; c; d), tenkinančius lygčių sistemą

$$\begin{cases} a+b=8, \\ ab+c+d=23, \\ ad+bc=28, \\ cd=12. \end{cases}$$

3. Daugianaris $f(x)$ turi 3 skirtingas realiąsias šaknis a, b ir c, o jo koeficientas prie x^3 yra teigiamas. Įrodykite, kad $f'(a)+f'(b)+f'(c)>0$.

4. Išspręskite nelygybę $\dfrac{8}{\sqrt{x+6}-\sqrt{x-2}}\le 6-\sqrt{x+1}$.

5. Teigiami realieji skaičiai a, b ir c yra tokie, kad jie visi kartu arba yra didesni, arba visi kartu mažesni už 1. Įrodykite, kad tada $\log_a bc+\log_b ca+\log_c ab\ge 4(\log_{ab} c+\log_{bc} a+\log_{ca} b)$.

6. Raskite visus sveikųjų teigiamų skaičių x, y, z ir t ketvertus (x, y, z, t) tenkinančius lygtį

$$x^2+y^2+z^2+t^2=3(x+y+z+t).$$

7. Su kiekvienu n imkime skaičių $S_n=1\cdot 2+2\cdot 3+\ldots+n\cdot(n+1)$. Įrodykite arba paneikite, kad tarp bet kurių dviejų kaimyninių skaičių S_n ir S_{n+1} visada yra nors vienas sveikojo skaičiaus kvadratas.

8. Nurodykite visus sveikuosius teigiamus skaičius n, kurie gali būti užrašomi išraiška

$$n=[a,b]+[b,c]+[c,a],$$

kur a, b, c yra sveiki teigiami skaičiai, o $[p,q]$ yra bendras mažiausias skaičių p ir q kartotinis.

9. Sveikuosius teigiamus skaičius m ir n stengsimės parinkti taip, kad skaičius $\dfrac{m+1}{n}+\dfrac{n+1}{m}$ būtų sveikasis skaičius.

a) Nurodykite (nors) tris tokių sveikųjų teigiamų skaičių m ir n poras (m,n);

b) Raskite nors 5 tokias skaičių m ir n poras (m,n);

c) Ar galima rasti 7 tokias skaičių poras?

d) Ar yra be galo daug tokių sveikųjų teigiamų skaičių porų?

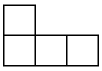
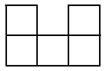
10. **1.** Nurodykite tokį sveiką teigiamą skaičių n, $n > 2$, kad atsirastų n tokių iš eilės einančių sveikųjų skaičių, kurių kvadratų suma pati būtų sveikojo teigiamo skaičiaus kvadratas.
2. Nurodykite 2 tokius sveikuosius teigiamus n.
3. Ar galima rasti 3 tokius sveikuosius teigiamus n?

11. M yra baigtinė plokštumos taškų aibė. Plokštumos taškas O yra vadinamas aibės M *kone simetrijos centru*, jeigu yra įmanoma iš aibės M pašalinti vieną jos tašką taip, kad taškas O yra likusių aibės M taškų sistemos simetrijos centras įprastine prasme.
a) Nurodykite aibę M, turinčią tokį *kone simetrijos centrą*;
b) Nurodykite aibę M, turinčią lygiai 2 *kone simetrijos centrus*;
c) Kiek *kone simetrijos centrų* gali turėti tokia baigtinė plokštumos aibė M?

12. Kiekvienai neneigiamų sveikųjų skaičių sekai $S = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ apibrėžkime jos palikuonių seką $T = \{b_1, b_2, ..., b_n\}$, kur kiekvienas b_i yra lygus skaičiui tokių sekos S elementų, kurie yra dešiniau elemento a_i ir kurie yra mažesni už a_i. Pavyzdžiui, jeigu $S = \{6, 1, 8, 0, 5, 7, 2, 2, 4, 0, 7, 7, 5\}$, tai $T = \{8, 2, 10, 0, 4, 5, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 0\}$. Duotajai sekai S_0 simboliu S_1 pažymėkime sekos S_0 palikuonių seką, simboliu S_2 pažymėkime sekos S_1 palikuonių seką ir taip toliau. Ar visada atsiras toks skaičius j, kad $S_j = S_{j+1}$?

13. Apskritimas yra padalijamas į $2n$ vienodo ilgio sektorių, n iš tų sektorių yra nudažomi juodai ir likusieji n sektorių yra nudažomi baltai. Baltieji sektoriai pagal laikrodžio rodyklę yra sunumeruojami iš eilės skaičiais nuo 1 iki n, pradedant nuo bet kurio baltojo sektoriaus. Po to juodieji sektoriai prieš laikrodžio rodyklę yra irgi sunumeruojami iš eilės skaičiais nuo 1 iki n, vėl pradedant nuo bet kurio juodojo sektoriaus. Įrodykite, kad visada atsiras n iš eilės einančių sektorių, kurie yra sunumeruoti panaudojant visus skaičius nuo 1 iki n.

14. Tegu a_1, a_2, ..., a_n yra skaičiai 1, 2, ..., n surašyti apskritimu bet kuria tvarka. Raskite $\min \sum_{j=1}^{n} | a_j - a_{j+1} |$ ir $\max \sum_{j=1}^{n} | a_j - a_{j+1} |$, jei laikome, kad $a_{n+1} = a_1$ ir abi ieškomos reikšmės – ir pati didžiausioji, ir pati mažiausioji – yra suskaičiuojamos imant visas įmanomas skaičių 1, 2, ..., n perstatas.

15. Raskite tokį patį mažiausią įmanomą skaičių n, kad būtų galima visą $n \times n$ matmenų šachmatų lentą įprastiniu būdu be persidengimų uždengti panaudojus vienodą  ir  figūrų skaičių.

16. Į apskritimą su centru O yra įbrėžtas iškilasis keturkampis $ABCD$, kurio įstrižainės yra statmenos. Laužtė AOC dalija tą keturkampį į dvi dalis. Raskite visus galimus tų dalių plotų santykius.

17. Du apskritimai S ir T liečiasi iš išorės, o jų bendroji liestinė turi su apskritimu S bendrą tašką A, o su apskritimu T – bendrą tašką B. Atkarpa AP yra apskritimo S skersmuo, o iš taško P išvesta apskritimo T liestinė liečia jį taške Q. Įrodykite, kad $AP = PQ$.

18. Trikampio kraštinių ilgių kvadratai yra racionalieji skaičiai. Ar tada būtinai
a) apie tą trikampį apibrėžto apskritimo spindulio kvadratas yra racionalusis skaičius?
b) į tą trikampį įbrėžto apskritimo spindulio kvadratas yra racionalusis skaičius?

19. Trikampio ABC kraštinių ilgiai yra a, b ir c, o jo (vidaus) kampų A, B ir C pusiaukampinių ilgiai yra atitinkamai w_a, w_b ir w_c. Jeigu R yra yra apie tą trikampį apibrėžto apskritimo spindulys, tai įrodykite, kad yra teisinga nelygybė $\dfrac{b^2 + c^2}{w_a} + \dfrac{c^2 + a^2}{w_b} + \dfrac{a^2 + b^2}{w_c} > 4R$.

20. Taškas O yra iškilojo keturkampio $ABCD$ įstrižainių AC ir BD sankirtos taškas. Apskritimai, apibrėžti apie trikampius OAD ir OBC, kertasi taškuose O ir M. Taškai T ir S yra antrieji tiesės OM susikirtimo su apskritimais, apibrėžtais atitinkamai apie trikampius OAB ir OCD, taškai. Įrodykite, kad taškas M yra atkarpos TS vidurio taškas.