

Organizuoja
Vilniaus universitetas

Remia
UAB „AFFECTO LIETUVA“
LIETUVOS MATEMATIKŲ DRAUGIJA,
Leidykla TYTO ALBA,
NACIONALINIS EGZAMINŲ CENTRAS,
LIETUVOS JAUNŲJŲ MATEMATIKŲ MOKYKLĄ

XIV LIETUVOS 5–6 KLASIŲ MOKSLEIVIŲ MATEMATIKOS OLIMPIADA

Vilniaus universiteto Matematikos ir informatikos fakultetas, 2012 09 29

Konkurso dalyvius sveikina
Pasaulinės nacionalinių matematikos varžybų federacijos Prezidentas
Alexander SOIFER

1. Apuokas Apolinaras yra labai drąsus paukštelis, tačiau net ir jis labai privengia kiekvieno tokio dviženklio skaičiaus, kurio kuris nors vienas skaitmuo yra trimis vienetais didesnis už kitą jo skaitmenį. Visus kitus likusius dviženklus skaičius Apuokas Apolinaras stačiai garbina. Apuokas Apolinaras, kaip ir kiekvienas Juokų miške rinkimų teisę turintis subrendęs paukštelis, puikiai žino, kad pats didžiausias dviženklis skaičius yra 99, o mažiausias – 10. Kiekvienas žvirblis Juokų miške jums tuojau patvirtins, kad Apuokas Apolinaras, pavyzdžiui, privengia skaičių 14 ir 52, o stačiai garbina, jų kaimynus 13 ir 51. O kiek yra iš viso tokių dviženklių skaičių, kuriuos stačiai garbina Apuokas Apolinaras?

2. Genelis Baltrus, kuris pats yra nemenkas paukščių profsajungų aktyvistas ir, ko čia slėpti, Atamano Šarkos patikėtinis ir patarėjas, baigęs pamainą sausoje pušyje labai mėgsta sausoje pušyje dar pakalinėti ir padėlioti stulpeliu, o įsidrąsinęs – ir padauginti. Pastaruoju laiku Juokų miške pasidarė madinga dvigubinti skaičius. Štai vakar po pamainos Genelis Baltrus pasiėmė dviženklį skaičių, kuris buvo be nulių (nulių genelis Baltrus absoliučiai nemėgsta, o skaičių su nuliniiais skaitmenimis jis net ir rimtais skaičiais nelaiko), nedelsdamas padvigubino jį ir su palengvėjimu įsitikino, kad ir padvigubintame skaičiuje jokių nulių nėra. Ir tada jis ilgam susimastė begalvodamas, kiek daugiausiai kartų taip dvigubinant skaičius ir išvengiant nulių ir prieš dvigubinimą, ir po jo, gali sumažėti dvigubinamojo skaičiaus skaitmenų sandauga. (Kad dvigubinant skaičių jo skaitmenų sandauga tikrai gali sumažėti, Genelis Baltrus puikiai išvelgia iš pavyzdžio $61 \times 2 = 122$)

Taip genelis Baltrus sėkmingai išsprendė uždavinį: dviženklį skaičių be nulinių skaitmenų padvigubiname ir vėl gavome skaičių be nulių. Kiek daugiausiai kartų po vieno tokio dvigubinimo galėjo sumažėti to padvigubintojo skaičiaus skaitmenų sandauga?

Kokį atsakymą gavo Baltrus?

3. Genelis Baltrus nėra labai prietaringas, bet vieną kartą išsitarė, kad tik toks paukštelis, kuris susigaudo, ar galima 9×3 stačiakampį padalinti į 8 nepersiklojančius, nebūtinai vienodo dydžio kvadratėlius, ar negalima, tik toks paukštelis tegalėtų būti prileistas, pavyzdžiui, prie naktinių pasiskraidymų.

Taigi ar galima padalinti 9×3 stačiakampį į 8 nepersiklojančius, nebūtinai vienodo didumo kvadratėlius?

4. Aukštojoje Šarkų akademijoje mokslas trunka vienerius, dvejus, trejus, ketverius arba net ištikus penkerius metus, o konkursai ten yra neapsakomai dideli – kai stojantieji skrenda į stojamąjį egzaminą Paberžėn, dangus pajuosta nuo uolių skraiduolių. Per stojamąjį egzaminą visada yra duodami 5 uždaviniai ir vertinant yra skaičiuojami tik pilnai išspręsti uždaviniai – jei pilnai išsprendei 1 uždavinį, tai Aukštojoje Šarkų akademijoje gali mokytis vienerius metus, jei išsprendei 2 pilnus uždavinius, tai gali mokytis net dvejus ir taip toliau iki pat galo: jeigu jau išsprendei visus 5 duotus uždavinius, tai gali semtis šarkiškiosios išminties, vargu ar kuo benusileidžiančios žmogiškai, ištikus penkerius metus.

Ką tik įvyko 2012 metų stojamieji uždaviniai į aukštąją Šarkų Akademią, kuriame dalyvavo gal apie pusė milijono šarkų. Bent po vieną uždavinį pilnai išsprendė ir į Aukštąją Šarkų akademiją buvo priimti 120 pačių išmintingiausiųjų paukščių, išsprendusių, kaip buvo nurodyta, bent po vieną pilną uždavinį. Iš viso tie 120 įstojusiųjų visi kartu pateikė 277 pilnus uždavinių sprendimus. Paaiškėjo, kad trečdalis įstojusiųjų galės mokytis vienerius metus, ketvirtadalis – dvejus, penktadalis – trejus metus. Ar galima garantuotai sakyti, kad tikrai bus kam Aukštojoje Šarkų akademijoje mokytis ir ištikus penkerius metus ir jeigu jau taip, tai kodėl?

5. Pats sudėtingiausias uždavinys, kurį šarkaitės ir šarkaičiai gauna spręsti Matematiniam šarkų lopšelyje „Du skryst vienas“ yra toks:

Ant kiekvieno iš dvidešimt penkių 5×5 lentos langelių pirmiausiai yra padedama („paberinama“) bent po vieną grūdėlį, griežtai laikantis taisyklės, kad ant jokių dviejų langelių negalima padėti po tiek pat grūdelių, o padedamų grūdelių skaičius jokiam langelyje negali viršyti 25 grūdelių.

Toliau yra rūpestingai suskaičiuojama, kiek grūdelių tokiu būdu atsiranda ir kiekvienoje iš penkių tos lentelės eilučių, ir kiekviename iš penkių tos lentelės stulpelių, ir kiek jų tokiu būdu atsiranda abiejose ilgosiose įstrižainėse.

Grūdelių išdėliojimas yra laikomas *stulbinančiu*, jei ir visose penkiose tos lentelės eilutėse, ir visuose penkiuose tos lentelės stulpeliuose, ir abiejose ilgosiose įstrižainėse randame po nelyginį grūdelių skaičių.

Grūdelių išdėliojimas vadinamas *nerealium*, jeigu ir visose penkiose tos lentelės eilutėse, ir visuose penkiuose tos lentelės stulpeliuose, ir abiejose ilgosiose įstrižainėse randame padėta po lyginį grūdelių skaičių.

Sakysime, grūdelių išdėliojimas

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25

nebūtų nei *stulbinantis*, nei *nerealus*, nes pirmosios eilutės grūdelių suma $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$ yra nelyginė, o antrosios $6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 40$ yra lyginė.

Ar yra įmanoma turėti *stulbinantį* grūdelių išdėliojimą ir ar galima turėti *nerealų* grūdelių išdėliojimą ir kodėl?

Kiekvienu atveju, jeigu sakote, kad galima, tai tada parodykite, kaip tai padarėte, o jei negalima, tai suprantamai paaiškinkite, kodėl tai yra neįmanoma.