

**XXVII LIETUVOS KOMANDINĖ MOKINIŲ MATEMATIKOS OLIMPIADA
PROF. JONO KUBILIAUS TAUREI LAIMĖTI**

**Konkurso dalyvius sveikina
Pasaulinės nacionalinių matematikos varžybų federacijos Prezidentas
Alexander SOIFER**

Vilniaus universiteto Matematikos ir informatikos fakultetas

2012 09 29

1. Raskite visus realiuosius lygčių sistemos

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -5 \\ 2x^2 + xy - y^2 = 5 \end{cases}$$

sprendinius.

2. Išspręskite lygtį $\frac{2x}{3x^2 - x + 2} - \frac{7x}{3x^2 + 5x + 2} = 1$.

3. Duota lygčių sistema

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = x_3^2, \\ x_2 + x_3 = x_4^2, \\ x_3 + x_4 = x_5^2, \\ x_4 + x_5 = x_1^2, \\ x_5 + x_1 = x_2^2. \end{cases}$$

(A) Nurodykite kokį nors vieną teigiamą jos sprendinį $(x_1; x_2; x_3; x_4; x_5)$.

(B) Raskite visus teigiamus lygčių sistemos sprendinius.

4. Įrodykite, kad su visais teigiamais skaičiais a, b ir c galioja nelygybė

$$\frac{a}{2a+b+c} + \frac{b}{a+2b+c} + \frac{c}{a+b+2c} \leq \frac{3}{4}.$$

5. Neneigiamų skaičių a, b, c, d suma lygi 4. Įrodykite, jog galioja nelygybė

$$\frac{a}{a^3+4} + \frac{b}{b^3+4} + \frac{c}{c^3+4} + \frac{d}{d^3+4} \leq \frac{4}{5}.$$

6. Nagrinėkime visų skaičiaus 35 teigiamų kartotinių aibę.

(A) Raskite tos aibės skaičių, kurio visi skaitmenys būtų vienodi.

(B) Raskite patį mažiausią tokį skaičių.

7. Paukščių pulkininkas Genys Balys baigęs pamainą labai mėgsta sausoje pušyje dar pakalinėti – sudėti ar sudauginti ką nors “stulpeliu”. Vakar jis pasiėmė 7-ženklį natūralųjį skaičių be nulio (nulių kaip skaitmenų pulkininkas Balys nepripažįsta), padvigubino jį ir nulių padvigubintame skaičiuje vėl negavo. Kiek daugiausiai kartų taip dvigubinant gali sumažėti dvigubinamojo 7-ženklis skaičiaus skaitmenų sandauga? (Kad sandauga gali sumažėti, pulkininkas žinojo dar nematęs pavyzdžio $6\ 666\ 668 \cdot 2 = 13\ 333\ 336$)

8. Nustatykite, kiek sveikųjų sprendinių $(x; y; z)$ turi lygtis

$$(x - y)^3 + (y - z)^3 + (z - x)^3 = 30.$$

9. Raskite visus natūraliųjų skaičių trejetus $(x; y; z)$, tenkinančius lygtį $x^2 = y \cdot 2^z + 1$ ir sąlygą $x > y > z$.

10. Poaibis $M \subseteq \{1, 2, \dots, 2011\}$ tenkina sąlygą: kad ir kokius tris to poaibio M elementus beimtume, tarp jų visada rasis tokie du elementai a ir b , kad arba a dalija b , arba b dalija a . Kiek daugiausiai elementų gali būti tokia poaibyje M ?

11. Ereliučiuje gyvena 14 erelių, susibūrusių į įvairias partijas. Pagal įstatymus partijoje negali būti mažiau negu 3 ereliai ir jokios dvi partijos negali susidėti iš visiškai tų pačių erelių. Be to, įstatymas numato, kad joks erelis negali priklausyti daugiau kaip dviem partijoms. Koks didžiausias partijų skaičius gali būti Ereliučiuje?

12. Kiekviename 2012×2012 lentelės langelyje yra įrašyta po skirtingą skaičių. Ar galima taip perstatyti tos lentelės skaičius, kad bet kurie du skaičiai, kurie iki perstatymo buvo toje pačioje eilutėje arba stulpelyje, atsidurtų skirtingose eilutėse ir skirtinguose stulpeliuose?

13. Karalius Saliamonas turi rimtų problemų. Po trijų dienų jis rengia didžiulį pokylį ir tam yra paruošęs 1000 butelių vyno. Ką tik paaiškėjo, kad vienas iš tų butelių užnuodytas. Žmogus, išgėręs bent vieną to vyno lašą, miršta ne vėliau kaip po trijų dienų (bet tikslus mirties laikas nežinomas). Karalius Saliamonas turi nustatyti užnuodytą butelį. Atsirado 10 savanorių vergų, kuriems Saliamono garbė yra vertesnė už nuosavą gyvybę. Kaip turi elgtis Saliamonas, kad tiksliai nustatytų, kuriuo buteliu jis negali vaišinti svečių?

14. Pažymėkime visus plokštumos taškus $(x; y)$ su sveikosiomis koordinatėmis x ir y , tenkinančiomis sąlygas $1 \leq x \leq 19$, $1 \leq y \leq 4$. Kiekvieną iš tų taškų nudažome viena iš spalvų – arba balta, arba pilka, arba juoda. Įrodykite, kad visada galima surasti tokį stačiakampį, kurio visos 4 viršūnės nudažytos viena spalva, o kraštinės lygiagrečios koordinatinių ašims.

15. Varžybose teisėjauja 8 teisėjai, vertinantys sportininkus įverčiais “taip” ir “ne”. Yra žinoma, kad bet kuriems dviem sportininkams yra du teisėjai, abiem davę po įvertį “taip”, yra du teisėjai, davę pirmajam įvertį “taip”, o antrajam įvertį “ne”, yra du teisėjai, davę pirmajam įvertį “ne”, o antrajam “taip”, ir yra du teisėjai, abiem davę po įvertį “ne”. Koks yra didžiausias galimas varžybų dalyvių skaičius?

16. Trapecijos $ABCD$ vienos šoninės kraštinės CD ilgis yra lygus abiejų (lygiagrečių) jos pagrindų AD ir BC ilgių sumai, o kitos tos trapecijos šoninės kraštinės AB vidurio taškas yra M . Raskite kampą CMD .

17. Smailiojo trikampio ABC pusiauakraštinė AK , pusiauakampinė BL ir aukštinė CH susikerta taške M . Raskite trikampio ABC plotą, jei $|CM| = 5$, o $|MH| = 3$.

18. Atkarpoje AB , kurios ilgis yra 10, pažymėtas toks taškas C , kad $|AC| = 6$, $|CB| = 4$. Taškai X ir Y yra paimti vienoje tiesės AB pusėje taip, kad $|YB| = |YC| = 3$, $|XA| = 8$ ir $|XC| = 6$. Raskite atkarpos XY ilgį.

19. Per apskritimo ω išorės tašką P išvestos to apskritimo kirstinė ir liestinė. Kirstinė tą apskritimą kerta taškuose A ir B , o liestinė liečia jį taške C , esančiame toje pačioje apskritimo ω skersmens, išvesto per tašką P , pusėje. Taško C projekciją tame skersmenyje pažymėkime Q . Įrodykite, kad $\angle QCA = \angle QCB$.

20. Į trikampį ABC , kuriame $AB \neq AC$, įbrėžtas apskritimas kraštinę BC liečia taške D , o taškai O ir I yra atitinkamai to trikampio apibrėžtinio ir įbrėžtinio apskritimų centrai. Kampas A pusiauakampinė antrą kartą kerta trikampio ABC apibrėžtinį apskritimą taške M , o tiesė DM antrą kartą kerta tą apskritimą taške $P \neq M$. Įrodykite, kad kampas API yra statusis.