Organizuoja

VILNIAUS UNIVERSITETAS

REMIA

UAB „AFFECTO LIETUVA“
LIETUVOS JAUNŲJŲ MATEMATIKŲ MOKYKLA
NACIONALINIS EGZAMINŲ CENTRAS
LEIDYKLA TEV
LEIDYKLA TYTO ALBA
LIETUVOS MATEMATIKŲ DRAUGIJA

XXV LIETUVOS KOMANDINĖ MOKSLEIVIŲ MATEMATIKOS OLIMPIADA PROF. JONO KUBILIAUS TAUREI LAIMĖTI,

Vilniaus universiteto Matematikos ir informatikos fakultetas, 2010 09 25

Uždavinių sąlygos

1. Išspręskite lygtį $\sqrt{3x^2+7x+1}+\sqrt{12x^2+28x+13}=\sqrt{9x^2+21x+12}$.

2. Duota lygtis

$$(x+1)^5+(x+1)^4(x-1)+(x+1)^3(x-1)^2+(x+1)^2(x-1)^3+(x+1)(x-1)^4+(x-1)^5=0.$$

(A) Nurodykite kokią nors vieną tos lygties šaknį.
(B) Raskite visas likusias tos lygties šaknis arba įrodykite, kad toji lygtis kitokių šaknų neturi.

3. Raskite visas funkcijas f, apibrėžtas realiųjų skaičių aibėje ir įgyjančias realiąsias reikšmes, kurioms lygybė $f(x)f(y)=f(xy)+xy$ galioja su visais realiaisiais skaičiais x ir y.

4. Raskite visus neneigiamų realiųjų skaičių trejetus (x,y,z), tenkinančius lygčių sistemą

$$\begin{cases} x^2y^2+1=x^2+xy, \\ y^2z^2+1=y^2+yz, \\ z^2x^2+1=z^2+zx. \end{cases}$$

5. Duota, kad $0<x,y,z\le 1$. Įrodykite nelygybę

$$\frac{x}{2+xy+yz}+\frac{y}{2+yz+zx}+\frac{z}{2+zx+xy}\le\frac{x+y+z}{x+y+z+xyz}.$$

Kada ši nelygybė virsta lygybe?

6. n yra natūralusis skaičius, kuris dalijasi iš 2010 ir kurio dešimtainiame užraše yra daugiausiai vienas lyginis skaitmuo.

(A) Nurodykite kokį nors vieną tokį skaičių.
(B) Nustatykite, ar galima rasti 2010 tokių skaičių.
(C) Raskite patį mažiausią tokį skaičių.

7. Nurodykite:

(A) kokį nors natūralųjį skaičių $n>1$, kuris yra daugiau kaip 1200 kartų didesnis už bet kurį savo pirminį daliklį;
(B) patį mažiausią tokį skaičių.

8. Raskite visus natūraliuosius skaičius n, kuriems kiekvienas iš skaičių $n^2-10n+23$, $n^2-9n+31$ ir $n^2-12n+46$ yra pirminis.

9. Raskite visus natūraliuosius skaičius n, su kuriais egzistuoja toks „futbolo skaičiaus” 11 kartotinis, kurio skaitmenų suma lygi n.

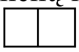
10. Natūralusis skaičius n vadinamas *nemariuoju*, jeigu jo negalima užrašyti pavidalu $n = \frac{x^2 - 1}{y^2 - 1}$, kur x ir y yra natūralieji skaičiai, didesni už 1.
(A) Ar skaičius 2 yra *nemarusis*?
(B) Ar skaičius 4 yra *nemarusis*?
(C) Ar *nemariųjų* skaičių yra be galo daug? Atsakymą pagrįskite.

11. 7 žmonių grupėje kai kurie žmonės yra pažįsta vienas kitą. Paaiškėjo, kad bet kuriuos 6 iš 7 tos grupės žmonių įmanoma taip susodinti prie apskrito stalo, kad bet kurie du greta sėdintys žmonės būtų pažįstami. Ar tikrai tada ir visus tuos 7 žmones būtų galima susodinti prie apskrito stalo taip, kad bet kurie 2 greta sėdintys žmonės būtų pažįstami?

12. Nustatykite, ar įmanoma nudažyti kelis 9×9 kvadrato vienetinius langelius taip, kad kiekvienas langelis turėtų lygiai du jam gretimus nudažytus langelius. (Gretimi yra tokie langeliai, kurie turi bendrą kraštinę.)

13. Lentoje ratu buvo užrašyta 11 sveikųjų skaičių. Atsidūręs prie lentos, Aladinas rado kiekvienos dviejų kaimyninių skaičių poros skirtumą, visada iš didesniojo skaičiaus atimdamas mažesnįjį. Jis pasisakė džinui tokiu būdu gavęs keturis vienetus, keturis dvejetus ir tris trejetus. Išklausęs džinas suabejojo, ar taip galėtų būti. Išsiaiškinkite, ar pagrįstos džino abejonės.

14. Šecherezada ir jos vyras Šachrijaras, paeiliui atlikdami ėjimus, žaidžia tokį žaidimą ant 2 x 2010 matmenų lentelės. Ant jos Šecherezada kiekvienu savo ėjimu turi horizontaliai padėti domino kauliuką



taip, kad jis tiksliai uždengtų du dar neuždengtus tos lentelės langelius, o Šachrijaras tokį patį domino kauliuką savo ėjimu turi padėti vertikaliai, kad jis irgi tiksliai uždengtų du dar neuždengtus tos lentelės langelius. Žaidimą pradeda Šecherezada. Žaidėjas, nebegalintis padėti kauliuko, pralaimi. Ar gali kuris nors iš jų žaisti taip, kad visada laimėtų, kad ir kaip bežaistų kitas žaidėjas?

15. Į $n \times n$ lentelės langelius tam tikra tvarka, po vieną skaičių į kiekvieną langelį, surašomi visi skaičiai 1, 2, 3, … , n^2. Bet kurie n langelių, esančių skirtingose tos lentelės eilutėse ir skirtinguose stulpeliuose, vadinami išretintais langeliais. Lentelė vadinama *serbiškąja*, jeigu bet kurių n išretintų tos lentelės langelių skaičių sandaugos dalybos iš $n^2 + 1$ liekana yra visada viena ir ta pati. Ar egzistuoja *serbiškoji* lentelė, kai
(A) $n = 8$? (B) $n = 10$?

16. Apskritimo, apibrėžto apie trikampį ABC, liestinės taškuose A ir B kertasi taške T. Tiesė q, einanti per tą tašką T lygiagrečiai kraštinei AC, kerta kraštinę BC taške D. Įrodykite, kad $AD = CD$.

17. Du nesutampantys statieji trikampiai, kurių kiekvieno kraštinių ilgiai yra 18, 24 ir 30, yra įbrėžti į tą patį apskritimą, o apskritimai, įbrėžti į šiuos trikampius, sutampa. Raskite tų trikampių bendros dalies plotą.

18. Lygiašonio trikampio ABC ($AB = AC$) kampo B pusiaukampinė kerta kraštinę AC taške B'. Žinodami, kad $BB' + B'A = BC$, raskite trikampio ABC kampus.

19. Trikampio ABC pusiaukampinės AD, BE ir CF kertasi taške I. Statmuo, išvestas per atkarpos AD vidurio tašką, kerta tieses BE ir CF atitinkamai taškuose M ir N. Įrodykite, kad taškai A, I, M ir N priklauso vienam apskritimui.

20. Tiesės, išvestos per apskritimo, apibrėžto apie nelygiašonį smailųjį trikampį ABC, centrą O statmenai kraštinėms AB ir AC, kerta trikampio ABC aukštinę AD atitinkamai taškuose P ir Q. M yra kraštinės BC vidurio taškas, o S yra apie trikampį OPQ apibrėžto apskritimo centras. Įrodykite, kad $\angle BAS = \angle CAM$.