Organizuoja
VILNIAUS UNIVERSITETAS

REMIA
UAB „AFFECTO LIETUVA“
LIETUVOS JAUNŲJŲ MATEMATIKŲ MOKYKLA
NACIONALINIS EGZAMINŲ CENTRAS
LEIDYKLA TEV
LEIDYKLA TYTO ALBA
LIETUVOS MATEMATIKŲ DRAUGIJA

# XXIV LIETUVOS KOMANDINĖ MOKSLEIVIŲ MATEMATIKOS OLIMPIADA PROF. JONO KUBILIAUS TAUREI LAIMĖTI

**Vilniaus universiteto Matematikos ir informatikos fakultetas, 2009 09 12**

## Uždavinių sąlygos

**1.** Įrodykite, kad $x\cos x \le \frac{\pi^2}{16}$ su kiekvienu $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$.

**2**. Realieji skaičiai $a$, $b$, $c$, $d$ ir $e$ tenkina sąlygą

$$|a-b| = 2|b-c| = 3|c-d| = 4|d-e| = 5|e-a| .$$

Raskite visus tokius skaičių penketus $(a;b;c;d;e)$.

**3.** Realusis skaičius $x$ yra toks, kad

$$x^3 = x+1 .$$

Raskite tokius sveikuosius skaičius $\alpha, \beta$ ir $\gamma$, kad

$$x^7 = \alpha x^2 + \beta x + \gamma .$$

**4**. Išspręskite lygčių sistemą

$$\begin{cases} \dfrac{9}{2(x+y)} = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}; \\ \sqrt{x^2-2} = \sqrt{3-y^2}. \end{cases}$$

**5.** Realieji skaičiai $x_1, x_2, x_3, x_4$ ir $x_5$ tenkina sąlygą

$$\begin{cases} x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_1x_5 = -1; \\ x_2x_1 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_2x_5 = -1; \\ x_3x_1 + x_3x_2 + x_3x_4 + x_3x_5 = -1; \\ x_4x_1 + x_4x_2 + x_4x_3 + x_4x_5 = -1; \\ x_5x_1 + x_5x_2 + x_5x_3 + x_5x_4 = -1. \end{cases}$$

Kokias reikšmes gali įgyti $x_1$?

**6.** Aibėje $A$ yra 5 skirtingi realieji skaičiai. Raskite visas tokias aibes $A$, jeigu žinoma, kad aibė, sudaryta iš visų aibės $A$ skirtingų skaičių porų sandaugų, yra

$$\{0,1;\ 0,15;\ 0,375;\ 1;\ 1,6;\ 2,5;\ 3,75;\ 4;\ 6;\ 40\}.$$

**7.** Sveikieji skaičiai $a$ ir $b$ tenkina sąlygą

$$a = a^2 + b^2 - 8b - 2ab + 16.$$

Ar būtinai skaičius $a$ yra sveikojo skaičiaus kvadratas? Atsakymą pagrįskite.

**8.** Kiek yra natūraliųjų skaičių $a$, $b$ ir $c$ trejetų $(a; b; c)$, tenkinančių sąlygą

$$a + b + c = 2009?$$

Nurodykite visus tokius trejetus $(a; b; c)$, kurie tenkintų lygybę, o jų sandauga $abc$ įgytų didžiausią galimą reikšmę.

**9.** Neneigiami sveikieji skaičiai $a$ ir $b$ tenkina sąlygą $(a^2 - 9b^2)^2 - 33b = 16$.

1) Įrodykite, kad $|a-3b| \ge 1$.
2) Raskite visas neneigiamų sveikųjų skaičių poras $(a; b)$, tenkinančias šią lygybę.

**10.** Pirmosios šimtinės elementai $M = \{1, 2, 3, \ldots, 99, 100\}$ yra surašyti natūralia tvarka į 10 x 10 matmenų lentelę, kaip parodyta žemiau:

$$\begin{array}{cccc} 1 & 2 & \ldots & 10 \\ 11 & 12 & \ldots & 20 \\ \multicolumn{4}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} \\ 91 & 92 & \ldots & 100 \end{array}$$

Ar įmanoma išbraukti iš lentelės 10 skaičių taip, kad tarp likusių 90 skaičių nebūtų galima surasti 10-elementės aritmetinės progresijos?

**11.** Ratu surašyta 11 teigiamų sveikųjų skaičių. Paaiškėjo, kad bet kurių dviejų kaimyninių skaičių skirtumas yra ne mažesnis nei 20, o bet kurių dviejų kaimyninių skaičių suma yra ne mažesnė nei 100. Raskite pačią mažiausią įmanomą tokių 11 skaičių sumą.

**12.** Lentoje ratu tam tikra tvarka surašyti skaičiai 1, 2, 3, ...10. Priėjęs prie lentos ištvermingai-išmintingas Brėmų asiliukas suskaičiavo visas 10 įmanomų gretimų skaičių trejetų sumų ir lentoje užrašė mažiausią iš tų 10 sumų. Kokį patį didžiausią skaičių išmintingasis Brėmų asiliukas galėjo užrašyti lentoje?

**13.** Raskite patį mažiausią galimą vardiklį tokios nesuprastinamos trupmenos, kuri pati yra dviejų nesuprastinamų trupmenų su vardikliais 600 bei 700 suma.

**14.** Simboliu $f(n)$ pažymėkime visų lygties

$$4x + 3y + 2z = n$$

sveikųjų teigiamų sprendinių $(x; y; z)$ skaičių. Raskite

$$f(2009) - f(2000).$$

**15**. Įrodykite arba paneikite, kad skaičius $\underbrace{99...9}_{2005}{}^{2009}$ gali būti gautas išbraukiant kai kuriuos skaičiaus $\underbrace{99...9}_{2008}{}^{2009}$ skaitmenis.

**16.** Stačiajame lygiašoniame trikampyje $ABC$ taškas $K$ yra to trikampio įžambinės $AB$ vidurio taškas. To trikampio statiniuose $BC$ ir $AC$ yra atitinkamai pažymėti tokie taškai $L$ ir $M$, kad $BL = CM$. Ar tada būtinai trikampis $LMK$ yra:

1) lygiašonis;
2) statusis trikampis?

**17.** Apskritimas $O_1$, kurio spindulys lygus 2, ir apskritimas $O_2$, kurio spindulys lygus 4, išoriniu būdu liečiasi taške $P$. Taškai $A$ ir $B$ yra tokie atitinkamai apskritimų $O_1$ ir $O_2$ taškai, nesutampantys su tašku $P$, kad taškai $A$, $P$ ir $B$ yra vienoje tiesėje. Raskite atkarpos $PB$ ilgį, jeigu atkarpos $AB$ ilgis yra 4.

**18.** Lygiagretainio $ABCD$ kampo $A$ pusiaukampinė kerta lygiagretainio kraštinę $BC$ taške $M$, o kraštinės $CD$ tęsinį – taške $N$. Apie trikampį $MCN$ apibrėžto apskritimo centras yra taške $O$. Įrodykite, kad taškai $B$, $O$, $C$, $D$ priklauso vienam apskritimui.

**19.** Jeigu $a$, $b$ ir $c$ yra trikampio kraštinių ilgiai ir

$$A = \frac{a^2 + bc}{b + c} + \frac{b^2 + ca}{c + a} + \frac{c^2 + ab}{a + b},$$

$$B = \frac{1}{\sqrt{(a+b-c)(b+c-a)}} + \frac{1}{\sqrt{(b+c-a)(c+a-b)}} + \frac{1}{\sqrt{(c+a-b)(a+b-c)}},$$

įrodykite, kad $AB \geq 9$.

**20.** Iškilojo keturkampio ABCD išorėje nubrėžti lygiakraščiai trikampiai $ABQ$, $BCR$, $CDS$, $DAP$. Taškai $X$, $Y$, $Z$, $W$ yra atitinkamai atkarpų $PQ$, $QR$, $RS$, $SP$ vidurio taškai. Raskite didžiausiąją santykio

$$(XZ + YW)/(AC + BD)$$

reikšmę.