

**ALYTAUS APSKRITIES XV JAUNŲJŲ MATEMATIKŲ KOMANDINĖ OLIMPIADA
MOKYTOJO KAZIO KLIMAVIČIAUS TAUREI LAIMĖTI**

Druskininkai, 2011 m. lapkričio 19 d.

UŽDAVINIAI

1. Trijų natūraliųjų skaičių a , b ir c suma lygi 2013. Įrodykite, kad skaičius \overline{abc} dalijasi iš 3.
2. Natūraliuosius skaičius nuo 1 iki 100 surašykite taip, kad jokie vienuolika iš jų neitų nei didėjimo, nei mažėjimo tvarka.
3. Teniso turnyre dalyvavo 10 žaidėjų. Kiekvienas iš jų sužaidė po vieną partiją su kiekvienu kitu turnyro dalyviu. Tarkime, kad l_1, l_2, \dots, l_{10} yra tenisininkų laimėtų partijų skaičiai, o p_1, p_2, \dots, p_{10} – pralaimėtų partijų skaičiai. Įrodykite, kad galioja tokia lygybė:
$$l_1^2 + l_2^2 + \dots + l_{10}^2 = p_1^2 + p_2^2 + \dots + p_{10}^2.$$
4. Šachmatų turnyre dalyvauja ne daugiau kaip 30 dalyvių. Pagal turnyro taisykles kiekvienas žaidėjas susitinka su kiekvienu kitu dalyviu tik vieną kartą. Sužaidus $\frac{3}{8}$ visų partijų, pasirodė, kad jų skaičius lygus pernai vykusiame turnyre sužaistų partijų skaičiui. Kiek šachmatininkų dalyvauja turnyre ir kiek jų dalyvavo pernai?
5. Skaičiai p ir q yra pirminiai. Raskite juos, esant sąlygai, kad bent vienas lygties $x^4 - px^3 + q = 0$ sprendinys yra sveikasis skaičius.
6. Raskite mažiausią natūralųjį skaičių n , kuriam esant natūralusis skaičius $n^3 - 3n^2 + 4$ dalijasi iš 173.
7. Ežero vanduo pastoviai pasipildo iš požeminių šaltinių. Visą ežero vandenį 183 drambliai galėtų išgerti per 1 dieną, o 37 drambliai – per 5 dienas. Per kiek dienų visą ežerą išgertų vienas dramblys?
8. Trikampio ABC kraštinių ilgių tenkina tokią sąlygą: $BC^3 = AB^3 + AC^3$. Ar kampas A gali būti statusis?
9. Trikampyje ABC nubrėžta pusiauakrastinė CD . Apskaičiuokite kampo B didumą, jeigu $\angle A = 30^\circ$ ir $\angle CDB = 45^\circ$.
10. Buvo apklausti vienos pagrindinės mokyklos mokiniai. Pasirodė, kad 90 % žiemos mėgėjų mėgsta ir vasarą, o 72 % vasaros mėgėjų mėgsta ir žiemą. Užtat 10 % apklaustų mokinių nemėgsta nei žiemos, nei vasaros. Nustatykite, kiek procentų apklaustų mokinių mėgsta tik žiemą arba tik vasarą? Raskite galimai mažiausią apklaustų mokinių skaičių.