NURODYMAI

1. **Į egzaminą studentas gali atsinešti A4 formato lapą, kurio vienoje pusėje ranka gali būti parašyta bet kokios formulės, apibrėžimai, teoremų formuluotės. Negali būti jokių įrodymų ar uždavinių sprendimų. Tą lapą studentas privalės atiduoti kartu su egzamino užduočių sprendimais.**
2. **Studentas į egzaminą turi atsinešti ploną sąsiuvinį, skaičiuoklį, liniuotę, rašiklį, pieštuką.**

Antrojo semestro matematinės analizės mokymo tikslai (reikalavimai). Studentas privalo mokėti:

3. Integralas

3.1. Neapibrėžtinis integralas

1. Apibrėžti pirmykštę funkciją ir įrodyti jos savybes.
2. Apibrėžti neapibrėžtinį integralą ir įrodyti elementarias jo savybes.
3. Įrodyti bet kurią integralų lentelių formulę.
4. Keisti kintamuosius (pažymint naują kintamąjį ir nepažymint jo kita raide).
5. Integruoti dalimis.
6. Išdėstyti racionaliąsias trupmenas paprastosiomis ir jas suintegruoti.
7. Išvesti Eulerio keitinius.
8. Apibrėžti hiperbolines funkcijas ir išvesti jų bei jų atvirkštinių funkcijų savybes.
9. Integruoti racionaliuosius reiškinius su trigonometrinėmis (ir hiperbolinėmis) funkcijomis.

3.2. Apibrėžtinis integralas. Įvadas

1. Paaiškinti Isaak Barrow brėžinį, siejantį ploto ir liestinės sąvokas.
2. Suformuluoti ir taikyti apibrėžtinio integralo teoremas:
   a) Niutono – Leibnico formulę,
   b) kintamųjų keitimo formulę,
   c) integravimo dalimis formulę.
3. Pateikti integravimo dalimis geometrinę interpretaciją.

3.3. Netiesioginis integralas

1. Paaiškinti sąvokas: ypatingieji integralo taškai, integralas konverguoja, integralas diverguoja, funkcija integruojama, funkcija neintegruojama.
2. Apskaičiuoti integralus $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$ ir $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$.
3. Įrodyti palyginimo teoremas.
4. Apibrėžti funkcijų ekvivalentiškumo sąvoką. Palyginti duotąją funkciją su laipsninėm funkcijom $\frac{1}{x^\alpha}, \frac{1}{(x-a)^\alpha}, \frac{1}{(a-x)^\alpha}$.
5. Apibrėžti Eulerio gama ir beta funkcijas

$$\Gamma(x)=\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt,\ \mathrm{B}(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt.$$

Nustatyti šių funkcijų apibrėžimo sritis, įrodyti elementarias savybes $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$, $\Gamma(n+1)=n!$, $\mathrm{B}(x,y)=\mathrm{B}(y,x)$.

6. Suvesti integralus į gama ir beta funkcijas bei naudotis formulėmis $\mathrm{B}(x,y)=\dfrac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$, $\Gamma(x)\Gamma(1-x)=\dfrac{\pi}{\sin\pi x}, 0<x<1$.
7. Išvesti kreivės ilgio formulę, kai kreivė nusakyta išreikštiniu bei parametriniu būdu.
8. Apibrėžti apskritimo lanko funkcijas $t=yarc(y)=\int_0^y \dfrac{du}{\sqrt{1-u^2}}$, $t=xarc(y)=\int_x^1 \dfrac{du}{\sqrt{1-u^2}}$ ir ištirti jų savybes. Įsitikinti, kad jų atvirkštinės $x=xarc^{-1}(t)$ ir $y=yarc^{-1}(t)$ sutampa su žinomomis funkcijomis $x=\cos t$ ir $y=\sin t$.
9. Įrodyti, kad integralas $\int_0^{+\infty}\dfrac{\sin x}{x}dx$ konverguoja, o integralas $\int_0^{+\infty}\dfrac{|\sin x|}{x}dx$ diverguoja.
10. Apibrėžti integralo absoliutaus ir reliatyvaus konvergavimo sąvokas. Parodyti ryšį tarp šių sąvokų.

3.4. Apibrėžtinis Rymano integralas

1. Apibrėžti intervalo skaidinį (taškais ir intervalais).
2. Apibrėžti Rymano integralinę sumą, Darbu viršutinę ir apatinę sumas.
3. Apibrėžti skaidinio parametrą ir Rymano integralą.
4. Apibrėžti tolygaus tolydumo sąvoką. Pateikti pavyzdžių.
5. Įrodyti Kantoro teoremą (naudojantis Borelio baigtinio denginio lema).
6. Įrodyti Borelio baigtinio denginio lemą.
7. Suformuluoti pagrindinę Rymano integralo teoremą ir įrodyti, kad tolydi funkcija intervale $[a,b]$ yra integruojama Rymano prasme.

3.5. Apibrėžtinis integralas (tęsinys). Laiptinės funkcijos

1. Apibrėžti laiptinę funkciją. Įštirti laiptinių funkcijų erdvės $S[a,b]$ struktūrą.
2. Apibrėžti laiptinės funkcijos integralą ir įrodyti jo savybes (tiesiškumą, adityvumą, monotoniškumą ir kitas).
3. Aproksimuoti tolydžią funkciją laiptinėmis (tolygiojo konvergavimo metrikos prasme).
4. Apibrėžti funkcijos iš klasės $D[a,b]$ integralą. Patikrinti apibrėžimo korektiškumą.
5. Įrodyti funkcijų iš klasės $D[a,b]$ integralų savybes (daug).
6. Sukonstruoti konkrečioms funkcijoms laiptinių funkcijų sekas, tolygiai konverguojančias į duotąją funkciją ir apskaičiuoti jų integralus.
7. Interpretuoti konkrečias sumas kaip tam tikrų funkcijų integralines (Rymano ar Darbu) sumas ar tam tikrų laiptinių funkcijų integralus.

4. Eilutės bei sekos (funkcijų)

4.1. Skaičių eilutės

1. Apibrėžti skaičių eilutę ir susieti šią sąvoką su skaičių sekos sąvoka.
2. Suformuluoti Koši kriterijų skaičių eilutėms.
3. Įrodyti palyginimo teoremą skaičių eilutėms (su teigiamais nariais).
4. Įrodyti Koši ir Dalambero požymius.
5. Parodyti ryšį tarp šių požymių.
6. Įrodyti integralinį požymį. Ištirti harmoninių eilučių konvergavimą.
7. Įrodyti Leibnico teoremą.
8. Įrodyti Abelio dalinio sumavimo formulę.
9. Įrodyti Abelio – Dirichle teoremą.
10. Suformuluoti eilutės perstatos sąvoką ir Dirichle teoremą apie absoliučiai konverguojančių eilučių perstatas.
11. Įrodyti Rymano teoremą apie reliatyviai konverguojančias eilutes. Pateikti pavyzdžių.
12. Įrodyti eilučių sandaugos teoremą.

4.5. Funkcijų sekų ir eilučių tolygus konvergavimas

1. Apibrėžti funkcijų sekos konvergavimą pataškiui. Pateikti pavyzdžių.
2. Apibrėžti funkcijų sekos tolygų konvergavimą. Pateikti pavyzdžių.
3. Paaiškinti skirtumą tarp konvergavimo pataškiui ir tolygiojo konvergavimo.
4. Suformuluoti, ką reiškia, kad funkcijų seka nekoverguoja tolygiai intervale. Pademostruoti tai konkrečiais pavyzdžiais.
5. Paaiškinti ir skirti sąvokas "tolydus", "tolydžiai" ir "tolygiai". Pasakyti šias sąvokas įvairiomis užsienio kalbomis.
6. Įrodyti teoremą apie tolygiai konverguojančios tolydžių funkcijų sekos ribą.
7. Suformuluoti funkcijų sekoms Koši sąlygą. Suformuluoti ir įrodyti Koši kriterijų tolydžių funkcijų sekoms uždarame intervale $[a;b]$.
8. Performuluoti visas anksčiau minėtas sąvokas bei teoremas funkcijų eilutėms.
9. Įrodyti Vejerštraso teoremą apie funkcijų eilučių tolygų konvergavimą.
10. Suformuluoti tolygaus konvergavimo sąvoką atstumo tarp funkcijų kalba.

4.6. Laipsninės eilutės

1. Išvesti laipsninės eilutės konvergavimo spindulio formulę.
2. Suformuluoti ir įrodyti teoremą apie laipsninės eilutės konvergavimo pobūdį ir eilutės sumos tolydumą.
3. Įrodyti teoremą apie tolygiai konverguojančios funkcijų sekos integralų konvergavimą. Performuluoti šią teoremą funkcijų eilutėms (laipsninėms).
4. Įrodyti teoremą apie diferencijuojamų funkcijų sekų konvergavimą.
5. Įrodyti, kad išdiferencijuotos panariui laipsninės eilutės konvergavimo spindulys nepasikeičia ir kad galima laipsninę eilutę diferencijuoti panariui.
6. Įrodyti, kad laipsninės eilutės suma yra be galo diferencijuojama funkcija.
7. Įrodyti, kad laipsninė eilutė yra savo sumos Teiloro eilutė.

Paruošė R.Kudžma