VILNIAUS UNIVERSITETAS
MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETAS

Romualdas Kašuba

UŽDAVINIŲ SPRENDIMO PSICHOLOGINIAI ASPEKTAI

VILNIUS
2005

IEVAI

TURINYS

ĮŽANGA

Uždavinių sprendimo psichologiniai momentai

Ne paslaptis, kad aiškus galvojimas, nuo amžių labiausiai siejamas su matematika, ne visiems vienodai gerai sekasi ir todėl ne visi jį mėgsta. Sunkoka mėgti tai, kas tavo kaimynui geriau sekasi.

Ar galima mėgti ir norėti suprasti tai, kas iš karto nelabai sekasi ar truputį baugina? O čia dar tos iš visų pusių sklindančios kalbos, kad matematika tokia vertinga, ypatinga ir kone stebuklinga. Kas gi jau ten tokio ryškiai vertingo glūdi tose vienų skaičių ir raidžių pilnose formulėse, sudėtinguose brėžiniuose ir painokuose teoremų įrodinėjimuose? Kas ten jau tokio neprilygstamo, jeigu aš tai ne iš karto pagaunu?

Ir čia iš karto glūdi tam tikri psichologiniai spąstai: žmonės tiesiog pamiršta, kad tik jiems vieniems sunku. Jeigu man sunku, tai veikiausiai ir kitam bus nelengva.

Kai vienas didelis anglų matematikas pavarde Litlvudas, dar trynė universiteto suolą, tai kartą per kontrolinį jis negalėjo išspręsti tokių 2 uždavinių. Kažkaip netyčia jis pamatė, kad jo suolo draugas prie vieno iš tų uždavinių pasidėjo pliusą kaip prie išspręsto. Po akimirkos ir jau Litlvudas prie to uždavinio jau galėjo dėtis pliusą. Tik nepagalvok, skaitytojau, kad jis nusirašė nuo kaimyno.

Pradėsime nuo labai paprastų minčių ir kasdienių palyginimų arba nuo kinų žodžių, kad kelią įveikia einantysis.

Jei mes imtume kalbėti, kad virti skanią sriubą yra labai gražu, vėliau įsismaginę pridurtume, kad tai ne tik gražu, bet ir labai svarbu ne tik gastronomijai, skrandžio virškinimui, mūsų savijautai ir tuo pačiu pasaulio pažangai ir tinkamai visatos procesų raidai, tai pirmą pusvalandį mes to mielai klausytumės, ypač jei būtume senokai užkandę, bet dar po kokio pusvalandžio tokios kalbos mums pabostų ir pajaustume, kad čia kažko trūksta.

Jeigu mums kalba, kaip svarbu virti skanius barščius, tai gal kartu mums galėtų ir parodyti, kaip tai daroma ir kuo siūlomi barščiai pranoksta mūsų paskutinį kartą valgytus.

Mums galėtų atsakyti, kad tai visai paprasta, bet reikia virtuvės, viryklių, produktų, laiko ir kantrybės.

Visai panašiai yra ir su kalbomis apie tai, kaip naudinga ir išmintinga yra spręsti matematinius uždavinius, kaip svarbu gyvenime teisingai samprotauti ir logiškai mąstyti.

Nesiginčysime, kad ir kalbomis apie gerus barščius irgi galima kažką nuveikti, na kad ir apetitą sukelti, kitam ir pasiryžimas juos virti gali atsirasti.

Tačiau niekas mūsų neįtikins, kad geriausias būdas įtikinti, kad barščiai – jėga, yra išvirti juos visiems matant ir įpilti paragauti, kad kiekvienas galėtų tuo įsitikinti.

Panašiai yra ir sprendžiant kitus uždavinius, nesvarbu – gyvenimiškus, matematinius ar kitokius.

Sveikas protas ir gyvenimo patirtis liudija, kad

Geriausias būdas įtikinti mane, kad daryti gerą daiktą yra gerai, yra arba daryti tokį ar kitą panašų daiktą mano akyse, arba pasiūlyti man pačiam padaryti ką nors panašaus ar net ką nors geresnio.

Gal ir mes taip darykime ir darydami apie tai, ką ir kaip mes darome, kartu pamąstykime.

Taip ir Mažvydas sakė, ar pamenate?

„Broliai ir seserys, imkiet mane ir skaitykiet ir per tai skaitydami permanykiet.“

Taigi, jeigu norime išmokti spręsti uždavinius, tai geriausia **juos imti, pažinti ir spręsti mėginti.**

Galima būtų įsivaizduoti, jog kiekvienas gražesnis uždavinys kviečia mus išmėginti savo proto aštrumą ir užsispyrimą.

Čia nereikia didelio inventoriaus, kažin kokių ypatingų aplinkybių – užtenka popieriaus lapo, pieštuko ir blaivios galvos, trupučio užsispyrimo bei (kartais nemenkos) kantrybės.

Žmonės juk ne be reikalo sako, kad nuo užsispyrusio žmogaus vaistų nėra.

Pradėkime nuo tokio uždavinio, siūlyto prieš kokį dešimtį metų Latvijos Olimpiados penktoje ar šeštoje klasėje.

Norėtume nedelsdami paprašyti skaitytojo, kuris gal aukštuosius mokslus yra perkrimtęs, nežiūrėti iš aukšto į paprastus, arba, mūsų žodžiais tariant, penktokų uždavinius, nes jie nėra tokie paprasti – nei penktokai, nei jų sprendžiami uždaviniai.

Taigi net drįstume apskritai suformuluoti ir priminti, matyt, patį svarbiausią arba pirmąjį bendravimo psichologijos dėsnį

Nelaikyk kito kvailesniu už save.

I SKIRSNELIS
LATVIŠKI SEPTYNETO KARTOTINIAI IR JŲ SKAITMENŲ SUMOS

Visi mūsų sprendžiami uždaviniai bus tokie, kuriuos suprasti gali kiekvienas to norintis ir šiek tiek laiko turintis žmogus.

Vieni jų bus lengvesni, kiti gal ir sunkesni ar paslaptingai atrodantys, bet visi jie yra tokie, kuriems įveikti nereikia jokių specialių žinių, prašokančių tai, ko mus mokė mokykloje.

Ir nors jie prieinami kiekvienam žmogui, kai kurie iš buvo sprendžiami net tarptautinėse ar pasaulinėse Olimpiadose.

Sakoma, kad nuo didingo iki juokingo vienas žingsnis.

Kai kada vienas žingsnis yra ir nuo paprasto iki sudėtingo uždavinio – skaitytojas dar turės progų tuo įsitikinti.

Lai tai negąsdina skaitytojo.

Žmogui paprastai prieinama daug daugiau, negu jis įsivaizduoja.

Reikia tik ramiai rikiuoti mintis ir ieškoti tiesos.

Yra situacijų, kai profesionalas nuo mėgėjo tesiskiria tik tuo, kad profesionalas žino viena smulkmena daugiau, o kitkuo jie yra visiškai vienodi.

Tačiau toji smulkmena dažniausiai būna lemiama.

Bet juk ir mes galime ją suvokti.

Ne (vien) šventieji puodus lipdo.

O apskritai niekam nekelia abejonių, kad **spręsti uždavinį ir ieškoti tiesos yra tas pats.**

Tuoj bus tas žadėtas latviškas uždavinys – mes tik sustyguosime jį klausimais ir pradėdami nuo visiškai paprastų eisime prie painesnių dalykų.

Imame bet kurį sveiką teigiamą skaičių, kuris dalijasi be liekanos iš 7 ir suskaičiuojame visų jo skaitmenų sumą. Sakysime, jeigu tas skaičius būtų 147, tai jo skaitmenų suma būtų 1 + 4 + 7 = 12.

Kadangi su skaičiaus n skaitmenų suma susiduriame labai dažnai, tai tą skaitmenų sumą sutariame žymėti trumpai S(n).

Štai pirmieji paprasti klausimai apie iš 7 besidalijančių skaičių skaitmenų sumas:

1. Ar tokio iš 7 besidalijančio skaičiaus, labai dažnai vadinamo ir 7 kartotiniu, skaitmenų suma galėtų būti lygi 10?

2. Ar tokia suma galėtų būti lygi 100?

Kiti du klausimai jau kiek painesni:

3. Ar 7 kartotinio skaitmenų suma gali būti 2005?

4. Kokia yra pati mažiausia įmanoma iš 7 besidalijančio skaičiaus skaitmenų suma?

Galiausiai seka apibendrinantis filosofinis klausimas:

5. Kurie skaičiai gali būti iš 7 besidalijančių skaičių skaitmenų sumomis, o kurie ne?

Šiame uždavinyje susiduriame su keliais psichologiniais momentais – nes nėra nors kiek įdomesnio uždavinio, kuris nesukeltų taip pat ir psichologinių problemų ar sunkumų: galynėtis su uždaviniu visada pamokoma ir permaininga, labai įdomu ir prasminga - ypač jei pasiseka išspręsti uždavinį iki galo arba rasti tą tiesą, kurią buvome prašomi rasti.

Taigi kokie čia psichologiniai aspektai pirmiausiai iškyla prieš akis?

Iš karto matome, jog uždavinys yra keliapakopis.

Iš pradžių mūsų klausia kažko visai paprasto, beveik akivaizdaus.

Kodėl tai daroma?

Matyt mus nori įtraukti į veiksmą, nori sudominti, gal paliesti mūsų mąstymo, vaizduotės ar ambicijos stygas. O mūsų mąstymas, vaizduotė, ambicija yra labai subtilus instrumentas, ir tos stygos mumyse kartais skamba labai garsiai, dažnai metų metais ar net visą gyvenimą, na, kol netingime galvoti.

Matyt, uždavinio sudarytojai tikisi, kad ir mes, kartą pradėję, eisime iki galo – visai kaip šaunioje Kazio Binkio poemoje patarė Tamošius Bekepuris: „Ką pradėjai, dirbk ir baiki, nors tenai ir kažin kas“.

Na tai gal ir mes pradėkime.

Taigi - gali ar negali besidalijančio iš 7 skaičiaus skaitmenų suma būti 10?

Imkime iš eilės keletą pirmųjų iš 7 besidalijančių skaičių, kuriuos matematikai vadina septyneto kartotiniais:

7, 14, 21, 28.....,

ir jau matome, kad tokį skaičių, kurio prašo pirmoji, įviliojančioji uždavinio dalis, jau radome, tai 28, nes jau pirmoje klasėje visiems amžiams suvokėme, kad 2 + 8 = 10.

Dabar galėtume tęsti tą eilę, kurią ką tik pradėjome, arba imti

35, 42, 49, 56, 63, 70, 77, 84, 91, 98....

Matome, kad septyneto kartotinių skaitmenų sumos

7, 5, 3, 10, 8, 6, 13, 11, 9, 7, 14, 12, 10, 17,

kad ir banguojančiai, bet didėja.

O gal galima kitaip, kaip nors greičiau, nes taip mes negreitai iki 100 prieisime. O dar metų skaičius 2005 laukia.

Galima, ir dabar pakaktų kad ir atminties apie daugybą stulpeliu ar dalybą kampu proveržio.

Jeigu mes prie skaičiaus 28 „priaugintume“ arba prirašytume jį patį, tai gautume skaičių 2828. Kaip jūs manote, ar „suklijavus“ du tokius 28-tus, arba „klonavus“ 28, pailgėjęs skaičius nepametė dalumo iš 7?

Savaime aišku, kad nepametė, nes panašiai kaip $28 = 7 \times 4$, taip ir $2828 = 7 \times 404$, o $282828 = 7 \times 40404$ ir t.t., vadinasi iš 7 tikrai dalijasi. O skaičiaus 2828 skaitmenų suma jau 20. O mums kiek reikia? Mums reikia, kad skaitmenų suma būtų 100. Na, tai pratęskime „priauginimą“ - dalumo iš 7 juk neprarandame.

Taigi turime kad ir didoką, bet aiškios darybos skaičių

28 282 828 282 828 282 828,

kurio skaitmenų suma yra 100, kuris dalijasi 7, nes panašiai kaip ir anksčiau galima parašyti, kad

$$28\,282\,828\,282\,828\,282\,828 = 7 \times 4\,040\,404\,040\,404\,040\,404.$$

Taip susitvarkėme su antruoju uždavinio klausimu ir dabar jau nesunkiai suvokiame, kad kiekvienas nuliu besibaigiantis sveikas teigiamas skaičius yra kažkurio septyneto kartotinio skaitmenų suma.

Tačiau 2005 ne toks, jis nuliu nesibaigia.

Ką daryti?

Dar kartą pažiūrėję į pirmuosius 7 kartotinius arba į skaičius 7, 14, 21, 28, matome, kad jau antrojo 7 kartotinio arba skaičiaus 14 skaitmenų suma yra $1 + 4 = 5$, todėl jeigu imsime jį „priauginti“ arba suklijuoti skaičiaus 14 kopijas, tai suklijavę 14 tik 401 kartą, gausime jau 802-ženklį skaičių

141414....14,

besidalijantį iš 7 su 2005 lygia skaitmenų.

Jau įpusėjome ir prisikasėme iki pagrindinių klausimų - kokia apskritai yra pati mažiausia 7 kartotinio skaičių suma ir ką apskritai įmanoma gauti?

Klijavimo patirtis kužda mums, jeigu jei galėtume rasti tokį iš 7 besidalijantį skaičių, kurio skaitmenų suma yra 1, tai klijuodami arba klonuodami tokį skaičių, gautume, kad kiekvienas natūralusis skaičius yra iš 7 besidalinančio skaičiaus skaitmenų suma.

Deja, su ta vienetui lygia 7 kartotinio skaitmenų suma nieko neišeina – tokias sumas turi tik vienetas su nuliais arba skaičiai

1, 10, 100, 1000, 10000, ...

Deja, tokie skaičiai tesidalija tik iš vieno ar kelių dvejetų ar penketų bei jų sandaugų, bet jau niekaip iš 7.

Todėl iš 7 besidalijančio skaičiaus skaitmenų suma negali būti lygi vienetui.

Galime tą patį gauti ir kitaip, nelyginant konstruktyviau.

1 yra mažesnis už 7, iš jo nesidalija ir, žinoma, yra mažiausia galima dalybos iš 7 liekana. Toliau, kadangi $10 = 7 + 3$, tai 10 dalybos iš 7 liekana yra 3, toliau $100 = 14 \times 7 + 2$, vadinasi, 100 dalybos iš 7 liekana yra 2. Jau pasitaikė 3 skirtingos dalybos iš 7 liekanos: 1, 3 ir 2.

Jei dar ir skaičių 1000, 10000 ir 1000000 dalybos iš 7 liekanos bus skirtingos, nes ir tie skaičiai, matyt, iš 7 nesidalys, tai vėliausiai po 4 dalybos veiksmų liekanos ims kartotis, viskas „užsiciklins“ ir 1 jau su bet kokiu nulių skaičiumi niekada iš 7 nesidalys.

Taip ir nutinka, nes 1 000 = 142 × 7 + 6, vadinasi, naujoji dalybos iš 7 liekana yra 6, toliau 10 000 = 1 428 × 7 + 4 (liekana 4) ir galiausiai 100 000 = 14 285 × 7 + 5 (liekana 5) ir dabar jau visos galimos liekanos jau buvo ir todėl jos neišvengiamai pradės kartotis, nes

$$1\,000\,000 = 142\,857 \times 7 + 1.$$

Taip mes dviem būdais įsitikinome, kad skaičiai, užrašomi vienetu su nuliais, iš 7 nesidalija, todėl jokio skaičiaus 7 kartotinio skaitmenų suma nėra lygi vienetui.

Sekanti „kukli“ galima 7 kartotinio skaitmenų suma galėtų būti 2, tik gal ir jos nepavyks gauti?

Kaip atrodo skaičiai, kurių skaitmenų suma lygi 2?

Tai gali būti skaičiai, prasidedantys dvejetu su tolimesniais nuliais, pavyzdžiui, 20 000. Tokie skaičiai dalintis iš 7 vėl negali, nes jie, kaip ir vienetas su nuliais, dalijasi tik iš vieno ar kelių dvejetų, vieno ar kelių penketų bei jų sandaugų.

2 lygią skaitmenų sumą taip pat turi ir skaičiai, kurių užraše yra du vienetai, sakysime, 101 000. Nuliai po antrojo vieneto dalumui iš 7 jokios įtakos neturi, todėl galima sakyti, kad ieškoti reikia tarp skaičių, kur tarp 2 kraštinių vienetų įterpta nulių.

Todėl mes mėginsime dalyti kampu vienetą su nuliais, laukdami tos valandos, kai tarpinio veiksmo liekana pasirodys 2, tada viršuje ir parašysime tą antrąjį 1, tuoj pat nusikelsime jį į apačią, ten tada bus 21 ir tada „pasidalins“.

Šiuo atveju taip atsitinka labai greitai, po antrojo tarpinio veiksmo:

$$\begin{array}{l} 1001 \;\; /\underline{7} \\ \underline{\;7\;\;\;\;}\,143 \\ \;30 \\ \;\underline{28} \\ \;\;\;21 \\ \;\;\;\underline{21} \\ \;\;\;\;\;0 \end{array}$$

Taigi iš 7 besidalijančio skaičiaus skaitmenų suma gali būti lygi 2, o kadangi tokia suma negali būti lygi 1, tai pati mažiausia galima 7 kartotinio skaitmenų suma yra 2 ir tuo pačiu yra atsakyta į priešpaskutinį uždavinio klausimą.

Beliko išsiaiškinti, kokias sumas apskritai galima gauti?

Pirmiausiai pastebėkime 1001 galima „priauginti“ prie jo paties ir vėl gauti iš 7 dalius skaičius 10011001, 100110011001, 1001100110011001,... su skaitmenų sumomis atitinkamai 4, 6, 8,.. arba matome, kad kiekvienas lyginis skaičius yra iš 7 besidalijančio skaičiaus skaitmenų suma.

Baigiamąjį sprendimo akordą pradedame prisimindami, kad 21 dalijasi iš 7, o jo skaitmenų suma yra 3. Dabar imsime „lipdyti“ 21 su 1001 blokais. Taip darydami neprarandame dalumo iš 7 (tie, kas pradinę mokyklą baigė be skaičiuoklių rankose, tai jaučia „už kilometro“ – sudėties, atimties ir daugybos stulpeliu bei dalybos kampu pratimai palieka savo pėdsaką).

Taip priaugindami prie 21 vis daugiau 1001, imame gauti skaičių 21, 211001, 2110011001, 2100110011001,... virtinę su skaitmenų sumomis 3, 5, 7, 9, ... arba matome, kad taip galime gauti visus nelyginius skaičius (išskyrus, žinoma, vienetą).

Todėl globalus atsakymas į mūsų uždavinį būtų toks: kiekvienas sveikasis teigiamas skaičius, išskyrus 1, yra iš 7 dalaus skaičiaus skaitmenų suma.

Kelios filosofinės mintys po dalumo iš 7 uždavinio

Spręsdami šį uždavinį mes elgėmės lygiai taip pat, kaip ir kurdami bet kurio mokslo teoriją, kur iš pradžių yra kaupiami faktai ir eksperimentiniai duomenys (ir mes žiūrėjome, kokias skaitmenų sumas turi pirmieji iš 7 besidalantys skaičiai), toliau, remiantis tam tikromis idėjomis ar veiksmais (mūsų atveju skaičių „priauginimu“, dalyba kampu), gaunami tam tikri tarpiniai rezultatai ir daromos išvados (mūsų atveju buvo nustatyta, kad bet kuris skaičius, išskyrus 1, yra 7 kartotinio skaitmenų suma).

Kas vyksta toliau? Toliau sukurtoji teorija paprastai kelia naujus uždavinius. Paprastai gera teorija tokių klausimų prikelia daugiau negu reikia. Matematikai kalba, kad viena išspręsta problema pagimdo bent 10 naujų.

O mūsų atveju? Nejaugi toks kuklus uždavinys gali „prigeneruoti“ dar daug ko nors?

Atsakymas: žinoma, gali. Pavyzdžiui,

1. Kokiais skaičiais galima pakeisti skaičių 7, kad atsakymas liktų toks pat?
2. Kokios sveikųjų teigiamų skaičių aibės gali būti tiksliai lygios visų iš kokio nors skaičiaus besidalijančių skaičių skaitmenų sumomis?

Panašių uždavinių galima suformuluoti daugybę – tik spėk suktis į jas atsakinėdamas.

Uždavinys skaitytojui.

1. (II Lietuvos jaunesniųjų klasių moksleivių olimpiada, 2000 m.). Kokia gali būti iš 23 besidalinančio skaičiaus skaitmenų suma?
2. O koks būtų atsakymas, jeigu imtume 99? 5? 101?

II SKIRSNELIS
NEPASTEBIMI VIRPTELĖJIMAI ARBA MIKROJUDESIAI

Dažnai mes apie ką nors sakome, kad tai tokia smulkmena, apie kurią ir kalbėti nesinori, jau tokia smulkmena, kad vos gali ją įžiūrėti.

Čia būtų galima priminti, kad alpinistui kopiant į stačią kalno viršūnę ir vos įžiūrimas kauburėlis ar kokia nedidelė atbraila gali turėti lemiamos reikšmės: pamatęs jį, kopiantysis gali toliau judėti aukštyn ir galiausiai pasiekti tikslą, o jeigu nėra už ko užsikabinti, tai žygis gali sustoti.

Pasižiūrėkime tokį uždavinį, kurį paskutinį kartą teko matyti 2004 metų Minsko olimpiadoje. Jį sprendė septintokai.

Turime penkis natūraliuosius skaičius. Apie juos yra žinoma tiek, kad sudėjus juos visais galimais būdais po tris, gautume 7 skirtingas sumas, o sudėję visais galimais būdais po keturis gautume 5 skirtingas sumas. Reikia įrodyti, kad visų tų penkių skaičių suma dalijasi iš 5.

Pamėginkime čia ką nors įsivaizduoti.

Duokime tiems 5 skaičiams vardus a, b, c, d ir e. Tada visos galimos sumos po keturis yra $a + b + c + d$, $a + b + c + e$, $a + b + d + e$, $a + c + d + e$ ir $b + c + d + e$.

Sąlygoje pasakyta, kad jos visos yra skirtingos.

Tada pirmoji išvada būtų, kad ir visi tie skaičiai yra skirtingi, kitaip kurios nors 2 sumos po keturis sutaptų.

Todėl galime laikyti, kad $a < b < c < d < e$.

Antroji išvada yra tokia: jeigu dėliodami visais galimais būdais po tris gauname 7 skirtingas sumas, tai ir dėliodami po du skaičius irgi turėsime 7 skirtingas sumas.

Tačiau a, b, c, d ir e dėliodami po du, turime tokias galimybes: $a + b$, $a + c$, $a + d$, $a + e$, $b + c$, $b + d$, $b + e$, $c + d$, $c + e$ ir $d + e$, arba iš viso 10 galimybių.

Vadinasi, kai kurios iš jų sutampa. Pamėginkime išskirti tokias, kurios garantuotai skiriasi.

Aišku, kad $a + b < a + c < a + d < a + e < b + e < c + e < d + e$. Jau turime 7 skirtingas sumas, vadinasi, likusios neminėtosios turi sutapti su kažkuriomis nurodytomis sumomis.

Nenurodytose sumose nėra nei a, nei e: tai sumos $b + c$, $b + d$ ir $c + d$, kurios aiškiai rikiuojasi pagal didumą $b + c < b + d < c + d$.

Su kuria suma gali sutapti b + c? Ji didesnė už antrąją sumą a + c ir yra bent trečia pagal didumą. O $c + d$ yra mažesnė už šeštąją sumą $c + e$ ir pagal didumą yra daugiausiai penkta. Vadinasi, $b + c$ yra trečia, $b + d$ ketvirta ir $c + d$ penkta, t.y.

$b + c = a + d$, $b + d = a + e$ ir $c + d = b + e$, todėl

$b – a = d – c = e – d = c –$ b arba visų gretimų skaičių skirtumai yra vienodi, arba kitaip tariant, mes susidūrėme su gana gerai pažįstama aritmetine progresija.

Bet čia net nebūtinai reikia būti girdėjus apie aritmetinę progresiją, tą vienodai didėjančių skaičių virtinę. Iš lygybės $d – c = c – b$ išplaukia, kad $b + d = 2c$, o iš $b – a = e$ – d išeina, kad $a + e = b + d = 2c$, arba

$$a + b + c + d + e = (a + e) + (b + d) + c = 5c$$

taigi toji suma tikrai dalijasi iš 5.

Tiems, kurie norėtų patys ką nors panašaus nuveikti, siūlome uždavinį, spręstą toje pačioje Olimpiadoje klase aukščiau.

Ar galima skaičių 2004 užrašyti kelių skirtingų dėmenų suma taip, kad dėliodami tuos dėmenis visais galimais būdais po 2, gautume lygiai 7 skirtingas sumas.

Aukštesnėse klasėse buvo dar kelios gražios šios idėjos variacijos.

Duota 100 skirtingų realiųjų skaičių. Yra žinoma, kad pats mažiausias iš jų yra 0,08, pats didžiausiais – 40, o dėliodami tuos kaičius visais galimais būdais po 2, gautume197 skirtingas sumas. Raskite duotųjų 100 skaičių sumą.

Ir dar vieną, jau visai rimtoką uždavinį.

Raskite patį didžiausią ir patį mažiausią natūralųjį skaičių n tokį, jog būtų galima nurodyti n tokių skirtingų realiųjų skaičių, kad juos sudėję visais galimais būdais po 2 gautume 2004 skirtingas sumas.

O štai dar keletas dar paprastesnių už ką tik išnagrinėtą uždavinį pratimų. Pavadinkime jį tiesiog taip:

III SKIRSNELIS
5 NEŽINIUKO PAŠTO ŽENKLŲ ALBUMAI

Nekantrusis Nežiniukas žavisi Skandinavijos valstybėmis – Danija, Švedija, Norvegija, Suomija ir Islandija – ir ką tik pradėjo rinkti jų ženklus. Kadangi kiekvienos šalies ženklų jis jų turi po nedaug, tai vieną vakarą, kad tų ženklų atrodytų esą daugiau, jis suskaičiavo, kiek yra kiekvienos galimos šalių porų ženklų. Jis su nuostaba pamatė, kad teišeina tik 3 skirtingos sumos – arba 13, arba 18, arba 23 ženklai.

Su ta žinia jis nulėkė pas kaimyną Žiniuką ir paklausė, ar taip gali būti? Ir šyptelėjęs pridūrė:

– O gal tu, Žiniuk, žinodamas tuos 3 skaičius, galėtum pasakyti, kiek ženklų yra kiekviename iš 5 mano albumų?

Uždavinys ir paprastas, ir įdomus, ir yra ką veikti ir net nepatogu užsiminti, kad jis per sunkus.

Pirmiausiai Žiniukas suprato, jog visų 5 Skandinavijos kraštų ženklų skaičius negali būti skirtingas, nes tokiu atveju skaičiuojant valstybių ženklus poromis visais galimais būdais, būtų daugiau skirtingų atvejų, negu kad dabar esantys 3.

Pastaba. Skaitytojas turbūt suprato, kad Žiniukas dėl nedidelio ženklų skaičiaus galėtų tiesiog dirstelėti į kiekvieną albumą atskirai, bet Žiniukas ne iš tų žmonių, kurie praleistų progą pasamprotauti.

Iškart po to Žiniukas suvokė, kad tik 3 pasitaikiusios skirtingos sumos sako, jog sutampa ne vienos, o mažiausiai dviejų valstybių ženklų skaičius.

Tikrai, jeigu būtų keturios valstybės su skirtingu ženklų skaičiumi $a < b < c < d$, tai būtų ir 5 skirtingos sumos po du $a + b < a + c < a + d < b + d < c + d$, o skirtingų sumų tėra tik 3.

Vadinasi, gali būti daugiausiai 3 valstybės su skirtingu ženklų skaičiumi.

Vadinasi, arba yra dvi poros valstybių su vienodu ženklų skaičiumi, arba trys valstybės su vienodu ženklų skaičiumi.

Pirmoji galimybė neįmanoma, nes skaičiuodami jų ženklus kartu, turėtume gauti 2 lyginius skaičius, o tuo tarpu iš skaičių 13, 18 ir 23 tik vienas skaičius 18 yra lyginis. Vadinasi, lieka tik atvejis, kad 3 valstybės turi vienodą ženklų skaičių Nežiniuko albumuose.

Kadangi dedant kartu tokių valstybių ženklus turime gauti lyginį skaičių, o jis yra tik vienas – 18, o todėl Nežiniukas turi 3 Skandinavijos valstybių po 18 : 2 = 9 ženklus, vadinasi, ketvirtos valstybės ženklų jis turi 13 – 9 = 4, o penktos – 23 – 9 = 14.

Matome, kad su tokiu nedideliu ženklų skaičiumi laikytis principų Nežiniukui vis tiek reikėjo parodyti truputėlį aritmetinio sumanumo.

IV SKIRSNELIS
IR KOKIOS YRA MANO GALIMYBIŲ RIBOS?

Kokios yra mano galimybės? Ar jos didelės? Kur jų ribos? Ar galima tas ribas praplėsti? Ką aš galiu padaryti, kad jos būtų didesnės? Ką vienoje ar kitoje situacijoje įmanoma nuveikti? O kodėl to ar ano negalima padaryti? Kaip tai pajusti? Pajutus, kaip tuo įsitikinti? Įsitikinus, kaip tai įrodyti?

Šie paprasti amžini klausimai nuo senų senovės kaitino žingeidžių žmonių vaizduotę ir akino juos galvoti ir ieškoti, nerimauti ir svajoti, mesti viską į šalį ir apsisukus vėl griebtis to paties.

Matematika teikia beveik neribotas galimybes pasitreniruoti besiaiškinant, kas galima ir kas neįmanoma.

Pradėkime nuo paprastučio vaizduotės lavinimo pratimo, arba nuo uždavinio, kuris Lietuvos delegacijos siūlymu buvo sprendžiamas 2003 metų Tarptautiniame

„Kengūros“ konkurse, vykstančiame kiekvienų metų trečiąjį kovo ketvirtadienį dabar jau 3 kontinentuose ir kuriame dalyvauja per 3 milijonus moksleivių.

Štai paprasta jo sąlyga.

Kiek daugiausiai iš eilės einančių natūraliųjų skaičių įmanoma parašyti, kad nė vieno iš jų skaitmenų suma nesidalytų iš 5?

Pradžioje į galvą prisistato mintis, kad iš penkių iš eilės einančių sveikųjų teigiamų skaičių vienas (ir tik vienas) dalijasi iš 5. Tačiau čia mes kalbame ne apie skaičiaus, bet apie jo skaitmenų sumos dalumą iš 5. Negi dėl to kas nors pastebimai keisis?

Jeigu padarytume paprastą eksperimentą ir paimtume pirmus 5 iš eilės einančius sveikuosius teigiamus skaičius ir pasižiūrėtume, kas ten gali dėtis, tai pamatytume, kad gali dėtis skirtingi dalykai.

Sakysime, paėmę 24, 25, 26, 27 turėtume pavyzdį, kad gali pasitaikyti keturi tokie iš eilės einantys skaičiai – nes prieš 24 eina 23 su 5 lygia skaitmenų suma, o po 27 eina 28 su skaitmenų suma 10 – taigi irgi iš 5 besidalanči skaitmenų suma.

Taigi galima rasti 4 iš eilės einančius skaičius su iš 5 nesidalijančia skaitmenų suma.

Tokių iš eilės einančių skaičių gali būti ir mažiau negu 4, pavyzdžiui, 88, 89 ir 90 nes ir 87, ir 91 jau turi iš 5 besidalijančią skaitmenų sumą, o **gali būti ir daugiau negu 4,** sakysime, pavyzdyje su skaičiais 97, 98, 99, 100, 101, 102 ir 103 jų yra net 7.

Tad kiek daugiausiai tokių skaičių su iš 5 nesidalijančia skaitmenų suma gali eiti iš eilės?

Atsakymas labai paprastas ir jį pakužda mums vienas paprastas pastebėjimas.

Jeigu mes turėtume 5 iš eilės einančius vienos ir tos pačios dešimties skaičius, tokius kaip 12, 13, 14, 15 ir 16, tai kadangi jų skaitmenų suma padidėja kaskart vis po vienetą, tai vieno kurio iš tų 5 iš eilės einančių skaičių skaitmenų suma tikrai dalintųsi iš 5 – todėl kategoriška išvada yra tokia – **esama ne daugiau kaip 4 vienos ir tos pačios dešimties skaičių, kurių skaitmenų suma nesidalija iš 5**. Todėl po keturių skaičių norint eiti toliau, kad skaitmenų suma nesidalytų iš 5, reikia „ristis“ į kitą dešimtį, kur gerai „atsiritus“ rastųsi galimybė rasti dar keturis skaičius su iš 5 nesidalijančia skaitmenų suma.

Taigi galima turėti daugių daugiausiai 8 tokius iš eilės einančius skaičius, kurių skaitmenų suma nesidalija iš 5.

Liko surasti tokį pavyzdį. O jis čia pat, nes tinka skaičiai

6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 ir 13.

Klausimas: O kiek mažiausiai galėtų būti tokių skaičių? Pavyzdys su 3 skaičiais (88, 89 ir 90) jau buvo pateiktas.

Ar galėtų jų būti mažiau?

2. O jeigu vietoje 5 imtume 6, kaip tada?

3. O jeigu imtume 9?

4. O su 11 kaip?

Galima pasiūlyti tarptautinės Komandinės „Baltijos kelio“ olimpiados uždavinį kur klausiama, kiek daugiausiai iš eilės einančių skaičių galima rasti, jeigu jų skaitmenų suma nesidalija iš 13? Ten yra ir darbo, ir keli netikėtumai, nes aplinkybės pasikeičia, nes 11 ir 13 „prašoka“ ištisos dešimtinės ilgį ir padėtis nuo to keičiasi iš esmės.

V SKIRSNELIS
DIDELIŲ SKAIČIŲ BAIMĖS MAŽINIMAS

1. Karvių ganymas ir skaičių dauginimas

Pirmoji skaitytojo reakcija į klausimą **„Ar Tu bijai didelių skaičių?“** turbūt būtų tokia: **„Nieko aš nebijau, ko ten bijoti**". Tada mes galėtume klausimą pasukti kitu kampu ir pasiteirauti, kokią bandą paprasčiau ganyti, ar tokią, kurioje yra 5 ramios karvės, ar kur 50 pašėlusių jaučių. Žinoma, ir dabar galimi puikūs poetiniai atsakymai, kad man, girdi, kuo daugiau ir kuo smarkesnių gyvulių, tuo įdomiau, tuo didesnis iššūkis ir taip toliau, kol iki neprieitume prie realios siautėjančios bandos.

Žinoma, kad didesnis iššūkis, tik kaip bežiūrėsi, jei nesi ganęs mažų ramių viščiukų, tai nesuvaldysi gausių tabūnų, arba: viskas prasideda nuo mažų dalykų, ne be reikalo sakoma – nuo adatėlės prie kumelėlės – tik, tiesą kalbant, čia kalbama apie kitokias veiklas.

Bet pats paradoksalus principas, kad mažas yra didelio tėvas, išlieka.

Nes yra tekę skaityti tokį anglišką posakį: „The child is the father of the man.“

Tai apie tą patį.

Kad prablaškytume skaitytoją, užminsime jam angliškai kitą mįslę: Koks yra pats ilgiausias angliškas žodis.

Neabejojame, kad atsakymas mūsų skaitytoją, belaukiantį visiems mums truputį girdėto lietuviško „bekiškiakopūstėliaudamas“, turėtų gerokai priblokšti – kaip rimtos tautos įsižiūri į savo raštijos plyteles abėcėlės raideles.

Atsakymas yra toks: ilgiausias angliškas žodis yra „smiles“.

Kodėl, paklausite jūs, juk jame tik 6 raidės, sakysime kad ir žodis „beautiful“ yra 1,5 karto ilgesnis – jame 9 raidės.

Pateiksime atsakymą angliškai ir viskas bus aišku: **„Because it is a mile between its first and last letter“.**

Gal skaitytojas dar norėtų paspėlioti, kurios dvi anglų abėcėlės raidės turi akis?

Po lyrinio intarpo grįžkime į skaičių pasaulio tikrovę – arba kaip sumažinti skaičius nepametant uždavinio intrigos. Mums rūpi, kad situacija būtų kuo labiau apžvelgiama, kad ją galėtume iki kaulo smegenų perprasti ir tada nuo kelių ramių avelių grįžti prie lekiančių tabūnų.

Įsivaizduokite, kad mums siūlo panagrinėti tokią problemą ir klausia, taip sakant, "bendru atveju":

Imkime bet kokius du sveikuosius teigiamus skaičius n ir k (kurie, neslėpkime to, būna ir kosmiškai dideli) ir paklauskime, ar visada atsiras toks trečias sveikas teigiamas skaičius a, kad kiekvieno iš skaičių

$$a, 2a, 3a, \dots, (n-1)a \text{ ir } na$$

skaitmenų suma dalytųsi iš k?

Pradžioje, kaip visada, sunkiau išsijudinti, nes reikia nors kiek "įsijausti“ ar „įsigyventi“ į uždavinio sąlygą, bent jau tiek, kad suprastume, kokie ten galimi sunkumai, arba, poetiškiau kalbant, kuo ten „patepta“?

Šiuo atveju pavyksta esmingai suprastinti sąlygą, išsaugant visą uždavinio intrigą.

Sakykime, vietoje kažkokio nieko konkretaus nesakančio, didelio ir todėl bauginančio skaičiaus n, galima imti konkretų mažą, įprastą skaičių, pavyzdžiui, kad ir

10, o vietoje k imti dar konkretesnį, nes dar mažesnį skaičių 2, ir klausti, ar tuoj atsirastų toks sveikas teigiamas skaičius a, kad visų dešimties skaičių

$$a,\ 2a,\ 3a,\ 4a,\ 5a,\ 6a,\ 7a,\ 8a,\ 9a \text{ ir } 10a$$

skaitmenų suma dalytųsi iš 2, t.y. būtų lyginė.

Na, čia tikrai sunku nepataikyti, nes patikrinę keletą pirmųjų skaičių įsitikiname, kad jau su11 viskas yra, kaip prašyta, nes visų 10 skaičių

11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99, 110

skaitmenų sumų lyginumas yra daugiau negu akivaizdus.

O jeigu pageidautume 20-ties tokių skaičių, tai tęsdami būtent 11 kartotinių seriją toliau turėtume

121, 132, 143, 154, 165, 176, 187, 198

ir, deja, nors jau tiek mažai betrūksta, nes parašėme jau 18 skaičių ir betrūksta vos poros skaičių iki reikiamų 20-ties, bet sekančiu žingsniu turėsime rašyti skaičių 209, o jo skaitmenų suma $2 + 0 + 9 = 11$ tikrai nelyginė.

Taigi buvome per 2 žingsnius nuo laimės.

Kita vertus, nenuostabu, kad su didesniu skaičiumi yra sunkiau.

Tačiau ilgiau pasikrapštę susirandame skaičių 101, kurio kartotiniai yra 202, 303, 404, 505, 606 ir dabar ilgai bus gerai - iki pat $101 \times 99 = 9\,999$ aišku, toliau eina 10 100, 10201, 10302,…, 10908, o dabar 11009 jau vėl turi nelyginę skaitmenų sumą, taigi geri būtų, jei prireiktų, pirmieji 109 skaičiai.

O kaip, jeigu reikėtų surasti 1000 tokių skaičių. Skaitytojau, ar jau supratai, ką reikėtų daryti?

Kaip mums reikėjo 100 skaičių, tai pakako 2 vienetus perskirti vieninteliu nuliu. Prireikus galima tuos 2 vienetus nuliais galima ir labiau atskirti.

Jeigu supratote, kaip elgtis su 1 000 skaičių, tai suprasite ir ką daryti su 1 000 000 ir su bet kokiu kitu skaičiumi.

Vadinasi, jau mokame surasti bet kokio ilgio skaičių virtinę

$$\boldsymbol{a,\ 2a,\ 3a,\ldots,\ na,}$$

kad kiekvieno tos virtinės skaičiaus skaitmenų suma būtų lyginė.

O dabar vienas žingsnelis iki tos vietos, kad kiekvieno bet kokios ilgio tokios virtinės skaičiaus skaitmenų suma dalintųsi iš 3, toliau, kad iš 4-ių ir t.t., juk tokių tinkamu nulių skaičiumi atskiriamų vienetų galima imti kiek nori.

Dar kartą pasitvirtino aiški tiesa, kad kai suvoki, ką reikia daryti, visa kita atrodo taip paprasta, kad rodosi, jog tai tikrai aišku kiekvienam.

VI SKIRSNELIS
RATUKU SURAŠYTI 2005 NULIAI IR VIENETAI

Darbštus ir ištvermingas berniukas Žiniukas kartą aptiko didžiulį ratą su tuščiomis 2005 vietomis rato pakraščiuose skaičiams įrašyti. Rato viduryje 10 pagrindinių pasaulio kalbų – taip pat ir lietuviškai – buvo užrašyta, kad į tas vietas galima įrašinėti tik nulius arba vienetus. Jeigu rašytume kitokius skaičius, tai ratas subyrėtų. Jis atsargiai parsirito jį namo ir surašė 2005 nulius ir vienetus. Kaip jis juos ten surašė, jis dabar nepažiūrėjęs jau neprisimintų, bet gerai atsimena, kad ne visi skaičiai buvo vienodi - ten prirašė ir nulių, ir vienetų.

Vakare nusiplūkęs po bėgiojimų ir rašymų jis užmigo ir sapnavo, kad pas jį atėjo profesorius Skaitliūnas su magistrantu Nežiniuku ir jie abu klausė Žiniuko, ar jis žinąs, kokį ratą jis radęs. Žiniukas atsakė, kad didžiulį.

Tada Skaitliūnas kaip didelę paslaptį pasakė, kad jo ratas yra ne tik didžiulis, bet ir stebuklingas. Žiniukas paklausė, kuo gi?

Tada Skaitliūnas tarė:

– Klausyk atidžiai, Žiniuk. Ar turi švilpuką?

– Turiu, – atsakė Žiniukas.

– Tai įsidėmėk, – tarė Skaitliūnas, kuris buvo dar ir skaičių burtininkas, perduodamas jam švilpuką – kiekvieną kartą, kai tu šiuo švilpuku sušvilpsi, tavo rato skaičiai keisis.

– O kaip jie keisis? – vos spėjo paklausti Žiniukas.

– Ogi taip. Jeigu du kaimyniniai rato krašto skaičiai yra vienodi, tada tarp jų atsiras 0, o jeigu bet kurie du kaimyniniai skaičiai buvo skirtingi, tai tada tarp jų atsiras 1, po to senieji skaičiai išnyks ir jų vietas užims naujai atsiradę skaičiai.

– O jeigu aš dar kartą sušvilpsiu, vėl darysis tas pats? – paklausė berniukas.

– Vėl darysis tas pats. Vėl tarp vienodų skaičių atsiras 0, tarp skirtingų 1, senieji skaičiai išnyks, o naujieji skaičiai užims jų vietas.

– O kiek laiko aš galėsiu turėti tą švilpuką?

– Ogi iki tol, kol tau sušvilpus visi skaičiai nepasidarys vienodi. Tada švilpukas išnyks, ratas subyrės.

Toliau Žiniukas dar giliau įmigo, o skaičių burtininkas išnyko.

Rytą atsibudęs Žiniukas pagalvojo, kad visa tai, matyt, tebuvo tik sapnas, bet atsimerkęs pamatė prie pagalvės gulintį švilpukas, o prie lovos tebestovėjo atremtas ratas.

Žiniukas sušvilpė, ir skaičiai pasikeitė tiksliai taip, kaip profesorius buvo sakęs. Kiek kartų berniukas bešvilpė, skaičiai keitėsi taip, kaip Skaitliūnas buvo sakęs.

Staiga jis išsigando ir sustojo. Jis prisiminė, kad kai tik skaičiai pasidarys vienodi, jis praras stebuklingą švilpuką.

Žiniukas nebuvo užmiršęs, kad pradiniame rinkinyje buvo ir nulių ir vienetų. Jau nebešvilpdamas jis vėl pasižiūrėjo į ratą, jame, jo laimei, dar buvo ir nulių, ir vienetų ir jam labai parūpo, ar negalima būtų kaip nors teoriškai suvokti, ar gali kada visi tie skaičiai pasidaryti vienodi, jeigu dabar jie dar ne visi vienodi, t.y., ar jis neprarastų švilpuko, jeigu sušvilptų

(A) dar 100 kartų?

(B) dar 1000 kartų?

(C) dar 2005 kartus?

(D) kiek tik beturės kvapo kartų?

Skaitytojas mato užduotį vieno Lietuvos komandinės moksleivių Olimpiados uždavinio motyvais.

Kaip jį įveikti? 2005 skaičiai yra ne taip mažai.

Gal sumažinkime 2005 iki kokių 4 ar 5 skaičių?

Jeigu imtume tik 4 skaičius, tai galimybių būtų visai ne daug, na, pasižiūrėkime į kokią nors vieną.

Tarkime, turime rinkinį

0 1

1 1

Sušvilpus jį keistų rinkinys

1 0

1 0

Šį pakeistų rinkinys

1 0

0 1

O po sekančio švilptelėjimo gautume

1 1

1 1

Arba kad Nežiniukas jau be švilpuko.

Kita mintis būtų pasižiūrėti su 5 skaičiais, atsižvelgiant į tai, gal ir čia ką nors, kaip tai dažnai būna, kas nors priklauso nuo to, ar surašytų skaičių skaičius yra lyginis, ar ne.

Imame 5 nulių ir vienetų rinkinį ir išrašome, kas dėsis po kelių švilptelėjimų.

1 0 0 0 0 1

1 1 0 1 0 1 1 1

1 0 1 1 0 1

Matome, kad paskutinioji nulių ir vienetų rikiuosena sutampa su pasukta pirmąja, vadinasi, ir toliau viskas vėl suksis ir vis kartosis.

Dar kiek pamąstę, suvokiame, jog nesvarbu, ar ratuku surašyta lyginis ar nelyginis nulių ir vienetų skaičius, jeigu ten ne visi skaičiai vienodi, tai kažkuris nulis tikrai bus kažkokio vieneto kaimynas ir sušvilpus tarp jų išdygs 1.

Vadinasi sušvilpus vienetų visada lieka, jeigu tik rinkinyje būta ir nulių ir vienetų, nes tada jie kažkur susitinka.

Čia maždaug kaip zoologijos sode: jeigu ratuku stovi drambliai ir kengūros, tai atsiras toks dramblys, kurio kaimynė yra kengūra ir net, jeigu kengūrų ir dramblių yra bent po du, tai rasis ir kita kengūra, kurios kaimynas yra kitas dramblys.

O kokios aplinkybės garantuotų mums nulių išlikimą?

Kad išliktų nulis, reikia, garantuoti dviejų vienodų skaitmenų kaimynystę.

O tam, jei skirtingų skaitmenų esama, pakanka, kad jie neitų „kas antras“, taigi, kad jų nebūtų po lygiai. Todėl tada, kai bendras jų skaičius yra nelyginis, tai po lygiai jų būti negali, ir kažkurie du vienodi skaitmenys visada „sueis“ ir po švilptelėjimo tarp jų atsiras nulis.

Todėl jei apskritimu surašyti skaitmenys yra ne visi vienodi, tai sušvilpus, visiškai nesvarbu, kiek jų ten bebūtų, vienetai neišnyks, nes skirtingų skaičių kaimynystė yra neišvengiama, na, o jei dar apskritimu rašomų 0 ir 1 skaičius kartu yra nelyginis, tai ir kurių nors dviejų vienodų skaitmenų kaimynystė neišvengiama, todėl ir nuliai išnykti negali.

O toliau viskas kartosis.

Todėl matome, kad Skaitliūnas Žiniukui švilpuką padovanojo visiems laikams, nes pas jį yra 2005 skaičiai, o tai nelyginis skaičius.

VII SKIRSNELIS
DVEJETAINĖ SKAIČIAVIMO SISTEMA

Po Nežiniuko uždavinio apie nulius ir vienetus tiktų pakalbėti apie dvejetainę skaičiavimo sistemą, nes ten jokių kitų skaitmenų nebūna.

Dvejetainę skaičiavimo sistemą jautresnis žmogus galėtų vadinti ištisine nulių ir vienetų stichija.

Mūsų informatikos eroje visi esame apie tą stichiją girdėję ir joje pabuvoję. Kiekvienas žino, kad mūsų įprastinis nulis ir dvejetainėje sistemoje nulis, mūsų įprastinis vienetas – ir ten vienetas, tačiau nors sistema vadinasi – įsiklausykite, dvejetaine – mūsų įprastinio dvejeto, tokio labai pažįstamo skaitmens, kokį mes rašėme šimtus kartų ir kokį net ir mums kartais rašė, tas įprastinis 2 dvejetainėje sistemoje vienu ženklu nebeužrašomas. Taigi dvejetas dvejetainėje sistemoje vienu ženklu nebeužrašomas. O užrašyti jį, žinoma, galima, tik tam jau reikės ne vieno, o jau dviejų ženklų arba skaitmenų.

Ir kaip jis užrašomas? Jis užrašomas kaip 10, nes kitokių skaitmenų neturime, todėl nebeišsiversime vienu skaitmeniu, kaip rašydami 0 ir 1, o jau reikia 2 skaitmenų.

Toliau aiškiau: jeigu mūsų įprastinis 2 dvejetainiškai rašomas 10, tai 3 bus 11, o 4 jau kaip 100.

Matome, kad dvejetainės išraiškos greitai „pučiasi“, nes mūsų aštuonetas dvejetainiškai jau rašomas 1000, 15 rašomas kaip 1111, o 16 jau visai rimtai kaip 10 000.

Dvejetainiame pasaulyje jaunuolis gautų pasą, kai jo amžiaus skaičius būtų mažiausias galimas 5-ženklis skaičius. Nieko sau, yra kuo didžiuotis.

Visi mums sako, kad dvejetainė sistema informatikams yra pati patogiausia, nors teko skaityti, kad kažkokiu kitu labai svarbiu požiūriu trejetainė sistema būtų netgi dar ekonomiškesnė.

Beje, pirmieji skaičiai, užrašyti naudojant trejetainę sistemą, atrodytų taip:

0, 1, 2, 10, 11, 12, 20, 21, 22, 100, 101.

Paskutinis parašytas trejetainis skaičius 101 yra mūsų įprastinis dešimtainis skaičius 10.

Aritmetiniai veiksmai dvejetainėje sistemoje atliekamai taip pat kaip mūsų įprastinėje dešimtainėje sistemoje, tik reikia žinoti „naują“ dvejetainių skaitmenų sudėties ir daugybos lentelę ir galėsime taip pat paprastai sudėti, atimti ir dauginti stulpeliu bei dalinti kampu kaip ir dešimtainėje sistemoje.

Sudėties skaitmenų lentelė tokia:

+	0	1
0	**0**	**1**
1	**1**	**10**

Daugybos lentelė tokia:

X	0	1
0	**0**	**0**
1	**0**	**1**

Pamėginkime stulpeliu sudėti, sakysime, 1011 su 10101**:**

10101
1011
100000

Paaiškinti paprasta: vienetų skiltyje 1 + 1 jau 10, 0 rašome, 1 mintyje, toliau dešimčių skiltyje 1 + 0 yra 1 ir dar 1 mintyje vėl 10, 0 rašome, vienetas vėl mintyje ir taip toliau, kol gauname, kad toji dvejetainė suma yra 1 su 5 nuliais, o tai įprastinis mūsiškis dešimtainis skaičius 32 = 21 + 11.

Tai ir nenuostabu, nes 10000 yra 16, tai 10100 tai 10000 + 100 arba 20, o 10101 yra 21. Jeigu 1000 yra 8, tai 1010 yra 10, o 1011 tai 11. Vadinasi, tikrai 21 + 11 = 32.

Panašiai ir daugintume, pasižiūrėkime į 111 daugybą iš 101 (arba kaip skaičiuosime 5 × 7:

111
101
111
111
100011

O dabar parodykime, kaip galima suprastinti vieną tokį baisų anglų Olimpiados uždavinį. Kai pasakysime sąlygą, skaitytojas tuoj pamatys, kur tas baisumas.

Raskite skaičių, kurio dvejetainėje išraiškoje yra 2005 vienetai ir 2005 nuliai ir kuris dalijasi iš 2005 (iš tikrųjų ten buvo visko po 2004, bet mums dabar, kol šie metai nepasibaigė, skaičius 2005 kažkaip mielesnis)

Ryžtingai supaprastinsime sąlygą ir vietoje 2005 imkime 5.

Taigi mums reikia **surasti tokį skaičių, kurio dvejetainėje išraiškoje yra 5 vienetai ir 5 nuliai ir kuris dalijasi iš 5.**

Tai jau visai paprasta: kadangi 5 dvejetainėje sistemoje 101, tai 5 + 5 arba 10 dvejetainėje sistemoje bus

101
101
1010

Gaila, kad nepadidėjo vienetų skaičius, mes lūkuriavome trijų 1-tų, tada juos būtume sulipdę su 101 ir būtume turėję skaičių su penkiais 1-tais ir toliau besidalijantį iš 5.

Tai prie gautosios sumos dar kartą pridėkime 101, gausime jau 15, dvejetainiškai rašomą kaip 1111 (vėl negerai, nes 4 vienetai dabar mums per daug), na, vėl pridėkime 5, bus jau 20 arba dvejetainiškai 10100 (vėl du vienetai), ir dar kartą, bus jau 25, arba kitaip 11001, o skaičiaus su 3 vienetais mes ir laukėme.

Dabar jei prie 11001 prirašysime nulį, tai gausime 2 kartus didesnį skaičių, tad dalumo iš penkių neprarasime, todėl galime prirašyti kiek norime nulių. Prirašysime 3 nulius. Turėsime skaičių 11001000 ir prie jo priauginę 101, gausime skaičių 11001101, kuris dalijasi iš 5 ir kuriame jau yra 5 vienetai, bet dar tik 3 nuliai.

Nesunku priauginti iš dešinės dar 2 nulius ir gauti skaičių

1100110100

arba vieną iš tokių skaičių, kurių ieškojome, nes reikėjo skaičiaus, kurio dvejetainiame užraše yra 5 nuliai ir 5 vienetai ir kuris dalijasi iš 5.

Įdomu, koks tai skaičius, rašant jį dešimtainiškai. O jeigu jis nesidalys iš 5, kaip tada?

Tai visai paprasta:

$$1100110100 = 1\,000\,000\,000 + 100\,000\,000 + 100\,000 + 10\,000 + 100$$

arba tai yra

$$512 + 256 + 32 + 16 + 4 = 820,$$

o jis, kaip kiekvienas dešimtainėje sistemoje nuliu besibaigiantis skaičius,dalijasi iš 5.

Įdomu, kad analogiškas uždavinys su ketvertu arba užduotis surasti skaičių, kurio dvejetainiame užraše yra 4 vienetai ir 4 nuliai ir kuris dalijasi iš 4, sprendžiamas dar paprasčiau, nes 4 dvejetainė išraiška yra 100, todėl įprastinio veiksmo

$$4 + 4 = 8 \text{ dvejetainė raiška yra } 100 + 100 = 1000,$$

veiksmo 8 + 4 = 12 dvejetaine kalba atrodo kaip 1000 + 100 = 1100, o tai mums yra labai paranku, nes 12-os dvejetainėje išraiškoje yra kaip tik 2 nuliai ir 2 vienetai, todėl "priaugindami" arba prirašydami kitą tokį patį fragmentą, kurio dvejetainė išraiška yra

$$11001100$$

ir kuriame yra prašytieji 4 vienetai ir 4 nuliai ir kuris dalijasi iš 4, nes tai skaičius

$$1\times 2^7 + 1\times 2^6 + 0\times 2^5 + 0\times 2^4 + 1\times 2^3 + 1\times 2^2 + 0\times 2^1 + 0\times 2^0$$

arba jau dešimtainiškai rašant

$$128 + 64 + 8 + 4 = 204$$

Pasimankštinimui tinka ir uždavinys užrašyti skaičių, kurio dvejetainėje išraiškoje yra 3 vienetai ir 3 nuliai ir kuris dalijasi iš 3 ir taip pat net ir toks visai jau lengvutis prašymas nurodyti kokį nors skaičių, kurio dvejetainėje išraiškoje yra 2 nuliai ir 2 vienetai ir kuris daliajsi iš 2.

Šiuo atveju klonavimas nebepadėtų, nes skaičiuje yra jau per mažai vienetų. Kadangi 3 dvejetaine raiška yra 11, tai 3 + 3 dvejetainiškai yra 11 +11 arba 110.

Dabar 6 + 3 = 9 dvejetaine raiška yra 110 + 11 arba 1001, toliau jau tik dvejetaine raiška pridedame vis po 3, kurie dvejetainiškai yra 11, laukdami skaičiaus su 3 vienetais. Sulaukiame greitai, nes

1001 + 11 = 1100, 1100 + 11 = 1111 (keturių vienetų mums per daug!),

1111 + 11 = 10010 (dabar 2 vienetų per mažai), 10010 + 11 = 10101 (pagaliau sulaukėme!), todėl atsakymui tiktų skaičius 101010, arba, įprastai sakant, 32 + 8 + 2 = 42.

O su 2 rašymo 1 eilutė.

Kadangi 2 dvejetaiška raiška yra 10, tai tinka skaičius 1010, arba mūsų įprastinis šešetas.

Panašiai skaitytojas susidorotų ir su tuo uždaviniu, tik, žinoma, reikėtų visų pirmiau užsirašyti 2005 dvejetaine forma ir truputį ilgiau padėlioti.

Tačiau nėra jokių kitokių principinių ar suvokimo problemų, tik kiek ilgesni skaičiai.

VIII SKIRSNELIS
NEBŪTINAI ČIUPK IŠ KRAŠTO ARBA NE VISKAS AUKSAS, KAS AUKSU ŽIBA

Kažkada jau daugsyk minėtame "Kengūros" konkurse buvo pasiūlytas toks uždavinys: **Imame visus skaičius nuo 1 iki 999 ir suskaičiuojame jų visų skaitmenų**

sumas, po to vėl suskaičiuojame visų gautųjų sumų skaitmenų sumas ir esame klausiami, kokį patį didžiausią skaičių taip darydami gausime?

Visiškai aišku, kad iš visų skaičių nuo 1 iki 999 pačią didžiausią skaitmenų sumą turi pats didžiausias iš jų arba 999, nes jo skaitmenų suma yra 9 + 9 + 9 = 27 ir joks kitas skaičius neturi didesnės skaitmenų sumos.

Todėl mums visai lengva pasiduoti iliuzijai, kad to didžiausio skaičiaus 999 ir skaitmenų sumos skaitmenų suma irgi yra pati didžiausia.

Deja, taip nėra.

Tiesa yra ta, kad visų skaičių nuo 1 iki 999 skaitmenų sumos tikrai duoda (visus) sveikuosius intervalo nuo 1 iki 27 skaičius, tačiau jau intervale nuo 1 iki 27 pačią didžiausią skaitmenų sumą turi jau nebe skaičius 27, kurio skaitmenų suma yra tik 2 + 7 = 9, o 19, kurio skaitmenų suma yra 1 + 9 = 10, yra vienu vienetu didesnė už skaičiaus 27 skaitmenų sumą, kuri lygi 9.

Kita linksma miniatiūra

Kita linksma miniatiūra, aptikta Sankt-Peterburgo proto žvalumo uždavinių rinkiniuose, yra tokia: **raskite 6-ženklį skaičių, besidalijantį iš 8 su pačia didžiausia įmanoma skaitmenų suma.** Vėl taip ir norisi imti patį artimiausią 1 000 000 skaičių, kuris dar šešiaženklis ir dalijasi iš 8, o toks skaičius yra 999 992, kurio skaitmenų suma yra $9 \times 5 + 2 = 47$. Tačiau jam gretimas nors mažesnis iš 8 besidalijantis skaičius 999 984 jau turi vienetu didesnę skaitmenų sumą 9 + 9 + 9 + 9 + 8 + 4 = 48, o kitas, dar mažesnis, – 999 976 – dar didesnę skaitmenų sumą, nes 9 + 9 + 9 + 9 + 7 + 6 = 49.

O žvalus penktokas, ko gero, būtų pirmiausiai pasičiupęs aiškiausiai iš 8 besidalijantį skaičių 888 888, kurio skaitmenų suma yra ne tokia jau maža – $6 \times 8 = 48$.

Bet ir 999 976 irgi ne riba, nes pačią didžiausią skaitmenų sumą turi skaičius, kuris yra tolokai nuo mūsų minėtų skaičių – tai skaičius 999 888, kurio skaitmenų suma yra 9 + 9 + 9 + 8 + 8 + 8 = 51.

Suprasti tai galima kad ir taip.

Kadangi 1 000 dalijasi iš 8, nes $1000 = 8 \times 125$, todėl prie ryškiausiai iš 8 besidalijančio 888 888 pridėję 1 000, gausime taip pat iš 8 besidalijantį skaičių 889 888 su vienetu didesne skaitmenų suma, lygia 49.

Bet juo labiau ir 10 000 bei 100 000 dalijasi be liekanos iš 8, todėl pridėję dar ir juos prie skaičiaus 889 888, ir gausime tą siūlytą skaičių 999 888.

Ir apskritai, dar kartą prisiminkime dalumo iš 8 požymį, kuris sako, kad skaičiaus dalybos iš 8 liekana yra tokia pati, kaip ir skaičiaus, sudaryto iš paskutiniųjų 3 to skaičiaus skaitmenų, dalybos iš 8 liekana.

Šis požymis ir remiasi tuo, kad 1000, o tuo pačiu ir visi jo kartotiniai arba visi skaičiai

ABCD....EFGH000

dalijasi iš 8.

Todėl paėmę iš 8 besidalijantį skaičių 888 jo „priekyje“ galime rašyti ką norime, vis tiek gautasis skaičius dalysis iš 8. Kadangi mums reikia kuo didesnės skaitmenų sumos, todėl priekyje ir rašysime 999 ir taip gausime jau minėtus 999 888.

Įrodysime, kad bet kurio kito 6-ženklio skaičiaus, besidalijančio iš 8, skaitmenų suma negali būti didesnė už skaičiaus 999 888 skaitmenų sumą, kuri lygi 51..

Įtikimas, kad negalima ko nors prašokti, viršyti, nugalėti ar pranokti, psichologiškai neretai daro pritrenkiantį įspūdį.

Šiuo atveju mūsų samprotavimas yra visai nesudėtingas.

Pakanka įrodyti, t.y. nepriekaištingai įsitikinti, kad pati didžiausia bet kurio iš 8 besidalijančio skaičiaus paskutinių trijų skaitmenų suma negali prašokti 24, arba kitaip sakant, kad tie paskutiniai 3 skaitmenys yra 888.

Įrodysime, kad joks iš 8 besidalijantis 3-ženklis skaičius negali turėti už 24 didesnę skaitmenų sumą.

Tarkime, kad yra toks 3-ženklis iš 8 besidalijantis skaičius, kurio skaitmenų suma yra didesnė už 24.

Tada ji gali būti lygi 25, 26 arba 27.

1. Iš 8 besidalijantis skaičius negali turėti 27-iems lygią skaitmenų suma, nes vienintelis toks 3-ženklis skaičius yra 999, o jis net iš 2 nesidalija, nes yra nelyginis.

2. Iš 8 besidalijantis skaičius negali turėti ir 26 lygią skaitmenų sumą, nes tokie 3-ženkliai skaičiai tėra 3, būtent 899, 989 ir 998. Pirmieji du skaičiai yra net nelyginiai, paskutinis trečiasis nors lyginis, bet nesidalija iš 4, o mums reikia dalumo iš 8.

3. Jeigu triženklio skaičiaus skaitmenų suma yra 25, tai arba kuris nors jo skaitmuo kurioje nors skiltyje, lyginant jį su 999, yra dviem vienetais mažesnis, arba kurioje nors dviejose skiltyse esantys skaitmenys, lyginant jį su 999, yra vienu vienetu mažesni.

Pirmuoju atveju turėtume 799, 979 ir 997 (o jie visi net ne lyginiai), antruoju atveju tai turėtume 889, 898 ir 988. Perranka jau baigta, nes 889 yra nelyginis, 898 nesidalija iš net iš 4, o 988, nors iš 4 ir dalijasi, bet iš 8 jau nesidalija, nes nuo 1000, kuris dalijasi iš 8, jis tesiskiria 12 vienetų, todėl dalytis iš 8 negali.

Kompiuteriui net ir to nebūtų reikėję: jis per sekundės dalį būtų „mechaniškai" patikrinęs visus triženklius iš 8 besidalijančius skaičius ir radęs tuos 888.

IX SKIRSNELIS
APIE FORMALIŲ DALYKŲ REIKŠMĘ

Kartais mes truputį iš aukšto žiūrime į paprastus dalykus, nes jie kažkokie nesudėtingi, todėl psichologiškai nelengva laikyti juos svarbiais ar bent jau visada į juos atsižvelgti, arba, liaudiškai kalbant, su jais „skaitytis".

Paimkime tokį gerai žinomą „absoliučios klasikos" uždavinį.

Įsivaizduokime, kad mes išėjome į gatvę ir pasikvietėme į svečius pirmus sutiktus 6 žmones. Ar jūs galite įsivaizduoti, kad, nesvarbu, kokius tuos 6 žmones besutiktume, vis tiek tarp jų visada rasis arba tokie 3 žmonės, kurie visi vienas kitą pažįsta, arba tokie 3 žmonės, kurių nė vienas nepažįsta jokio kito to trejeto žmogaus.

Čia mums labai svarbu labai aiškiai pasamprotauti – idealiu atveju taip pasamprotauti, kad mums viskas taptų taip aišku, kad aiškiau ir būti negalėtų.

Kaip pasiekti tokio neatremiamo aiškumo? Tokios būsenos, kad mane suprastų kiekvienas mano kaimynas?

Neabejotina, kad to galima siekti įvairiausiais būdais.

Bandome kelti aiškumą su spalvotais siūlais

Pasižiūrėkite į tai nuolat keldami sau ir visiems psichologinį ir metodinį „superklausimą“ – negi neįmanoma padaryti dar aiškiau, dar suprantamiau, dar vaizdžiau?

Pradėkime nuo neginčijamos tiesos, jog bet kurie 2 iš tų sutiktųjų žmonių yra arba pažįstami, arba ne – nėra jokių „pusiau pažįstamų“ žmonių.

O dabar, jei jau ta konkreti žmonių pora yra pažįstamų žmonių pora, tai duokime jiems abiems laikyti baltą siūlą – vienam vieną, o kitam kitą siūlo galą.

O jeigu žmonių pora yra nepažįstamų žmonių pora, tai duokime jiems juodą siūlą, vienam vieną galą, kitam kitą siūlo galą.

Pabaigę apeikime visus savo pakviestuosius ir pasižiūrėkime, ką matome.

Matome, kad kiekvienas laiko saujoje 5 siūlų galus, vedančius į likusius 5 žmones. Kiekvieno laikomi siūlai yra balti arba juodi. O mūsų uždavinys nejučia virto tokiu: reikia rasti arba ištisai juodų, arba ištisai baltų siūlų trikampį, kurio kraštinės – tai siūlai, o viršūnės – tuos siūlus laikantys žmonės.

Kaip tai padaryti? Prieikime prie artimiausio žmogaus. Jis, kaip ir kiekvienas kitas, laiko rankoje 5 dviejų spalvų siūlus. Kažkurios spalvos siūlų sudaro daugumą – jų trys ar net daugiau. Tarkime, kad tie siūlai, kurių daugiau, yra juodi.

Dabar yra dvi galimybės.

1. Kurių nors dviejų tų juodų siūlų galus jungia irgi juodas siūlas, tada susidaro juodas trikampis, ir reikalai yra baigti.

2. Jokių dviejų iš tų trijų juodų siūlų galai nesujungti juodais siūlais. Tada jie visi būtinai sujungti baltais siūlais, ir gauname jau ištisai baltą trikampį.

Dar kartą į gatvę prie šešių žmonių

Vėl nei dideliame, nei mažame mieste sutikome 6 žmones ir dar prieš sutikdami juos pasvarstėme, kiek daugiausiai pažįstamų porų tarp jų galėtų būti – jeigu, įsivaizduokime, jie visi pasitaikytų pažįstami. Tai visai nesunku suskaičiuoti – kaip paprastai, įsivaizduojame, kad jie yra sunumeruoti skaičiais nuo 1 iki 6 ir mums tereikia suskaičiuoti, kiek yra skirtingų skaičių 1, 2, 3, 4, 5 ir 6 porų. Kadangi mūsų skaičiai visai nedideli ir, kas dar svarbiau, jų nedaug, tai juos galima greitai išvardinti nepamirštant, kad skaičių tvarka poroje jokios reikšmės neturi.

Taip ir išvardintume visas galimas poras:

(1, 2), (1,3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6),
(3, 4), (3, 5), (3, 6), (4, 5), (4,6) ir (5, 6).

Tų porų yra 15, vadinasi, jeigu visi žmonės yra pažįstami, bet jei tai ne taip, tada pažįstamų porų būtų, suprantama, mažiau.

Tų pažįstamų porų skaičius gali svyruoti tarp 0 ir 15 imtinai.

Psichologiškai mes, žmonės, visada esame už tai, kad su mumis būtų elgiamasi pagarbiai, kad su mūsų nuomone būtų skaitomasi arba mažiausiai nors kiek jos paisoma ir jau vienas pačių didžiausių žmogiškų nusiskundimų galėtų skambėti taip: jis su manimi elgiasi kaip su kokiu daiktu.

Prie šito reikalo dar grįšime, o dabar leiskite pajuokauti ta tema.

Didelio lenkų matematiko H. Šteinhauzo (H. Steinhaus) aforizmų knygoje radome tokią frazę:

Ponas *A*. nekenčia matematikos knygų nuo to karto, kai algebros vadovėlyje rado lygybę $A = A$.

Komentuodami, kodėl taip žiauriai atsitiko, galėtume nebent vaizduotis, kad kairėje lygybės $A = A$ pusėje ponas A gal įsivaizdavo save, o kitoje – tiktai kuklią, nors ir pirmą abėcėlės raidę A ir todėl toks sulyginimas, kad jis yra tik raidė, buvo jam nepakeliamas.

Nesiginčykime, kad ir paskutinis žmogus (duok Dieve, kad jų nebūtų) yra daug daugiau už pirmutinę abėcėlės raidę ir vis dėl to neslėpkime, kad matematikoje, kur psichologiškai labai svarbu, kiek beįmanoma supaprastinti padėtį, išryškinant tą ar kitą svarbią aplinkybę, mes drąsiai, nieko neužgaudami galime pradėti vadinti skaičiais, viršininkus atkarpomis ir t.t..

Galėtume pasakyti, kad ir turistų, lakūnų, kitų toli būnančių žmonių tai per daug nenustebintų, nes kuo toliau žmogus nutolsta, tuo labiau jis panašėja į tašką.

Tai yra vadinama uždavinio interpretacija.

Aibių teorijos požiūriu 6 žmonės niekuo nesiskiria nuo 6 skirtingų taškų aibės, nes tarp tų abiejų aibių galima nustatyti abipus vienareikšmę atitiktį, kada kiekvienam žmogui priskiriamas taškas, arba, kaip pas mus ką tik buvo – skaičius, taip, kad skirtingiems žmonėms priskiriami skirtingi taškai (galėtume sakyti, kad kiekvienas žmogus paženklinamas vis kitu tašku), ir kiekvienam taškui atitinka koks nors žmogus.

Abipus vienareikšmišką atvaizdį galėtume interpretuoti ir kaip „korektiškas piršlybas“ arba tokias, kada vienos aibės X elementai „superšami“ su kitos aibės elementais Y taip, kad bet kuriems skirtingiems aibės X elementams x „priperšami“ skirtingi aibės Y elementai ir kiekvienam aibės Y elementui y yra „priperšamas“ koks nors aibės X elementas x.

Čia mes norėtume dar daugiau pafilosofuoti, tačiau, kol nepamiršome, apie ką kalbame, grįžkime prie 6 žmonių ir 6 juos atitinkančių taškų.

Šiuo atveju įmanoma, ne tik žmogui priskirti (kokios nors konkrečios plokštumos tašką), bet nuveikti ir šitą daugiau, pavaizduoti ne tik žmones, bet ir jų pažintis – būtent jeigu tie žmones pažįstami, tai tada juos atitinkančius taškus galime sujungti atkarpa, o jeigu nepažįstami, tai nesujungti. Pastebėkime, kad vietoje atkarpų pas mus ką buvo siūlai.

Kadangi plokštumoje taškų yra apsčiai, arba be galo daug, tai juos labai paprasta parinkti taip, kad juos jungiančios atkarpos nepersiklotų (nors kirstis ir galėtų). Tam pakanka tuos taškus paimti taip, kad jokie 3 taškai nebūtų vienoje tiesėje.

6 žmonės ir 7 pažintys arba 6 taškai ir 7 juos jungiančios atkarpos

Jeigu mūsų paklaustų, kada geriau kalbėti apie žmones ir pažintis, o kada apie taškus ir juos jungiančias atkarpas, tai atsakyti į šį klausimą būtų psichologiškai nesudėtinga.

Paprastai, kol mes siūlome skaitytojui uždavinį, tai tam, kad skaitytoją sudomintume ir kad jam būtų lengviau įsigilinti (mūsų terminologija kalbant, nors truputį „įsijausti“ į uždavinį), jį paprastai stengiamasi pateikti kuo paprasčiau, aiškiau ir įspūdingiau.

O vėliau, kai jau mes įsitraukiame į sprendimą, mes stengiamės kuo paprasčiau perteikti reikiamas problemos vietas.

Taip žmonės nejučia virsta taškais, pažintys – atkarpomis ir tai visiškai nieko neerzina. Neerzina, nes padeda perprasti reikalą. Juolab, kad išsprendus uždavinį, vėl niekas nedraudžia atsakyme kalbėti vėl tik apie žmones ir pažintis – maža to, taip netgi derėtų elgtis, nes kokia kalba buvo pateikta sąlyga, tokia kalba derėtų pateikti ir atsakymą.

Taigi ir mes dabar formuluosime uždavinį žmonių ir pažinčių kalba, o spręsime jį, jei tik tai bus patogiau, atidėdami plokštumoje taškus ir jungdami juos atkarpomis.

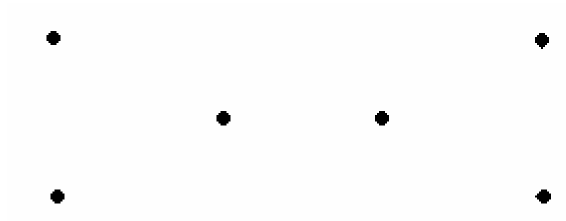
Taigi pirmiausiai mes prašome skaitytoją sugalvoti tokią pavyzdį, kad:

(A) 6 žmonės turėtų 7 pažintis;

(B) Kad ir kokius 3 žmones bepaimtume, tarp jų visada atsiras 2 pažįstami žmonės.

Skaitytojo patogumui mes jau pavaizdavome žmones kaip taškus ir laukiame, kol skaitytojas sujungs kai kuriuos iš tų taškų iš viso 7 atkarpomis (atitinkančias pažintis) taip, kad imant bet kuriuos 3 taškus, visada kurie nors 2 sujungti atkarpa (atitinkančias tam, kad bet kurioje 3 žmonių grupėje atsiras 2 pažįstami žmonės.

Per keletą minučių turėtų pasisekti, arba, kaip sako šviesi kinų patarlė, kelią įveikia einantysis. .



Jeigu jūs jau nubraižėte tokį pavyzdį, tai matote, jog yra teisingi 2 faktai.

1. Yra toks taškas, iš kurio išeina mažiausiai trys atkarpos – arba, kita interpretacija, yra toks žmogus su mažiausiai 3 pažintimis.

2. Yra 3 atkarpos, iš kurių atkarpų ištisinis trikampis arba, kita interpretacija, yra 3 žmonės, kurių kiekvienas pažįsta kiekvieną kitą to trejeto žmogų.

Dabar paklauskime štai ko: ar čia taip tik mūsų atveju nutiko, ar taip yra visada?

Pamėginkime įrodyti tuos 2 faktus bendruoju atveju.

1. Garantuotai atsiras bent vienas žmogus, turintis tarp 6 žmonių bent tris pažįstamus;

2. Garantuotai atsiras 3 tokie žmonės, kurie visi tarpusavyje pažįsta vienas kitą (jei žmonės virsta skaičiais, o pažintys atkarpomis, tai reiškia, kad plokštumoje atsiranda trikampis).

Šis gražus etiudas priklauso rumunų kompozitoriui Valentinui Vornicu.

Jo sprendimo motyvas gerai žinomas – tai vadinamas dvigubas skaičiavimas, arba žiūrėjimas iš dviejų taškų (tai dažnai duoda stereoskopinį vaizdą), tik čia situacijai papildomo žavesio teikia toji aplinkybė, kad 6 žmonės turi kiek mažiau negu pusę galimų pažinčių (nes tik 7 iš daugiausiai galimų 15, o vis tiek atsiranda ir toks žmogus, kuris pažįsta mažiausiai 3 iš likusių 5 (tai daugiau negu pusė) ir egzistuoja 3 žmonės, kurie visi vienas kitą pažįsta.

O įrodymas, kai jį turi, visai paprastutis.

Pradėsime nuo priešingos prielaidos, tardami, kad taip nėra, ir laukdami loginio sprogimo.

O jis įvyksta tuojau pat.

Tarkime, kad joks žmogus iš tų 6 neturi tarp jų trijų pažįstamų. Vadinasi, tada kiekvienas turi ne daugiau negu 2 pažįstamus. Dabar apeikime juos visus ir suskaičiuokime visus jų pažįstamus. Jeigu kiekvienas turi ne daugiau negu 2 pažįstamus, tai per visus 6 žmones tų pažįstamų priskaičiuosime na ne daugiau negu 12 (pirmasis požiūrio taškas).

Vadinasi, jeigu visi per visus turi nedaugiau kaip 12 pažįstamų, o pažinčiai reikia 2 žmonių, tai tada pažinčių yra ne daugiau negu 6, o duota, kad jų yra 7 (o tai ir yra po antrojo požiūrio palyginimo su pirmuoju ir uždavinio sąlygos duomenimis įvykstantis loginis sprogimas, įrodantis, kad mūsų prielaida apie tai, kad nėra jokio žmogaus su bent 3 pažįstamais buvo detonuojanti, vedanti į loginę katastrofą, vadinasi, neteisinga).

Taigi, jeigu yra 6 žmonės su 7 tarpusavio pažintimis, tai atsiras toks žmogus su bent 3 pažįstamais ir dabar antrąją dalį užbaigiame vienu sakiniu: imkime tuos 3 to žmogaus pažįstamus, pagal sąlygą tų 3 žmonių grupėje atsiras 2 pažįstami žmonės ir taip turėsime tris tarpusavyje vienas kitą pažįstančius žmones.

Viena išvada po Valentino Vornicu uždavinio

Dar kartą grįžkime prie to uždavinio sąlygos su 6 žmonėmis ir 7 pažintimis. Jau sakėme, kad tų pažinčių gali būti daugiausiai 15 (kai visi vieni kitus pažįsta).

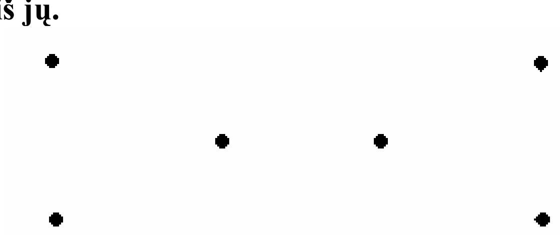
Vadinasi, jeigu turėdami 6 žmones randame 7 viena kitą pažįstančias poras, tai likusios 15 – 7 = 8 poros viena kitos nepažįsta.

Jeigu dabar imtume uždavinio interpretaciją taškais ir juos jungiančiomis atkarpomis, tai toje interpretacijoje žmogų vaizduoja taškas, o dabar jau nepažįstantiems vienas kito žmonėms atitinkančius taškus jungsime atkarpomis, tai gausime, kad yra 6 taškai ir juos jungiančios jau 8 atkarpos.

Vadinasi, juo labiau ir dabar atsiras bent vienas taškas, sujungtas atkarpa su bent trimis kitais taškais.

Deja, nebegalime sakyti, kad atsiras 3 vienas kito nepažįstantys žmonės, nes mes nebežinome, ar imant bet kuriuos 3 žmones, tarp jų atsiras 3 skersai išilgai vienas kitą pažįstantys žmonės.

Labai rekomenduojame vėl paimti 6 plokštumos taškus ir taip sujungti juos 8 atkarpomis, kad atsirastų tokie 3 taškai, kad nė vienas iš jų nėra sujungtas atkarpa nė su vienu kitu iš jų.



Reziumuojant tai, kad buvo pasakyta, galime suformuluoti šiek tiek bendresnį teiginį:

Jeigu 6 žmonių grupėje randame 7 arba 8 tų žmonių tarpusavio pažintis, tai tada teisinga yra sakyti kad:

(A) toje grupėje yra žmogus, turintis tarp likusių bent tris pažįstamus;

(B) toje grupėje yra ir žmogus, nepažįstantis toje grupėje mažiausiai 3 likusiųjų žmonių;
(C) toje grupėje yra 3 vienas kito nepažįstantys žmonės.

X SKIRSNELIS
VĖL Į GATVĘ PRIE ŽMONIŲ

Ką tik buvome išėję į gatvę, pakvietę 6 žmones ir išsiaiškinę, kad tarp jų visada rasis arba tokie 3 žmonės, kurie yra poromis pažįstami, arba tokie 3, iš kurių jokie 2 nėra pažįstami.

Vėl išėjome į gatvę ir vėl sutikome 6 žmones. Ką dar galėtume iš anksto apie juos išpranašauti?

Ir jiems, ir mums tai galėtų būti įdomu ir net pamokoma.

Ką čia dar galėtume jiems tokio psichologiškai netikėto pasakyti?

Pagalvokime.

Atėjo idėja, mintis jau čia, tik kaip ją kuo aiškiau išguldyti?

Mėginsime juos nustebinti tokiu faktu, kad tarp tų 6 sutiktųjų visada rasis tokie 2, kurie turi vienodą pažįstamų skaičių (tarp tų 6 sutiktųjų).

Vėl visiškai nesvarbu, kokius 6 žmones sutikome.

Kaip tuo įsitikinti?

Vėl imkime protestuoti, niekaip su tuo nesutikti ir pagaliau tarkime, kad taip nėra, ir pasižiūrėkime, iš kur išdygs prieštara ir kokia ji bus.

Taigi manykime, kad gali atsirasti tokie 6 žmonės, visi turintys skirtingą pažįstamų skaičių tarp tų 6 sutiktųjų.

O kiek ką tik tų surinktųjų 6 žmonių bendruomenėje apskritai įmanoma turėti pažįstamų? 6 žmonių ką tik išdygusioje bendruomenėje daugiausiai galima turėti 5 pažįstamus (taip nutinka, jei kuris nors iš jų pažįsta visus likusius mūsų surinktuosius), žinoma, galima turėti ir mažiau pažįstamų - 4, 3, 2, 1 ir net nė vieno, arba, aritmetiškai sakant, 0 pažįstamų.

Taigi 6 žmonės turi 6 skirtingas galimybes – nuo 0 iki 5 pažįstamų – ir turi visas jas turėti, jeigu jau kiekvienas turi po ne tiek pat pažįstamų.

Na, ir kur čia dabar rasis tas prieštaravimas?

Loginis minties pratęsimas

Jeigu tarp 6 žmonių atsiranda toks žmogus, kuris turi 5 pažįstamus arba, kitaip sakant, pažįsta visus likusius, tai tada tarp tų 6 žmonių negali būti žmogaus, kuris nieko nepažįsta arba neturi nė vieno, arba, kitaip, turi 0 pažįstamų.

Lygiai taip pat – simetriškai ar veidrodiškai - galėtume pasakyti: jeigu tarp tų 6 yra žmogus, kuris nė vieno nepažįsta, tada negali būti tokio žmogaus, kuris pažįsta visus kitus.

Pakartokime: jeigu tie 6 žmonės visi turėtų skirtingą pažįstamų skaičių, tai būtų įgyvendinti visi atvejai: atsirastų toks, kuris visai neturi pažįstamų, toliau toks, kuris turi vieną pažįstamą, trečias toks, kuris, kuris turi du, ketvirtas – tris, penktas – keturis ir šeštas – visus penkis pažįstamus.

Stop, ką tik sakėme, kad taip negali būti, nes turintis penkis pažįstamus, „pašalina“ žmogų, neturintį nė vieno pažįstamo.

Vadinasi, atvejis, kad visi turėtų skirtingą pažįstamų skaičių yra neįmanomas, todėl visada rasis du tokie žmonės, kurie tarp tų 6 pakviestųjų turi po lygiai pažįstamų (gal ir nė vieno).

Kita paprasta, bet neprasta mintis būtų pastebėjimas, kad 6 čia palikti gal tik dėl to, kad ir prieš tai buvusiame uždavinyje kalbėjome apie 6 žmones. O iš tikrųjų šiame uždavinyje vietoje 6 galima imti bet kurį kitą žmonių skaičių.

Samprotavimai liktų tokie patys.

Pavyzdžiui, jeigu sutiktume 2005 žmones, tai tada vėl: jei nebūtų jokių dviejų su vienodu pažįstamų skaičiumi, tai vėl rastųsi ir toks, kuris pažįsta likusius 2004, vadinasi, vėl nėra tokio, kuris nieko nepažįsta ir todėl vėl negalėtų būti taip, kad visi 2005 pakviestieji turi skirtingą pažįstamų skaičių.

XI SKIRSNELIS
KAS MAN GALĖTŲ SUTRUKDYTI?

Tai labi dažnas gyvenimiškas klausimas. Mes visada ką nors planuojame, organizuojame, prognozuojame, ketiname daryti, o aplinkiniai arba padeda mums, arba trukdo, arba nesupranta, kuo mes apskritai užsiimame.

Spręsdami uždavinius mes dažnai susiduriame su situacija, kai du žmonės pakaitomis kažką daro, vienas pradeda, kitas tęsia, toliau vėl pirmasis veikia ir t.t. Dažniausiai kiekvienam būna pasakyta, ko jis turėtų siekti arba tą žino jis pats..

Paprastai atskirus jų veiksmus vadiname ėjimais ir, kai jau viskas padaryta, pagal tai, jei kuris pasiekė tai, ką turėjo pasiekti, jį skelbiame nugalėtoju – nes jų siekiamybės beveik visada būna priešingos.

Natūralu, kad jiems yra keliami tokie tikslai, kurių jie abu vienu metu pasiekti negali. O jeigu tikslo nepasiekia nė vienas, tai paprastai sakome, kad žaidimas baigiasi lygiosiomis.

Jeigu yra taip, kad kuris nors gali pasiekti jam keliamą tikslą, kad ir ką bedarytų kitas, tai sakoma, kad jis turi **laiminčiąją strategiją**.

Psichologiškai žiūrint, jeigu aš turiu laiminčiąją strategiją, tai mano priešininko likimas nulemtas arba, galima sakyti, yra fatališkas, o gal net žiaurus. Na, o jeigu laiminčiąją strategiją turi mano priešininkas, tai tada vargas man, jeigu aš nieko negaliu pakeisti, na, nebent priešininkas ką nors susipainiotų – o taip irgi nutinka.

Klasikinis pavyzdys su 100 kortelių, kurių gali būti ir daugiau

Petras pasiūlė man žaisti tokį žaidimą: mudu imtume 100 kortelių su jose po vieną užrašytais visais sveikaisiais skaičiais nuo 1 iki 100, sudėtume jas didėjančia tvarka ir darytume taip: Petras pradėtų ir paimtų kažkiek pačių didžiausių kortelių, tačiau ne daugiau negu 10, po to vėl ne daugiau kaip 10 likusių pačių didžiausių kortelių imčiau aš, po to vėl Petras, ir taip mudu imtume pakaitomis kiekvieną kartą ne daugiau kaip 10 likusių pačių didžiausių kortelių. Kiekvieną kartą būtinai reikia paimti bent vieną kortelę.

Žaidimą laimėjusiu laikomas tas, kuris paima paskutines korteles.

Petras sako, kad lošti jis siūlo kilniai, nes jeigu jis laimėtų, tai jam gana būtų iš manęs gauti 10 litų, na o jeigu laimėčiau aš, tai jis man duotų net 100 litų, nes jis jau kelias dienas lošiąs tą žaidimą, o aš tesąs pradedantysis, ir taip jis mane paskatintų.

Žaistume mudu po valandos, iš viso 10 kartų.

Ką man daryti?

Turiu valandą laiko susigaudyti, kuo čia kvepia.

Priguliau pagalvoti, ką man daryti, nepajutau, kaip užsnūdau ir sapne mačiau, kad ant stalo liko jau tik septyni skaičiai nuo 1 iki 7 iš džiaugsmo pradėjau šaukti ir... pabudau.

Bet ir pabudęs ne viską pamiršau, 7 gerai prisiminiau ir pailsėjusia galva – o iki žaidimo dar buvo likusios 20 minučių – puikiai suvokiau, kad aš laimiu, jeigu man eiti, ne tik tada, kai ant stalo lieka 7 mažiausi sveiki teigiami skaičiai, bet ir kai 8, 9 ar 10 arba, suprantama, ir mažiau, bet kas nors dar guli.

Žodžiu, jeigu ant stalo lieka tik skaičiai nuo 1 iki 10 ir jei man eiti, tai aš laimiu, nes turiu teisę juos visus paimti.

Bet, o siaube, jeigu ant stalo yra 11 pirmųjų skaičių ir mano eilė imti, tai aš tikrai pralaimėsiu, nes nors vieną skaičių (kortelę) laikantis sąlygos imti vis tiek teks, o kadangi visų skaičių (kortelių) paimti aš neturiu teisės, nes galiu imti daugiausiai 10, todėl po mano ėjimo liks nuo 1 iki 10 pirmųjų kortelių, žodžiu, kažkas liks, ir aš pralaimėjau.

Taigi jeigu lieka skaičiai nuo 1 iki 10, tai laimiu aš, o jei 11, tai aš pralaimiu, nes dabar visų paimti nebegaliu, o kažką imti privalu.

Jeigu lieka 12 pirmųjų skaičių ir man eiti, tai aš dabar jam „padarysiu 11“, nuimdamas kortelę12. Lygiai taip aš jam galiu „padaryti 11“, jeigu ant stalo būtų 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20 ir net 21 kortelė, tik tada reikėtų imti atitinkamai vis po daugiau.

Dabar kitas „nelaimingas“ man skaičius yra 22, nes jeigu tiek kortelių likę ant stalo, o mano eilė imti, tada paėmęs aš „įkrisiu“ tarp skaičių 12 ir 21, ir jau jis man „padarys 11“.

Likus 5 minutėms iki žaidimo pradžios aš supratau principą: jeigu ant stalo lieka 11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99 ir jam eiti, tai aš visada laimėsiu, jeigu tik laikysiuos geležinės taisyklės: bendras jo ir mano per vienas kartą nuimtų kortelių skaičius turi būti 11.

Bet jis sakė, kad bus 100 kortelių ir jis eis pirmas, vadinasi, savo ėjimu jis kukliai paims vieną kortelę ir „bus man 99“.

Ir štai tarpdury stovi mano draugas.

„Tai ką, žaidžiam, užsidirbsi.“

„Ką, manei, kad aš nesusigaudysiu, prasigyventi iš manęs norėjai?“.

”Na ką tu, aš tik norėjau, kad tu pagalvotum.“

„Tada savo tikslą pasiekei.“

XII SKIRSNELIS
DAR KARTĄ 100 KORTELIŲ ARBA KAD TIK PAKAKTŲ SUMANUMO

100 kortelių - tai pakankamai daug, kad su jomis ir per jas galėtų nutikti daug įdomių ir netikėtų dalykų. Tik laikykis, tik spėk savo psichologiją ruošti visokioms įdomybėms ir netikėtumams.

Martynas prisiminė savo kišenėse turįs vėl 100 kortelių su visais surašytais skaičiais nuo 1 iki 100, tik dabar jis buvo užmerktomis akimis.

O gal ir atmerktomis, bet šaliku užrištomis, kas ten besupaisys, nebent istorikai išsiaiškintų.

O reikalas buvo toks.

Kaimynui Trilinkiui labai parūpo, kiek kortelių turėtų iš kišenės užrištomis akimis išsitraukti Martynas, kad iš tų jau ištrauktųjų kortelių jis garantuotai galėtų surasti tris tokias korteles, kuriose esančių skaičių suma dalytųsi be liekanos iš 3? Klausimas visada toks: **kuri smulkmena dabar svarbiausia?**

Kadangi pagal sąlygą besidalantį iš 3 skaičių reikia sudaryti iš trijų kortelių, tai tris korteles tikrai reikės imti.

Kad trijų paimtų kortelių gali nepakakti, rodo pavyzdys – įsivaizduokim, kad pasitaikė kortelės su 1, 2 ir 4. Jų suma 7 nesidalija iš 3.

Keturių ir ne gana, nes gali pasitaikyti, sakysime kortelės su skaičiais 1, 2, 4 ir 5. Jokios sumos po tris arba 1 + 2 + 4, 1 + 2 + 5, 1 + 2 + 5 ir 2 + 4 + 5 neduoda iš 3 besidalančio skaičiaus.

Tad kartojame klausimą, nes padėtis komplikuojasi, būtent, **kelias korteles garantuotai gana užsimerkus paimti, kad visada rastųsi 3 tokios, kurių suma dalytųsi iš 3?**

Padarykime paprastą pastabą arba švelnų, beveik nepastebimą, bet tolesniems reikalams labai patogų, beveik nepastebimą mikrojudesį - pasakykime, jog iš mūsų samprotavimų jau aišku, kad **svarbu ne tiek pats paimtasis skaičius, bet jo dalybos iš 3 liekana.**

Todėl mes visus skaičius nuo 1 iki 100 pakeiskime jų dalybos iš 3 liekanomis, tada vietoj 1 ar 2 ir liks 1 ir 2, vietoj 3 atsiras 0, vietoj 4 – vėl 1, vietoj 5 – vėl 2, vietoj 6 – vėl 0, ir taip iki pat pabaigos – vietoj 96 – 0, 97 – 1, 98 – 2, 99 – 0 ir galiausiai vietoj 100 rasis 1.

Todėl dabar kišenėje laikome 33 nulius, 34 vienetus ir vėl 33 dvejetus.

Grįžtame prie paties nepalankiausio atvejo ieškojimo – kelių kortelių Martynui gali nepakakti (pagal principą „gyvenimas pilnas netikėtumų“) ypač, kai jų mažiausiai reikia.

4 kortelių tikrai gali nepakakti, pavyzdžiui, jeigu Martynui pasitaikytų skaičiai 1, 1, 2 ir 2 – o tai tiksliai atitinka mūsų anksčiau jau nagrinėtą atvejį su 1, 2, 4 ir 5, tai iš jokių trijų kortelių jau patyrėme, kad jokios iš 3 dalios skaičių sumos nesulipdysime.

Dali iš 3 suma dabar reiškia per 3 korteles surinkti 0, 3 arba 6.

Na, negi gali būti, kad ir 5 kortelių nepakaks?

Ne, taip būti negali ir mes tai įrodysime su „visu loginiu griežtumu“.

Kodėl to negali būti?

Ogi todėl, kad jei tarp paimtųjų kortelių pasitaiko visi skirtingi skaičiai 0, 1 ir 2, tai iš tokių 3 kortelių per visas surinksime 3, ir viskas įrodyta..

O jei tarp tų 5 aklai ištrauktų kortelių 3 skirtingų skaičių nėra, kas tada?

Jei tarp iš tų 5 aklai paimtųjų kortelių tėra tik 2 skirtingos liekanos, tai viena kuris liekana pasitaikys bent trissyk ir tų trijų skaičių (arba liekanų) suma dalysis iš 3.

Taigi, kad ir kaip aklai Martynas išsitrauktų 5 skaičius, vis tiek tarp jų rasis tokie 3, kurių suma dalijasi iš 3.

O kaip būtų jeigu Martynui reikėtų turėti jau ne tris, o keturis tokius skaičius, kurių suma dalytųsi be liekanos iš 3?

Kiek mažiausiai kortelių jam tada reikėtų aklai išsitraukti iš savo plačių kišenių?

O jeigu reikėtų turėti 5?

O 6?

XIII SKIRSNELIS
ARBA DAR KARTĄ APIE 100 SKAIČIŲ

Kartą vienoje iš atrankos stovyklų buvo susirinkusiems buvo pateiktas toks uždavinys, kurio sprendimas vaizdžiai demonstruoja dar vieną akivaizdžią psichologinę tiesą, kad paskaičius uždavinio sprendimą uždavinys atrodo visai lengvas,

Dažnai nuomonė apie uždavinio lengvumą stipriai pasikeistų, jeigu tą tariamą lengvą uždavinio sprendimą reikėtų surasti pačiam.

Situacija labai panaši į tą, kai mums menkai pažįstamame mieste kas nors kur reikia veda, viskas atrodo aišku ir nepainu, o kai pačiam reikia nueiti, tai pasiklysti gretimame kieme.

Bet grįžkime prie to siūlomo uždavinio sąlygos.

Vėl ant stalo guli 100 kortelių, vėl kortelėse po vieną surašyti visi skaičiai nuo 1 iki 100. Du žaidėjai pakaitomis, pradeda pirmasis, nuiminėja nuo stalo po vieną kortelę tol, kol ant stalo lieka 2 kortelės. Kai ant stalo telieka 2 kortelės, yra suskaičiuojama jose parašytų skaičių suma.

Jeigu ta suma dalijasi be liekanos iš 3, tai laimi pirmasis imantysis, o jeigu ne, tai antrasis.

Ir vėl klausiame, ar kuris nors iš imančiųjų korteles turi laiminčiąją strategiją, t.y., ar gali jis taip žaisti, kad visada laimėtų, nepaisant to, kad kitas bedarytų?

Kas čia pasidaro visai aišku bent 5 minutes apie tuos dalykus pamąsčius?

1. Pirmajam imančiajam, matyt, yra sunkiau, nes jam reikia dviejų likusių skaičių sumos dalumo iš 3, o antrajam reikia nedalumo iš 3, o tai dažnesnis atvejis, o dar antrasis ims paskutinis.

2. Vėl lemia ne tiek patys skaičiai, kiek jų dalybos iš trijų liekanos.

Kad pasidarytų dar aiškiau, sumažinkime kortelių skaičių nuo 100 iki 10, skaitytojas nepamiršo, kad tai mes tai vadinome „didelių skaičių baimės mažinimu“.

Vadinasi, turime jau daug paprastesnę situaciją: ant stalo guli 10 kortelių: trijose parašyta po 0, keturiose kortelėse – po 1 ir dar trijose kortelėse yra parašytas skaičius 2. Du žaidėjai, pradeda pirmasis, pakaitomis paima po 4 korteles. Tada ant stalo lieka 2 kortelės ir yra sudedami jose parašyti skaičiai. Jeigu ta suma yra 0 arba 3 (dalijasi iš 3), tai laimi pirmasis, o jeigu ne – tai antrasis.

Ar gali kuris nors iš jų garantuotai laimėti?

Jau sakėme, kad antrojo imančiojo perspektyvos rodosi gerokai šviesesnės, nes jam reikia to, kas nutinka dažniau.

Vėl atsukime vieną kadrą atgal, arba pasižiūrėkime, kas dedasi per metrą iki finišo, t. y. tada, kai jie dar po kartą gali imti.

Antrasis žaidėjas jau ėmė 3 kartus ir vien savo jėgomis galėjo pašalinti nuo stalo visas 3 korteles, kuriose parašytas 0 – tai „ankstesnės“ kortelės, kuriose parašyti skaičiai dalijosi iš 3 arba tai 3, 6 ir 9.

Taigi antrasis gali užtikrinti, kad prieš paskutinį jų ėmimą ant stalo kortelių su 0 nebėra, yra tik keturios kortelės su 1 arba su 2.

Tada galimi tokie atvejai: ant stalo liko 4 vienetai, 3 vienetai ir 1 dvejetas, 2 vienetai ir 2 dvejetai, 1 vienetas ir 3 dvejetai, arba galiausiai 4 dvejetai.

Dabar viskas labai aišku, jeigu ant stalo yra likę vieni vienetai, arba vieni dvejetai, tai dar po kartą jiems imant jau visai nesvarbu, kaip kas ims, vis tiek po to liks 2 vienodos kortelės – arba su vienetais, arba su dvejetais ir jose parašytų dviejų skaičių suma iš 3 nesidalys.

Jeigu ant stalo yra 3 vienetai ir 1 dvejetas, arba, simetriškai, 3 dvejetai ir 1 vienetas, tai pirmajam imant bet ką antrajam pakanka imti ne tokį skaitmenį, kaip kad ėmė pirmasis ir tada ant stalo visada lieka du vienodi skaitmenys - arba 2 vienetai arba 2 dvejetai ir jų suma tikrai nesidalija iš 3.

Galiausiai, jeigu ant stalo yra 2 vienetai ir 2 dvejetai, tai tada, ką beimtų pirmasis, lai tą patį ima ir antrasis ir vėl ant stalo liks 2 vienodi skaitmenys, o tai pirmojo žaidėjo pralaimėjimas, ką mes nujautėme ir pranašavome, o dabar dar ir įrodėme.

XIV SKIRSNELIS
MONOTONIŠKI SKAIČIAI

Sveiką teigiamą (arba kitaip vadinant natūrinį) skaičių *N* vadiname monotonišku, jeigu atsiras toks skaičius sveikas teigiamas skaičius *M*, kad jų sandaugai $N \times M$ užrašyti pakanka vienintelio skaitmens.

Pavyzdžiui, 12 345 679 yra monotoniškas skaičius, nes

$$12\,345\,679 \times 9 = 111\,111\,111.$$

Priminsime, kad ši lygybė naudojama patikrinti, ar gerai veikia skaičiuoklis.

Pirmasis labai natūralus klausimas. O gal visi skaičiai monotoniški?

Tikrai, visi vienaženkliai skaičiai arba skaitmenys 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 monotoniški patys savaime, nes jie vienaženkliai.

Deja, idilija tuo ir baigiasi, nes jau 10 yra toks skaičius, kurio antruoju skaitmeniu 0 niekada neatsikratysime, o kitokių skaitmenų sandaugoje iš nenulinio skaičiaus visada bus.

Pamokyti patirties tada klauskime, o gal visi sveiki teigiami skaičiai nesibaigiantys nuliu yra monotoniški?

11 iš karto monotoniškas, o 12 kaip? Kaip nežinant susivokti, kad padauginę jį iš 37, gauname 444?

Gal taip. Kad vienas kuris iš vienodais skaitmenimis parašytų skaičių *A*, *AA*, *AAA*, AAAA,.... dalytųsi iš 12, jis turi dalytis iš 3 ir iš 4. Todėl tiktų 444, nes jis aiškiausiai dalijasi iš 4, o iš 3 jis dalijasi todėl, kad jo skaitmenų suma yra 12 (o ji dali iš 3).

O su „velnio tuzinu“ 13 kaip yra? Čia galima imti skaičių su daug vienetų ir mėginti jį dalinti kampu iš 13, kol „pasidalins“.

Ar tai greitai įvyks? Pasižiūrėkime

$$\begin{array}{ll} 111111 & /\underline{13} \\ \underline{104} & 8547 \\ \ \ 71 & \\ \ \ \underline{65} & \end{array}$$

61
<u>52</u>
91
<u>91</u>
0

Na, žinoma, lyg mes kada būtume pamiršę, kad

$$111\,111 = 111 \times 1001, \text{ o } 1001 = 7 \times 11 \times 13.$$

Ar, sakykime, 155 yra monotoniškas skaičius?

Jūs gal nustebsite, bet

$$3\,584\,229\,390\,681 \times 31 = 111\,111\,111\,111\,111$$

vadinasi,

$$3\,584\,229\,390\,681 \times 155 = 555\,555\,555\,555\,555.$$

Koks yra pats mažiausias triženklis monotoniškas skaičius? Atsakymas dar paprastesnis.

XV SKIRSNELIS
ARBA KĄ DARYTI, KAI NEŽINAI KO GRIEBTIS?

Tai labai gyvenimiška situacija, kadangi mes kone kiekvieną dieną susiduriame su reikalais, su kuriais niekada nebuvome susidūrę, sutinkame tokių žmonių, į kuriuos panašių niekada nebuvome matę, arba girdime aplinkinius kalbant kalbas, kurių niekada nesame girdėję, ir turime atlikti darbus, kurių niekada nesame darę. Turbūt, panašiai jaučiasi ir kosmonautai, atsidūrę nesvarumo būsenoje – viskas klostosi kitaip nei įprasta. Tai įdomu, šiek tiek baugu, ir mūsų protas meta visas jėgas, energiją, patirtį ir sveiką nuovoką iškilusiems reikalams spręsti.

Paprasti bet gražūs matematikos uždaviniai leidžia labai naudingai modeliuoti tokias situacijas, tinkamai pasirenkant galima jų sudėtingumo lygį ir, kas labai svarbu – mes galime, jeigu nesiseka, (kuriam laikui) atsitraukti, apmąstyti susidariusią situaciją ir vėl prie tų reikalų sugrįžti – nes viskas vyksta mūsų galvose, o su iškilusiais sunkumais galynėjasi visa mūsų esybė – širdis, protas, valia ir jausmai.

Štai viena tokia užduotis, graži ir netikėta, nors kiekvienam netingintčiam parašinėti skaičius prieinama - Lietuvos Olimpiados baigiamajame, trečiajame rate spręsta - ir vis tiek tokia, kur pavyzdį gali rasti kiekvienas, nebijantis daugybos lentelės – o ko gi jos bijoti?

Arba uždavinys apie dešimtženklis save koduojantį skaičių

Skaitytojas tuoj supras, ką tai reiškia.

Reikia rasti tokį dešimtženklį skaičių – vadinasi, pirmasis jo skaitmuo ne nulis – kurio pirmas skaitmuo pasako, kiek nulių yra to skaičiaus dešimtainėje išraiškoje, antrasis skaitmuo – kiek toje išraiškoje vienetų, trečiasis skaitmuo – kiek dvejetų ir t.t., galiausiai, paskutinis, dešimtasis skaitmuo – kiek toje išraiškoje devynetų.

Žinoma, kai mūsų prašo rasti vieną tokį skaičių, tai iš mūsų tikisi, kad mes radę vieną tokį skaičių, mes kartu pasižiūrėsime ir suprasime ir kaip rasti visus tokius skaičius.

Pirmiausiai kuklus tikslas, arba kaip rasti nors vieną tokį skaičių?

Jeigu mūsų prašo mums iki tol nematytame mieste rasti žmogų, kalbantį abisinų kalba, tai mes visada turime dvi galimybes: arba ieškoti informacijos apie abisinų kalbos plėtrą visame pasaulyje ir gal net apie apskritai apie visų kalbų išplitimą visame pasaulyje, arba, išmokę kelis abisiniškus žodžius, galime pamėginti drąsiai išeiti į to miesto gatves ir kartodami juos kiekvienam sutiktam praeiviui, klausti jo, ar jis juos supranta?

Manome, kad matematikoje, kaip ir kasdieniame gyvenime, antrasis kelias gerokai perspektyvesnis.

Kaip tai atrodytų mūsų atveju?

Gal paimkime bet kokį 10-ženklį skaičių ir pasižiūrėkime, ar jis nors kiek panašus į mūsų ieškomą skaičių?

Gal imkime patį ramiausią skaičių 1 111 111 111.

Mūsų uždavinio pasaulyje tai reikštų, kad jame yra vienas nulis, o tai iš karto mums sako „stop", nes mūsų skaičiuje nė vieno nulio nėra. Iš karto supratome, kad jeigu tas skaičius yra 10-ženklis o jo pirmas skaitmuo registruoja jo nulių skaičių, tai kadangi jis ne nulis, tai mums tinkančiame skaičiuje nulių tikrai turi būti.

Imkime kitą kokį nors kultūringą skaičių, pavyzdžiui, kad ir tokį:1 234 567 089. Tas skaičius dar labiau netinka, nes jame turėtų būti 1 nulis, 2 vienetai, 3 dvejetai, 4 trejetai, 5 ketvertai. Stop, tiek skaitmenų 10-ženkliame skaičiuje nėra, nes $1 + 2 + 3 + 4 + 5$ tai jau 15, o mūsų skaičius, primename, turi tik 10 skaitmenų.

Ir į galvą ateina paprasta mintis: kadangi 10-ženkliame skaičiuje yra 10 skaitmenų, tai to mūsų ieškomo 10-ženklio skaičiaus, jeigu tik toks yra, skaitmenų suma turi būti lygi10-čiai, todėl tokio skaičiaus skaitmenys, matyt, yra nedideli ir jame yra daug nulių.

Po šios minties natūralu pradėti rūšiavimą pagal galimą nulių skaitmenį, pradedant kad ir nuo paties didžiausio įmanomo nulių skaičiaus ir laipsniškai leidžiantis žemyn.

Kiek daugiausiai nulių gali būti tokiame skaičiuje?

Visi 10 skaitmenų negali būti lygūs nuliui, nes nulius ženklina skaitmenys, o 10 jau ne skaitmuo, o dviženklis skaičius, jau nekalbant apie tai, kad skaičius su 10-čia nulių nėra 10-ženklis.

Sekantis atvejis būtų, kad skaičiuje yra 9 nuliai, arba skaičius atrodo taip: 9......1.....(Primename, kad skaičiaus skaitmenų suma turi būti lygi 10). Tada tas vienetas turi ženklinti esančius devynetus, vadinasi, jis yra paskutinis skaitmuo.

Todėl kandidatas atrodo taip:

9 000 000 001.

Tačiau tuo atveju ir antrasis skaitmuo yra 1, nes tame skaičiuje yra 1 vienetas ir juos reikia ženklinti ir vėl viskas griūna, nes vėl to skaičiaus visų skaitmenų suma prašoka 10, jau nekalbant apie tai, kad dabar jau būtų 2 vienetai ir antrasis skaitmuo turėtų būti 2 o tai dar blogiau skaičiaus skaitmenų sumai.

Taigi ir bandymas su pirmuoju skaitmeniu 9 žlugo.

Sekantis bandymas. O jeigu skaičiuje būtų 8 nuliai arba kad jo pirmasis skaitmuo būtų 8. Tada arba kur nors galėtų rastis vienas 2, arba kažkur dviejose vietose po 1.

Pirmuoju atveju, jeigu būtų dvejetas, tai jis turėtų žymėti kokius nors 2 skaičius, bet tai ne nuliai, nes jų daugiau, o kitokių negali būti, ir vėl visų to ieškomo skaičiaus skaitmenų suma negalės būti 10.

Tai gal gali būti – antras atvejis – kad pirmas aštuonetas eina su 2 kažkur esančiais vienetais. Tada vienas 1 koduotų patį aštuonetą, arba turėtume skaičių 8 ... . 10, o tada kitą tą jau esantį aštuonis nulius koduojantį 1 tegalėtų koduoti galimas antrasis vienetas, arba atsirastų skaičius 8 1... ... 10 bet tą pačią akimirką jau būtų blogai, nes vienetų jau 2, tada ir juos reikia koduoti mažiausiai dvejetu, o kad tai blogai 10 lygiai skaitmenų sumai, vėl prašokančiai 10, vadinasi, vėl negerai ir taip būti negali.

3 bandymas su 7 nuliais arba dabar imamės skaičiaus 7 ..... 100. Vienetą vėl reikės koduoti, bet 1 iškart po 7 negalime rašyti , nes tada tų 1-tų būtų jau 2, tai po 7 iškart reikėtų rašyti 2, bet jei po 7 rašome 2, tada vienetas vėl jau tik 1 ir padėtis tokia, jeigu po 7 eina 1, tai po 7 turi eiti 2, o po 7 eiti 2 negali, nes tada iškart po jo turi eiti 1, o tada skaičiaus 721...100 skaitmenų suma nebe 10, o daugiau. Vėl blogai.

4 bandymas su 6 nuliais arba pradedame nuo skaičiaus 6......0 100. Vienetą vėl teikia koduoti, bet tada jų turi būti jau 2, tada reikia vienetu užkoduoti 2 ir taip gauname tinkamą skaičių

6 210 001 000,

kuris ir yra vienintelis įmanomas to uždavinio atsakymas.

Galima būtų rašyti ir lygtis, nors be konkrečios patirties tų lygčių užrašymas gerokai pasunkėtų ir be praktinio parašinėjimo būtų daug sunkiau įsivaizduojamas.

Dar kartą paaiškėja, kad eksperimentas kaip įsijautimas į susidariusią padėtį yra praktiškai niekuo nepamainomas dalykas. Tai paaiškina ir tai, kodėl mokykloje taip permainingai klostosi reikalai su kombinatorinių uždavinių sprendimu arba paaiškina tai, kad jie penktokui aiškesni negu abiturientu, kuris gavęs tokį uždavinį neretai pirmiausiai klausia, kokią gi čia formulę taikyti?

XVI SKYRELIS
DAR VIENAS DEŠIMTŽENKLIS NUOTYKIS

Yra žinoma, kad reikliam viršininkui įtikti yra nelengva, o kartais ir apskritai neįmanoma, pavaldiniai atvirumo akimirką kartais padejuoja sakydami: „būtų visai geras žmogus, tik per daug reikalauja“.

Pasižiūrėkime į vieną tokį uždavinį, kuris iš dešimtženklio skaičiaus iš pažiūros reikalauja tiek daug, kad, rodos, tokių reikalavimų nepajėgs išpildyti joks 10-ženklis skaičius.

Ar atsiras toks 10-ženklis skaičius ABCDEFGHIJ, kurio visi 10 skaitmenų skirtingi ir toks, kad skaičius A dalijasi iš 1, skaičius AB, sudarytas iš pirmųjų dviejų to skaičiaus skaitmenų, dalijasi iš 2, skaičius ABC, sudarytas iš pirmųjų trijų jo skaitmenų, dalijasi iš 3 ir t.t., galiausiai skaičius ABCDEFGHI dalijasi iš 9 ir pats tas dešimtženklis skaičius ABCDEFGHIJ dalijasi iš 10.

Pirmieji pastebėjimai

1. Jeigu tas visas skaičius dalijasi iš 10, tai jis baigiasi nuliu ($J = 0$) .

2. Jeigu *ABCDE* dalijasi iš 5, tai jis gali baigtis tik 0 arba 5. Kadangi 0 jau užimtas paskutinėje skiltyje, tai $E = 5$.

3. Pirmasis skaitmuo *A* gali būti bet koks, juo nėra ko rūpintis.

4. Kadangi paskutinysis, dešimtasis skaitmuo $J = 0$, tai devynženklio skaičiaus *ABCDEFGHI* skaitmenų suma yra lygi visų nenulinių skaitmenų nuo 1 iki 9 sumai, arba skaičiui $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45$, kuris dalijasi iš 9, todėl ir pats devynženklis skaičius dalijasi iš 9.

Kitaip sakant, ir dėl dalumo iš 9 nereikia sukti galvos.

5. Antrasis, ketvirtasis, šeštasis ir aštuntasis skaičiaus *ABCDEFGHIJ* skaitmenys *B*, *D*, *F* ir *H* turi būti lyginiai. Todėl likusiose, arba pirmoje, trečioje, septintoje ir devintoje skiltyse bus nelyginiai skaičiai. Be to, kiekvienas antroje vietoje (skiltyje) esantis lyginis skaičius automatiškai užtikrina dalumą iš 2. Kadangi trečioje vietoje esantis skaičius yra nelyginis, tai skaičius *ABCD* dalijasi iš 4 tik kai *D* yra 2 arba 6.

Priminsime dalumo iš 8 požymį, kuris jį formulavome ir kuris yra akivaizdus: skaičius dalijasi iš 8 tada ir tiktai tada, kai skaičius sudarytas iš paskutiniųjų 3 jo skaitmenų, dalijasi iš 8. Sakysime 1976 dalijasi iš 8, nes 976 dalijasi iš 8.

Kadangi mūsų skaičius *ABCDEFGH* turi dalytis iš 8, o kadangi šeštasis skaitmuo turi būti lyginis, tai tada gana ir pakanka, kad *GH* dalytųsi iš 8. Kadangi 7-asis skaitmuo yra nelyginis, tai *GH* tegali būti arba 16, arba 32, arba 72, arba 96 (56 turime atmesti, nes 5 jau „įdarbintas“ 5-tuoju skaitmeniu). Pastebėkime, tad *ABC* turi dalytis iš 3, *ABC D5F* – iš 6, taigi, *D5F* dalijasi iš 3, o kadangi *ABC D5F GHI* dalijasi iš 9, tai ir *GHI* dalijasi iš 3

Jei *GH* yra16, tai *DEF* tegali būti 258, skaičius tada yra

*ABC*25816I*J* ir *I* gali būti tik 3, 7 arba 9, bet nei 163, nei 167, nei 169 nesidalija iš 3.

Jeigu GH yra 96, tada panašiai samprotaudami gautume 2 kandidatus

1472589630 arba 7412589630.

Viskas būtų gerai, bet nei 1472589, nei 7412589 nesidalija iš 7..

Jeigu *GH* yra 32, vėl nieko nerastume ir galiausiai fragmentas *GH* lygus 72 duotų vienintelį atsakymą

3 816 547 290

Matome, kad lyginiai skaitmenys tame vieninteliame tokiame 10-ženklyje skaičiuje lyginėse vietoje eina mažėjančiai, o nelyginiai eitų griežtai didėjančiai, jeigu 1 ir 3 nebūtų susikeitę vietomis.

XVII SKIRSNELIS
TVARKA KAIP ŽODYNE

Lietuvai įstojus į Europos sąjungą dar įdomesni pasidarė visokie gražūs kultūrinio, dvasinio, protinio ir kitokio paveldo reikalai.

Kiekviena valstybė, susisaistydama su kitomis, yra suinteresuota išlikti įdomi kitoms kaimynėms ir todėl turi stengtis ir pati kuo daugiau suvokti apie save ir mėginti tuo sudominti savo kaimynes.

Štai turime gražų ir šviesų žodį: **LIETUVA.**

Tame žodyje yra 7 raidės, visos jos yra skirtingos ir paklauskime savęs, kiek skirtingų kombinacijų gautume perstatinėdami jas visais galimais būdais ir išdėstykime jas leksikografine tvarka – arba kaip žodyne.

Stengdamiesi išlaikyti uždavinio struktūrinimo principus pradėkime nuo paties natūraliausio ir lengviausio klausimo:

1. Jeigu žodžio LIETUVA raides išdėstytume taip kaip žodyne, tai kuri tų raidžių perstata tame žodyne būtų pati pirmoji?

2. Kuri tų raidžių perstata būtų antroji ir kuri trečioji?

3. Kiek apskritai yra tų perstatų, žodynų terminais tariant vadinamų žodžiais, tokiame žodyne?

4. Kuris žodis būtų 2005 vietoje? (2000-taisias metais panašų uždavinį apie, suprantama, 2000-tąjį žodį autoriaus siūlymu sėkmingai sprendė „Kompiuterijos“ žurnalo, kuriam autorius rašo nuo 1998 metų, skaitytojai).

5. Kurioje vietoje atsidurtų pats įkvėpimą dirbti ir rikiuoti paskatinęs žodis *LIETUVA*?

ATSAKYMAI

1. Paėmus žodį *LIETUVA* sudarančias raides ir išrikiavus jas abėcėlės nustatyta eile, gautume, kad *A* yra pirmoji, *E* – antroji, *I* – trečioji, *L* – ketvirtoji, *T* – penktoji, *U* – šeštoji, galiausiai, *V* – paskutinioji, arba 7 raidė.

Todėl tame žodžio *LIETUVA* perstatų žodyne pirmasis žodis bus

AEILTUV

2. Dėl to, kuri perstata bus 2-oji ir kuri 3-oji malonumą nurodyti teisingą atsakymą paliekame skaitančiam šias eilutes.

3. Norinčiam garantuotai ir pasitikrinti, kuris gi žodis tame žodyne bus 2-asis ir 3-iasis, primintume, jog jeigu teturėtume tik 2 raides *A* ir *E*, tai iš jų tegalėtume sudaryti 2 kombinacijas, būtent, *AE* ir *EA*.

Jeigu turėtume jau 3 raides *A*, *E* ir *I*, tai dėstant leksikografine, arba žodyno tvarka, jau būtų 6 galimybės arba

AEI, *AIE*, *EAI*, *EIA*, *IAE* ir *IEA*.

Ar jau aiškiau dėl žodžio *LIETUVA* perstatų 2-osios ir 3-osios vietų tokiame žodyne?

Panašiai turėdami 4 raides (mūsų atveju *A*, *E*, *I* ir *L*) naujai atsiradusią raidę *L* galėtume parašyti prieš visas 6 raidžių *A*, *E* ir *I* perstatas – būtų pirmieji 6 atvejai, parašę *L* tarp pirmos ir antros raidės, gautume dar 6, tarp antros ir trečios raidės – būtų dar kiek pat, galiausiai parašę pabaigoje turėtume paskutinius 6 arba iš viso 24 atvejus.

Kadangi su 2 raidėmis yra $2 = 1 \times 2$ išdėstymo atvejai, su trimis – 6 arba $1 \times 2 \times 3$ atvejai, su 4 raidėmis jau $24 = 1 \times 2 \times 3 \times 4$ atvejai, tai kyla pagrįstų įtarimų, kad dėstant 5 raides visais galimais būdais tų atvejų bus jau $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5$ arba 120 atvejų, o turint 6 raides rasis jau $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 = 720$ galimybių, o su 7 raidėmis bus net $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7$ arba 5040 būdų.

Apskritai, jeigu būtų n skirtingų raidžių, tai norėdami suskaičiuoti visus būdus išrikiuoti jas visais galimais būdais reikėtų surasti visų skaičių nuo 1 iki n sandaugą, matematikoje nuo šimtmečių vadinamą n faktorialu ir rašomą specialiu vardu $n!$

Idomumo dėlei pasakykime, kad radę valgykloje 10 studentų ir panūdę juos išrikiuoti prie patiekalų arba į kasą visais galimais būdais turėtume jau $10! = 1 \times 2 \times 3 \times \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 \times 10 = 7! \times 8 \times 9 \times 10 = 5040 \times 8 \times 9 \times 10 = 40320 \times 90 = 3\ 628\ 800$, o tai jau maždaug Lietuvos gyventojų skaičius.

4. Ieškodami 2005 žodžio prisiminkime, kad tų žodžio *LIETUVA* perstatų žodyną sąlyginai galėtume suskirstyti į 7 skyrius po 720. Visi 720 pirmojo skyriaus perstatų arba žodžiai nuo 1 iki 720 prasidėtų raide *A*, nuo 721 iki 1440 – raide *E*, nuo 1441 iki 2160 - raide *I*, nuo 2161 iki 2880 – raide *L*, nuo 2881 iki 3600 – raide *T*, nuo 3601 iki 4320 – raide *U*, galiausiai nuo 4321 iki 5040 – raide *V*.

Taigi mes su tuo savo 2005-tuoju žodžiu pakliūname į 3 skyrių, arba į skyrių I, apimantį perstatas nuo 1441 iki 2160.

Trečiasis arba I skyrius dalysis į 6 smulkesnius skyrelius po 120, arba skyrelius *IA*, *IE*, *IL*, *IT*, *IU* ir *IV*.

Nesunku atskaičiuoti, kad 2005-tasis žodis pakliūva į priešpaskutinįjį skyrelį *IU*, kuriam priklauso 1921 – 2040 perstatos.

Skyrelis *IU* dalijasi į 5 skirsnelius po 24 žodžius. Mes vėl atsiduriame priešpaskutiniame skirsnelyje arba skirsnelyje *IUT*, kuriam priklauso 1993 – 2016 žodžiai.

Skirsnelis *IUT* skirstomas į 4 skirsneliukus po 6 žodžius. Mes vėl pakliūname į priešpaskutinį skirsneliuką *IUTL*, apimantį žodžius nuo 2005 iki 2010, ir dabar mes jame esame jau pirmi, todėl likusias raides *A*, *E* ir *V* reikia prijungti tokia eile, kokia jos eina raidyne.

Vadinasi, 2005-asis žodis visų galimų žodžio *LIETUVA* perstatų žodyne yra

IUTLAEV

XVIII SKIRSNELIS
RIEŠUTAI IR ŠOKOLADO LAUŽYMAS

Įsivaizduokime, kad mums reikia išspręsti tokį bendro pobūdžio uždavinį. Turime n x n šokolado plytą, sudarytą iš vienetinių šokolado dalelių. Ant kai kurių iš tų vienetinių šokolado dalelių pas mus atsiradęs Mažylis padeda po kvapnų riešutą. Po to priėjęs Karlsonas perlaužia tą šokolado plytą pagal griovelius į 2 stačiakampes dalis.

Klausimas rimtas: kiek mažiausiai riešutų turi išdėlioti Mažylis, kad bet kaip perlaužus tą plytą į 2 stačiakampes dalis, kurioje nors pusėje vis tiek bus bent n riešutų?

Psichologiniu požiūriu čia vėl susiduriame su didelio skaičiaus „kompleksu“ ir tikriausiai dar ir su tuo, kad uždavinys netradicinis ir todėl reikės gilintis arba įsijausti į naują situaciją.

Todėl vėl mėginkime situaciją prastinti, nelyginant ją prisijaukinti išlaikydami reikalų esmę ir pradėsime nuo visiškai paprasto atvejo, arba 2 × 2 šokolado plytelės ir klausimo, kiek mažiausiai tada riešutų gana būtų padėti kad bet kaip perlaužus 2 × 2 plytelę į dvi stačiakampes dalis vienoje kurioje stačiakampėje dalyje visada būtų nors 2 riešutai.

Šis paprasčiausiais atvejis visai aiškus, nes trijų riešutų čia gana – riešutus taip ir žymėsime raide *R*:

R	
R	***R***

O 2 riešutų ar nepakaktų?

Atsakymas: ne, nepakaktų. Bet šį atsakymą derėtų pagrįsti.

Jeigu tie du riešutai yra vienoje eilutėje arba viename stulpelyje, tada šokolado plytelę laužiame „tarp jų“ ir abiejose pusėse tebus tik po vieną riešutą.

Jeigu dviejų riešutų nėra nei jokioje eilutėje, nei jokiame stulpelyje, tai tada jie abu yra arba vienoje, arba kitoje įstrižainėje ir tada riešutai atsiskiria bet kaip laužiant.

Psichologiniu požiūriu sunku prisiversti griežtai samprotauti tokioje paprastoje situacijoje, bet tai yra būtina, nes kitaip galime prasilenkti su tiesa, o tai yra pats blogiausias dalykas, kuris ieškant tiesos gali nutikti.

Kitaip sakant, jeigu mes ieškome laimės 100 kambarių bute ir 99 kambariuose jos dar neradome, tai nevalia pamiršti, kad ji gali slėptis pačiame mažiausiame tame 100-tajame kambarėlyje ar net virtuvėje.

Kylame aukštyn ir dabar klausiame, kiek mažiausiai riešutų gana būtų išdėlioti, kad liktų bent 3 riešutai kad ir kaip beperlaužtume tą 3 x 3 plytelę į 2 stačiakampes dalis.

Jau turime šiek tiek patirties ir suprantame, kad 5 riešutų tikrai pakaks net ir bet kaip juos išdėliojus, nes vienoje kurioje nors pusėje neišvengiamai atsiras dauguma – o tai mažiausiai 3 riešutai, na pavyzdžiui, kad ir tvarkingai „kryžium“ tuos riešutus sudėliojus, nors pakartosime – šiuo kartu yra visiškai nesvarbu, kaip dėliosime.

	R	
R	*R*	*R*
	R	

Ar galima su mažiau? Galima. Nesunku matyti, kad iš mūsų „kryžiaus“ galima paimti bet kurį riešutą ir reikalai nenukentės ir laužiant per griovelius kurioje nors pusėje 3 riešutai garantuotai bus:

1. Jeigu nuimsime centrinį riešutą, vis tiek bet kaip laužiant į dvi stačiakampes dalis kurioje nors pusėje 3 riešutai bus:

	R	
R		*R*
	R	

2. Jeigu nuimsime ir kurį nors kraštinį, tai irgi bet kaip perlaužiant plytelę į dvi stačiakampes dalis vėl kurioje nors pusėje trys riešutai tikrai bus.

	R	
	R	R
	R	

O gal pavyktų nuimti dar vieną riešutą arba ar neišsiverstume su 3 riešutais? Negi negalima išdėlioti 3 riešutų taip, kad bet kaip laužiant jie visi liktų vienoje pusėje?

Aišku, kad taip nėra, bet vėl stenkimės priversti save nepriekaištingai mąstyti, o tai kai kada nelengva.

Taigi pradedame. Nagrinėjame iš eilės, kaip gali būti.

1. Jeigu kurioje nors eilutėje randame bent 2 riešutus, tai perlaužiame tarp jų.

2. Jeigu kuriame nors stulpelyje randame bent 2 riešutus, tai perlaužiame tarp jų.

3. Jeigu jokioje eilutėje ar stulpelyje nėra 2 riešutų, tai visi riešutai yra skirtingose eilutėse ir skirtinguose stulpeliuose ir tada laužti galima bet kaip ir vieną kurį riešutą mes visada atskirsime nuo likusiųjų dviejų.

XIX SKIRSNELIS
JAU 4 × 4 ŠOKOLADAI

Iš 5 riešutų sudėtas riešutų „kryžius“ rodo, kad 5 riešutų pakanka 4 × 4 matmenų šokolado plytelei:

	R		
R	***R***	***R***	
	R		

Kad 4 riešutų ne gana, galėtume įsitikinti, žodis žodin pakartodami baigiamąjį 3 × 3 šokolado plytelės samprotavimą.

Lyrinis intarpas apie galimus skubotos analogijos pavojus

Pasidairykime, ką mes išsiaiškinome: 2 × 2 plytelei gana 3 riešutų, 3 × 3 plytelei - 4, o 4 × 4 plytelei – 5 riešutų. Ko mes galime tikėtis 5 × 5 šokolado plytelėje?

Pažiūrėjus į prieš tai buvusius skaičius gali pirštis mintis, kad reikės mažiausiai 6 riešutų, nes kad 5 nepakaks yra visiškai aišku. Pamėginkite išdėlioti 6 riešutus taip, kad bet kaip laužiant 5 riešutai liktų vienoje kurioje nors pusėje ir pamatysite, kad nieko neišeina.

Tai ką, negi žlugs toks, atrodo, aiškus dėsningumas, kad „n x n plytelėje gana n + 1 riešuto?“.

O kad 7 riešutų 5 × 5 plytelėje pakanka, rodo toks pavyzdys:

	R	***R***		
R	***R***	***R***		
R	***R***			

O su 6 riešutais, kad ir kaip vargstame, nieko neišeina. Tai ką, gal tik mes nemokame vargti? Gal kitas tą vargą išvargtų?

Žūsta toks paprastas – todėl ir patrauklus dėsningumas.

Kompiuteriu čia dar galima būtų verstis įpareigojant mūsų draugą kompiuterį perrinkti visus galimus riešutų dėlionės atvejus. Bet šokoladui didėjant ir kompiuteriui gali pasidaryti per sunku.

Ką gi daryti?

Teks priversti save tiksliai samprotauti stengiantis gauti aiškią prieštarą tam, kad 6 riešutų nepakanka?

Bet kaip ją gauti?

Samprotavimas. Sakykime, kad 6 yra tas mažiausias riešutų skaičius, kurį gana padėti, kad bet kaip laužiant į 2 stačiakampes dalis, kurioje nors dalyje vis tiek bus bent 5 riešutai.

Pirmą kartą perlaužkime plytelę vertikaliai kuo arčiau kairiojo krašto taip, kad toje iš kairės atlaužtoje dalyje jau būtų 5 riešutai, antrą kartą vertikaliai perlaužkime kuo arčiau dešiniojo krašto, kad dabar jau dešinėje pusėje būtų 5 riešutai.

Kadangi padėtų riešutų skaičius minimalus, tai kairioji ir dešinioji atlaužtosios pusės turės vienintelę bendrą vertikalią 1×5 matmenų juostelę.

Trečią ir ketvirtą kartą perlaužkime horizontaliai atitinkamai kuo arčiau viršaus (ir, atitinkamai, kuo arčiau apačios), kad viršuje (ir atitinkamai apačioje) jau būtų 5 riešutai.

Vėl viršus su apačia turės vienintelę bendrą horizontalią 5×1 matmenų juostelę.

Suskaičiuokime visų kairėje, dešinėje, viršuje ir apačioje esančių riešutų skaičių. Jis bus ne mažesnis už 5×4 arba už 20.

Dabar pastebėkime, kad abi tos „ribinės" juostelės – horizontalioji ir vertikalioji - sudarys „kryžių" ir kad kiekvieną riešutą mes įskaičiavome daugiausiai 3 kartus ir tik vienintelį „kryžiaus centro" langelyje esantį riešutą (jei tik jis ten buvo padėtas) mes galėjome įskaičiuoti 4 kartus. Todėl kairėje, dešinėje, viršuje ir apačioje mes tegalėjom priskaičiuoti daugiausiai $3 \times 6 + 1$ arba 19 riešutų, o tai nėra daugiau už 20, kaip kad turėtų būti.

Vadinasi, 6 riešutų nepakanka.

Atkreipkime dėmesį, kad šis samprotavimas tinka ir didesnių matavimų šokolado plytoms.

Primygtinai siūlytume skaitytojui pasižiūrėti, kiek mažiausiai riešutų reikėtų sakysime atveju 10×10.

O išsprendę atvejį $n = 100$, turėtumėte dar vieną Sankt-Peterburgo Olimpiadoje spręstą gražų uždavinį.

XX SKIRSNELIS
KĄ DARYTI, KAI NELABAI AIŠKU, KAIP SUMAŽINTI DIDŽIULĮ SKAIČIŲ?

1 atvejis: būna , kad mažinti nėra kaip.

Gerai, pasakys skaitytojas, jau girdėjome siūlymą pamėginti sumažinti sąlygoje randamą didžiulį skaičių neprarandant uždavinio intrigos arba jo esmės. O ką daryti, kai mažinti neišeina, kaip kad pavyzdžiui tame vėl, matyt, Sankt–Peterburge gimusiame uždavinyje, paimtame iš 2002 metų miesto Olimpiados rinkinio?

Įrodykite, kad iš kiekvieno dešimtženklio skaičiaus, kuriame nėra nulių, vis tiek galima „išsikirpti" arba 3 skaitmenų, arba 4 skaitmenų, arba 7 skaitmenų ilgio „fragmentą", kuris dalijasi iš 3.

Mažinti čia tikrai nesimato kaip, o dešimtženkliai skaičiai – tai milijardas arba keli ir dar su šimtais milijonų ir į kiekvieno tokio skaičiaus neparašysi.

O išsiaiškinti būtų smalsu.

Beje, galimo sprendėjo smalsumo pažadinimas yra labai rimtas psichologinis uždavinys, nes dažnai skaitytoją negraži sąlyga atstumia, o jei ir neatstumia, tai ir nepatraukia (o tai beveik taip pat blogai), ir jis to uždavinio nesiima.

Todėl potencialaus sprendėjo įtraukimas į tiesos paiešką yra pirmaeilis uždavinys ir čia dar daug galima ir reikia daryti, nes tie dirvonai tikrai dar menkai praarti.

1 paprastas neblogas patarimas.

Paimkite kokį nors tinkamą pavyzdį ir panagrinėkime jį.

Mes puikiai suprantame, kad vienas pavyzdys joks ne įrodymas, kad visada kas nors bus, tačiau nors pavyzdys - tikrai ne įrodymas, tačiau neabejotinas informacijos šaltinis.

Na, paimkime, kad ir kokį „netvarkingą“ skaičių 4 357 892 183 ir matome kad čia jau pirmasis triženklis fragmentas 435 dalijasi iš 3.

Dabar paklauskime, ką mes sužinojome iš to konkretaus pavyzdžio?

Atsakysime: pamatėme, kad 10-ženklis skaičius be nulių turi 7 triženklius, 6 keturženklius ir 4 septynženklius „fragmentus“ (sąlyga „be nulinių skaitmenų“ garantuoja mums, kad jie visi tikrai turės tiek ženklų, kiek sakėme).

O po to jau matome ir švelnų judesį: kadangi tikrai gerai žinome, kad skaičius duoda tokią dalybos iš trijų liekaną, kokią duoda ir jo skaitmenų suma, tai mes galime skaitmenų 1, 4 ir 7 rašyti vienetus, vietoj 2, 5 ir 8 – rašyti dvejetus, o vietoj 3, 6 ir 9 – trejetus ir toliau nagrinėti tik dešimtženklius skaičius užrašomus vienetais, dvejetais ir trejetais.

O toliau? Jeigu dvejojame, paimkime dar vieną pavyzdį, dabar jau tik su vienetais, dvejetais ir trejetais – taip kiek paprasčiau.

Na, kad ir tokį atsitiktinį skaičių – 2 212 233 221

Šis skaičius ne iš karto tinka, nes jokios iškarpos po 3 ir net po 4 skaitmenis, regis tikrai nesidalija iš 3, nes „iškarpų“ po tris skaitmenų sumos yra atitinkamai

5, 5, 5, 7, 8, 8, 7 ir 5.

„Iškarpų“ po 4 skaičius skaitmenų sumos yra atitinkamai

7, 7, 8, 10, 10, 10 ir 8.

Beliko „iškarpos“ po 7 ir jau pirmoji suma $2 + 2 + 1 + 2 + 2 + 3 + 3$ yra lygiai 15.

Beliko dar kažką pastebėti ir galėsime baigti sprendimą – panašu, kad judame teisinga linkme.

Pradėkime baigti.

Imkime septynženklį 10-ženklio skaičiaus fragmentą *ABCDEFG*. Jeigu jis dalijasi iš 3, tai viskas padaryta, daugiau mums nieko nereikia. Jeigu tas fragmentas iš trijų nesidalija, tai jo dalybos iš 3 liekana yra 1 arba 2. Padalykime jį dviem būdais į du fragmentus *ABC* ir *DEFG* ir dar kitaip į du fragmentus *ABCD* ir *DEF*. Nei vienas iš tų fragmentų iš 3 nesidalija, nes kitaip vėl viskas būtų baigta.

Nagrinėjame 2 atvejus:

(a) fragmente *ABCDEFG* dalybos iš 3 liekana yra 1, ir kitas galimas atvejis

(b) fragmento *ABCDEFG* dalybos iš 3 liekana yra 2.

Pirmuoju atveju skaičiaus *ABC* dalybos iš 3 liekana gali būti tik 2 (jeigu ji būtų 1, tai likęs fragmentas *DEFG* dalytųsi iš 3). Tada skaičiaus *DEFG* dalybos iš 3 liekana irgi lygi 2.

Lygiai tokios pat turi būti ir skaičių *ABCD* ir *DEF* dalybos iš 3 liekanos.

Gavome štai ką – skaičių *ABC* ir *ABCD* dalybos iš 3 liekanos yra vienodos, o tai reiškia, kad vidurinis skaičiaus *ABCDEFG* skaitmuo *D* yra 3.

Lygiai tas pats būtų ir atveju (b), tik tada fragmentų liekanos būtų po 1 ir vėl gautume, kad vidurinis skaitmuo *D* yra 3.

Kadangi tą fragmentą galima stumdyti, nes jų dešimtženklyje skaičiuje iš viso yra 4, tai gautume net 4 iš eilės einančius trejetus (mums pakaktų ir 3 iš eilės einančių trejetų) ir todėl mūsų teiginys yra įrodytas.

Pakartokime: mes įrodėme, jog iš kiekvieno 10-ženklio skaičiaus be nulių galima paimti tokius iš eilės einančius 3, 4 arba 7 skaitmenis, kad iš jų sudarytas triženklis, keturženklis arba septynženklis skaičius dalijasi iš 3.

Nieko negarantuodami, siūlome skaitytojui išnagrinėti tokį uždavinį:

6-ženklio skaičiaus visi skaitmenys skirtingi.

Ar galima jame paimti 2 arba 3 iš eilės einančius skaitmenis, kad iš jų sudarytas dviženklis arba triženklis skaičius dalytųsi be liekanos iš 3?

Kitas atvejis arba kai mažinti pasiseka

XXI SKIRSNELIS
NŪDIENOS VĖJAI ARBA APIE VERSLO PSICHOLOGIJĄ

Jeigu norime pažadinti žmogaus smalsumą, galime pasiūlyti jam kokią nors iš pirmo žvilgsnio visiškai neįmanomą situaciją ir paklausti, ar taip gali būti ar ne. Žmogus iš prigimties linkęs susivokti, kokie čia yra galimi vadinamieji ekstremalūs arba, išvertus iš kalbų, krašt(ut)iniai atvejai ir mėgsta suvokti, ar jie apskritai įmanomi.

Pas baltarusius esame radę tokį paprastą bet pamokomą uždavinį, kurį, lengvai beletrizavę, pateikiame kaip vieno verslininko pirmųjų veiklos metų balanso atpasakojimą. Į tokius pagyvinimus galima žiūrėti atsargiai, gal net atsainiai, bet autorius tiki ir praktika tai beveik be išlygų patvirtina, kad jei bent kiek vykusiai atlikta, ji turi savo vertę ir vietą. Autorius šią beletrizaciją yra paskelbęs žurnale „Kompiuterija“.

„Sunki yra verslo pradžia“ pasakojo senas verslo liūtas savo jauniesiems kolegoms pradėdamas paskaitą „Verslo optimizmo klausimai“. Štai ir aš, menu kaip šiandien, kad mano pirmųjų verslo metų kiekvienų 5 iš eilės einančių mėnesių balansas buvo neigiamas – išlaidos viršijo pajamas.

„Tai kur čia tas optimizmas“ – pasigirdo balsas iš salės.

„Ogi ten, kad visų mano pirmųjų metų balansas buvo teigiamas, arba visos mano ištisų metų pajamos viršijo visų metų išlaidas“ – ramiu balsu atkirto verslo liūtas.

Negi tai įmanoma?

Čia yra psichologinių sunkumų, kurie natūraliai atsiranda skiriant vadinamuosius tipinius arba įprastus atvejus nuo ne kasdien arba apskritai retai nutinkančių, bet įmanomų galimybių arba vadinamųjų atskirų arba šiuo atveju retų atvejų.

Uždaviniuose tokiais atvejais dažnai atvirai patariama ir sakoma: **panagrinėkime patį blogiausią (neparankiausią) atvejį (galimybę).**

Šioje situacijoje tipinis atvejis, aišku, būtų tas, kad jeigu kiekvienų 5 iš eilės einančių mėnesių balansas neigiamas, tai dažniausiai neigiamas bus ir visų tokių metų balansas.

Dažniausiai, niekas nesiginčija, bet neaišku ar visada.

Žemiau esančioje lentelėje metų mėnesiai pažymėti pirmosiomis dviem jų pavadinimų raidėmis (išskyrus 2), o antrojoje eilutėje nurodytas to mėnesio balansas.

Mėnesis	**Sa**	**Va**	**Ko**	**Ba**	**Ge**	**Bi**	**Li**	**Rugj**	**Rugs**	**Sp**	**La**	**Gr**
Balansas	**2**	**2**	**2**	**-9**	**2**	**2**	**2**	**2**	**-9**	**2**	**2**	**2**

Aiškiai matome, kad kiekvienų penkių iš eilės einančių mėnesių bendras balansas yra neigiamas (ir visada –1), ištisų metų – visgi teigiamas ir lygus 2.

XXII SKIRSNELIS
DAR APIE KONKREČIŲ SKAIČIŲ ŽAVESĮ

Angliškose gražesnių uždavinių knygose teko matyti tokį uždavinį, kurį mes pateiksime truputį struktūrindami arba kitaip sakant pamažėle įvesdami skaitytoją į jo sprendimą mėgindami jį sudominti ir tuo pačiu padėdami įsijausti į jį.

Taigi pradžioje yra ieškomas nesvarbu koks nors skaičius, kurio dešimtainiame užraše dalyvauja vien tik dvejetai ir trejetai – ir bent vienas dvejetas, ir bent vienas trejetas būtinai yra – ir dar kad tas skaičius turi dalytis ir iš 2, ir iš 3.

Mintyse iš karto iškyla abu tie požymiai – juos žino kiekvienas save gerbiantis aštuntokas – skaičius dalijasi iš 2, jeigu to skaičiaus paskutinis skaitmuo yra lyginis ir iš 3, jeigu to skaičiaus skaitmenų suma dalijasi iš 3.

Todėl jeigu skaičius užrašomas išimtinai tik dvejetais ir trejetais ir dalijasi iš 2 vadinasi, jo paskutinis skaitmuo tegali būti tik 2. Kad jis dalytųsi iš 3, jo skaitmenų suma turi dalytis iš 3 ir dar priminsime, kad bent vienas trejetas irgi turi būti.

Todėl galime paimti skaičių 32 ir, pastebėję, kad jo skaitmenų suma 2 + 3 yra 5 galime priauginti du kartus prie savęs. Tada gausime skaičių

323232,

kuris tikrai dalijasi iš 3, nes jo skaitmenų suma yra 15, o iš 2, kaip sakyta jis jau dalijasi vien jau dėl to, kad jo paskutinis skaitmuo yra lyginis.

Dabar kai jau radome vieną tokį skaičių, natūralu paklausti apie patį mažiausiąjį tokį skaičių.

Ir dabar paskutinis jo skaitmuo bus nepajudinamai dvejetas, o dar reikia panaudojus nors vieną trejetą surinkti iš 3 dalią skaitmenų sumą.

Jeigu skaičiaus užraše yra ir 2, ir 3, tai jo skaitmenų suma yra bent 5, sekantis dalus iš 3 skaičius yra 6, bet jo tada dvejetais ir trejetais, kad būtų ir tokių, ir tokių nesurinksime, tad sekanti viltis yra skaičius su skaitmenų suma 9, toks skaičius surenkamas iš 3 dvejetų ir 1 trejeto.

Kad tas skaičius būtų pats mažiausias iš visų galimų tą 3 reikia rašyti „kuo arčiau galo“, bet ne pačiame gale, todėl pats mažiausias skaičius bus skaičius

2232.

O dabar jau pats skaitytojas gali išspręsti analogišką uždavinį su 8 ir 9 arba iš pradžių lai jis pabando rasti skaičių, užrašomą vien aštuonetais ir devynetais ir besidalijantį iš 8 ir 9, o jau vėliau standartiškai – ir patį mažiausiąjį tokį skaičių.

Uždavinį galima kelti bet kuriems dviems skaičiams – pamėginkime paklausti su 7 ir 8 – uždaviniai su skaičiais yra visada įdomūs, nes aišku ir, ko klausiame ir visai aišku, ką maždaug reikėtų daryti.

Įdomu, kaip čia mums seksis, nes nėra tokio labai greito dalumo iš 7 požymio. Su 8 yra daug geriau, nes skaičius dalijasi iš 8, jeigu skaičius, sudarytas iš 3 paskutiniųjų jo skaitmenų, dalijasi be liekanos iš 8.

Todėl suprantama, jeigu skaičius dalijasi iš 8, tai jis dalijasi ir iš 2, todėl jo paskutinis skaitmuo yra lyginis, todėl šiuo atveju, kai tegalime rinktis tik iš 7 ir 8, tas paskutinis skaičius bus 8, toliau, jeigu jo priešpaskutinis skaitmuo būtų 7, tai jis nesidalytų iš 4, o privalo, nes dalijasi iš 8, todėl ir jo priešpaskutinis skaitmuo 8, o kadangi 788 = 800 – 12 tikrai nesidalija iš 8, todėl ir jo trečiasis iš galo skaitmuo turi būti irgi 8.

Vadinasi, toks skaičius turi baigtis trimis aštuonetais arba 888, o dar mums reikia panaudoti nors vieną 7, todėl mažiausias kandidatas galėtų būti tik skaičius 7888, bet jis nesidalija iš 7, nes 888 nesidalija iš 7, o 888 nesidalija iš 7, nes 888: 8 =111 nesidalija iš 7.

Sekantis kandidatas į mažiausius tokius skaičius būtų skaičius 78888, bet ir jis iš 7 nesidalija.

Taip pamažu aptiksime skaičių

$$7\,888\,888,$$

kuris ir yra pats mažiausias iš visų įmanomų tokių skaičių.

XXIII SKIRSNELIS
DAR DU GRAŽŪS UŽDAVINIAI SU KONKREČIAIS SKAIČIAIS

Kažkada prieš gerą dešimtmetį Sankt-Peterburgo gražių uždavinių knygelėje teko matyti tokį uždavinį:

Įrodykite, kad skaičius

$$40 \times 66 \times 96 + 53 \times 83 \times 109 = 732\,931$$

nėra pirminis skaičius, arba, kitaip sakant, toks, kuris dalijasi be liekanos ne tik iš 1 ir pats savęs, bet ir dar iš kokio nors kitokio skaičiaus.

Kompiuteriui tas uždavinys būtų kelių sekundžių reikalas, nes tas skaičius jam yra mažylis, matome, kad jis net yra mažesnis už milijoną. Jam tokie nedideli skaičiai didelio įspūdžio nedaro, nes veiksmus su jais – tokius kaip tokio skaičiaus daugiklių paieška – jis baigia greitai.

Bet, sutikime, kad ir mums kai kada malonu, psichologiškai žiūrint, kompiuterio greičiui priešpastatyti mūsų sumanumą, patirtį ir nuovokumą.

Dar paprastesniam pasimankštinimui galime pasiūlyti uždavinį su tokia pačia sprendimo idėja tik su dar mažesniais skaičiais.

Įrodykite, kad skaičius

$$23 \times 27 \times 29 + 50 \times 52 \times 56 = 163\,609$$

nėra pirminis skaičius.

Dar paprasčiau – bet vis dar su ta pačia idėja būtų paprašyti nustatyti, kad ir skaičius

$$9 \times 13 \times 15 + 38 \times 40 \times 44 = 68\,635$$

taip pat nėra pirminis skaičius.

Pamėgink, skaitytojau, nesvarbu, ar su ar be kompiuterio išspręsti šiuos uždavinius.

Jeigu pirmiau pasikinkysi kompiuterį, tai kai atspausdins nors po vieną tikrą tų skaičių daliklį, tikrai kils paprastų aritmetinių minčių.

Skaitytojau, jeigu spręstum be kompiuterio, tai labai patariame panaudoti to skaičiaus struktūrą arba tai, kad jis yra dviejų (gana simetriškai vieno kito atžvilgiu išsidėsčiusių skaičių trejetų sandaugų

Dar viena skaitinė miniatiūra.

Vengriškose išminties knygose esu radęs tokį pratimą:

Įrodykite, kad skaičius $5^{12} + 2^{10}$ nėra pirminis t.y. turi ir kitų daliklių, ne tik vienetą ar patį save.

Vėl gi, neslėpkime, kad kompiuteriui toks skaičius būtų nykštukas ir daug įdomesnis psichologiškai žiūrint būtų toks uždavinys: kaip čia išsiversti be kompiuterio arba skaičiuoklio?

Be abejo, pirmiausiai esame skatinami pasinaudoti to skaičiaus „konstrukcine" struktūra, arba tuo, kad jis yra 12 sudaugintų penketų ir 10 sudaugintų dvejetų suma.

Ką gi mums gali „pakuždėti" to skaičiaus daryba?

Iš mokyklos laikų dažnai esame matę, kaip prie 2 skaičių kvadratų sumos, kaip mūsų atveju yra pridedama o paskui atimama dviguba tų skaičių sandauga. Pabandykime taip padaryti ir dabar.

$$5^{12} + 2^{10} = (5^6)^2 + (2^5)^2 =$$
$$= (5^6)^2 + 2 \times 5^6 \times 2^5 + (2^5)^2 - 2 \times 5^6 \times 2^5 =$$
$$= (5^6 + 2^5)^2 - 5^6 \times 2^6 = (5^6 + 2^5)^2 - (10^3)^2 =$$
$$= (5^6 + 10^3 + 2^5) \times (5^6 - 10^3 + 2^5) = 16\,657 \times 14657 .$$

XXIV SKIRSNELIS
ENERGINGI SKAIČIAI

Kita miniatiūra yra susijusi su vadinamaisiais **energingais** skaičiais. Tuoj pasakysime, kokius skaičius mes tokiais laikysime.

Skaičių A vadinsime energingu, jeigu jo skaitmenys, skaitant juos iš kairės į dešinę, didėja. Galėtume sakyti, tokie skaitmenys bent savo didėjimu „išperka" savo „mažėjančią įtaką" skaičiaus pozicinėje išraiškoje. Nes mes suprantame, kad pozicinė išraiška dėl to ir vadinasi pozicine, kad joje skaitmens reikšmė priklauso nuo užimamos pozicijos, kuo kairiau yra skaitmuo, tuo didesnė jo reikšmė skaičiaus didumui.

Klausimas būtų toks: kokia gali būti **devyneriopo energingo skaičiaus skaitmenų suma?**

Iš pirmo žvilgsnio gali pasirodyti, kad tos devyneriopo energingo skaičiaus skaitmenų sumos gali būti pačios įvairiausios.

Pati paprasčiausia mintis, matyt, būtų ta, kad to skaičiaus $9A$ skaitmenų suma, suprantama, dalinsis iš 9.

Paimkim visai nedidelį skaičių.

12 yra energingas skaičius. Dabar $12 \times 9 = 108$, o $1 + 0 + 8 = 9$. Imkim kitą energingą skaičių, kad ir 89. Dabar $89 \times 9 = 801$, o šio skaičiaus skaitmenų suma vėl 9.

Kažkaip nesiseka gauti ko nors kito kaip 9.

Dar pabandysime gauti kokią nors kitokią ne 9 lygią skaitmenų sumą, o jei dar kelis kartus nepasisektų gauti kitokios skaitmenų sumos, tai tada teks įrodinėti, kad kitaip ir būti negali.

Imkime trečią energingą skaičių 1378.

Tada $1378 \times 9 = 12402$, o šio skaičiaus skaitmenų suma $1 + 2 + 4 + 0 + 2 = 9$.

Prieš pradėdami įrodinėti dar paimkime patį didžiausią energingą skaičių

$$123456789$$

ir pažiūrėkime, negi ir vėl skaičiaus 9N skaitmenų suma bus 9?

Padauginę tą skaičių iš 9, gauname

$$9 \times 123\,456\,789 = 1\,111\,111\,101,$$

o šiame skaičiuje, kuriame, kaip matote, yra 9 vienetai ir jokių kitų nenulinių skaitmenų nėra, todėl ir jo skaitmenų suma vėl 9.

Dabar mes jau turime mėginti tai įrodyti. Atvirai sakant, psichologiškai požiūriu mes esame jau beveik įtikinti, kad bet kurio energingo skaičiaus N ir 9 sandaugos skaitmenų suma yra 9, nebent kas mus įtartų, kad tuos ankstesnius energingus skaičius mes rinkomės, švelniai sakant, ne visai pripuolamai.

Įrodymas susidės iš vieno tačiau labai esminio mikrojudesio, kuriuo šiuo atveju bus skaičiaus $9A$ užrašymas pavidalu $10A – A$ ir šios skirtumo ieškojimo atliekant atimtį stulpeliu.

Jeigu energingas skaičius A užrašomas, sakykime, išraiška $KLMNOPRST$, tai tada $9A$ gausime stulpeliu atlikę atimtį

$$\begin{array}{r} KLMNOPRST0 \\ KLMNOPRST\_. \end{array}$$

Dabar iš eilės išrašysime to skirtumo skaitmenis skaitant iš dešinės į kairę, arba pradedant nuo vienetų.

Vienetų skaitmuo, bus $10 – T$, toliau dešimčių skaitmuo, suprantama, bus ne $T – S$, kaip galėtų iš pirmo žvilgsnio pasirodyti, bet $T – S – 1$, nes „vieną jau skolinomės“ vienetų skiltyje, dar toliau eitų paprastai $S – R$, $R – P$, $P – O$, $O – N$, $N – M$, $M – L$, $L – K$ (nes „nieko nesiskolinome“) ir galiausiai paskutinysis skaitmuo yra K.

Todėl visų skaitmenų (tik dabar skaičiuojame kita eile nuo pačių aukščiausiųjų skilčių) suma yra

$$K + (L – K) + (M – L) + (N – M) + (O – N) + (P – O) + (R – P) + (S – R) + \\ + (T – S – 1) + (10 – \mathrm{T}) = 9,$$

ir kadangi visi raidėmis pažymėti skaičiai (teleskopiškai) „išsiprastina“ ir lieka tik –1 ir 10 suma, todėl ir gavome 9.

Turime nuoširdžiai prisipažinti, kad mūsų įrodymas, formaliai kalbant tinka tik devynženkliams energingiems skaičiams, (o toks skaičius yra vienintelis, ir mes jį jau tikrinome!), nes tai 123456789.

Dabar skaitytojas jau yra įtikintas, kad ir trumpesniems energingiems skaičiams viskas vyktų lygiai taip pat, tik būtų mažiau skaitmenų.

XXV SKIRSNELIS
PAPRASTŲ DALYKŲ ŽAVESYS ARBA KOPŪSTŲ DALYBOS

Uždaviniai dažnai, perfrazuojant vieną pastarųjų metų nusisekusio skelbimo frazę „išdygsta stačiai iš niekur“. Štai dar vienas toks pratimas.

Pas kiškį Strakaliuką atbėgo jo miško brolis piškis Makaliukas. Ant Strakaliuko stalo jau puikavosi vaišės – trys kopūstai, kiškių skanėstai, vienas – 300, kitas – 500, o trečias – 700 gramų svorio. Makaliukas kaip svečias, kopūsto galvą renkasi pirmas, po to iškart graužti imasi ir šeimininkas Strakaliukas. Abu jie graužia vienodu greičiu. Nuo kurio kopūsto reikėtų pradėti svečiui Makaliukui, kad jam kuo kliūtų kuo daugiau kopūstienos? Sveikas protas kužda, kad jam, kaip pirmajam besirenkančiajam sugraužti mažiau negu pusę ant stalo buvusių kopūstų svorio būtų nelabai sumanu.

Panagrinėkime visus įmanomus svečio Makaliuko pasirinkimus.

Pirmasis noras būtų griebti patį didžiausią arba 700 gr kopūstą. Tuomet šeimininkas kukliai pradės nuo 300 gr galvutės, o po to jam atiteks ir paskutinioji 500 gr galvutė (galėjo jis graužti ir atvirkščia eile). Vienaip ar kitaip, šeimininkas, kad ir besirinkęs antrasis sugebėjo sugraužti didesnę kopūstų svorio dalį.

Vadinasi, svečiui reikėtų pradėti kukliau.

Jeigu Makaliukas pradėtų nuo 300 gr galvutės, tai šeimininkui pasičiupus 500 gr kopūstą, Makaliukui atitektų ir 700 gr galvutė arba iš viso kilogramas kopūstų. Jeigu šeimininkas būtų pradėjęs doroti 700 gr galvutę, tai Makaliukui vis tiek būtų atitekęs ir likęs 500gr kopūstas, arba iš viso 800 gr, o tai daugiau vėl negu pusė bendro viso kopūstų svorio.

Ir vėl visai blogai svečiui Strakaliukui būtų pradėti nuo 500 gr galvutės, nes tada šeimininkas, sugraužęs 300gr kopūstą, spėtų pasiimti ir 700 gr galvutę.

Vadinasi, su tokio svorio galvutėmis svečias turi pradėti labai kukliai nuo 300 gr galvutės.

Atsakomojo vizito metu dabar jau šeimininkas Makaliukas deda ant stalo jau keturias kopūstų galvutes – atitinkamai 300, 500, 700 ir 900 gr svorio. Dabar pirmasis ims graužti svečias Strakaliukas. Negi ir dabar kuklumas pradedant ir daugiau negu pusės kopūstų svorio sugraužimas bus tas pats?

Jeigu svečias pradėtų nuo pačios didžiausios 900 gr galvutės, tai būtų ir nekuklus ir mažiau negu pusę kopūstų sugraužęs, nes kol jis grauš tą 900 gr, šeimininkas sudoros ir 300 ir 500 gr galvutes ir spės pradėti graužti dar ir tą paskutinę likusią 700 gr galvutę.

Tad svečiui būti godžiausiu negerai. Jeigu jis pradėtų nuo 700 gr galvutės, vėl ne kas, nes šeimininkas sugraužia 500 gr ir spėja paimti 900 gr galvutę, t.y., pradėjęs antras sudoroja daugiau negu pusę kopūstų.

Jeigu svečias pradeda nuo 500 gr galvutės, tuomet šeimininkas sudoroja 300 gr galvutę ir imasi 900-gramės užsitikrindamas pusę kopūstų svorio.

Na, o jeigu svečias norėtų pradėti kukliausiai griebtųsi 300 gr galvutės, tai šeimininkui neverta griebtis pačios didžiausios 900 gr galvutės, nes svečias paskui ramiai sudorotų 500 gr ir dar spėtų prie 700 gr galvutės. Jeigu šeimininkas ima kitaip – 500 ar 700 gr, tai viskas baigiasi taip, kad kiek kiekvienam atitenka po pusę kopūstų svorio.

Todėl ir atsakomojo vizito metu pirmasis imantysis gali pradėti kukliausiai.

O dabar tegu skaitytojas sumodeliuoja, kaip reikėtų optimaliai pradėti pirmajam, jeigu kopūstų ir vėl būtų jau 4, bet dabar jie svertų

300, 500, 700 ir 800 gramų?

O jeigu kopūstai ir toliau 7, bet jų svoriai jau

200, 210, 300 ir 310 gramų?

XXVI SKIRSNELIS
DABAR APIE ATEITĮ, NES APIE VAIKUS

Pasaulyje tikrai gyvena tokie vaikai vardais Aušrytė, Jonas, Andrius ir Justas. Norėtųsi tikėtis, kad užaugę jie bus ne tik dideli, bet ir kantrūs, ir geri žmonės.

Kas žino, gal kada nors su jais nutiks tokia istorija, kuri jau kartą buvo nutikusi su kitais keturiais vaikais.

Sėdi tie vaikai pas senelę, laukia sekmadienio pietų, kiekvienas su savo saldainių maišeliu. Kol senelė sukinėjosi po virtuvę, kepdama plokštainį, juos ištiko gerumo priepuolis – dažnas rimtų vaikų palydovas.

Staiga Aušrytė ir sako broliams:

– Broliai, jūs, mano broliai, nagi parodykit, kiek kautis saldainių turit ir aš kiekvienam iš savo saldainių maišo atseikėsiu dar po tiek pat saldainių. Ar sutinkat?

Na, ko spyriosies. Broliai sutiko.

Bet paskui nutiko dar gražesnis dalykas. Sesers kilnumu užsikrėtę broliai kiekvienas padarė lygiai tą patį. Iš pradžių Jonas, po jo Andrius, o galiausiai ir Justas kiekvieną kartą iš savo maišo atseikėjo visiems kitiems po tiek saldainių, kiek kuris tuo momentu turėjo.

Galiausiai viskas baigėsi, o jie nustebę žvelgė vienas į kitą, o po to išvertė kiekvienas ant stalo savo saldainius ir susiskaičiavo, kiek kuris dabar beturįs.

Ir, o jergutėliau, pasirodė, kad kiekvienas turi po lygiai, po 16 saldainių.

Kuris vaikas pasirodė dosniausias?

Principas: **lapatai, lapatai į kalniuką, lapatai lapatai atgalios**

Ši visiems nors kartą girdėta liaudies daina pasako, kas darytina, jeigu mums ką nors pasako apie galutinį rezultatą ir prašo mūsų ką nors pasakyti apie tai, kas buvo pradžioje.

Iš karto grįžti ir suvokti, kaip buvo pradžioje, gali būti nelabai paprasta, todėl mes ir elgiamės kukliau, stengdamiesi pradžios būseną iš galutinės padėties atstatinėti palaipsniui, žingsnis po žingsnio.

Kartais tai neįmanoma, bet labai dažnai pavyksta.

Pabandysime tai padaryti ir minėtame vaikų saldainių perskirstymo, arba, aukštom frazėm kalbant, saldainių distribucijos uždavinyje. Mes žinome, kad kalbėjimas vartojant daug tarptautinių žodžių, kartais daro nemenką psichologinį įspūdį.

Taigi po paskutinio saldainių padvigubinimo, įvykdyto Justo valia ir ištekliais, visi vaikai turi po 16 saldainių.

Kitaip sakant, galutinė idiliška padėtis – visi turi po lygiai (tik neaišku, ar visi vienodai patenkinti) – yra tokia.

AUŠRYTĖ	JONAS	ANDRIUS	JUSTAS
16	16	16	16

O kiek kuris tų saldainių turėjo prieš Justui atrišant savo saldainių kapšą? Ar tai galima nustatyti? Tai ir būtų tas pirmas žingsnis atgal ir, jeigu jis nusisektų, mes bandytume padaryti dar vieną žingsnį.

Taigi Justas ką tik davė visiems savo broliams ir seseriai antra tiek saldainių, kiek jie turėjo.

Vadinasi, jeigu jie visi dabar turi po 16, o yra gavę po antra tiek, kiek turėjo, tai Justas jiems bus davęs po 8 saldainius, arba iš viso išdalijęs 8 x 3 = 24 saldainius. Kadangi ir jis dabar turi 16, tai prieš dalybas bus turėjęs 16 + 24 = 40 saldainių, taigi prieš paskutines dalybas buvo pats turtingiausias arba „saldainiausias“.

Vadinasi, tada buvo taip:

AUŠRYTĖ	JONAS	ANDRIUS	JUSTAS
8	8	8	40

O dar anksčiau kaip buvo?

O tada buvo taip: saldainius broliams ir seseriai dvigubino Andrius. Todėl jis davė Justui 20, o Aušrytei ir Jonui po 4, vadinasi, išdalino 20 + 4 + 4 = 28 saldainius, taigi bus turėjęs 8 + 28 = 36 saldainius. Todėl prieš Andriaus dalybas saldainiai buvo pasiskirstę taip:

AUŠRYTĖ	JONAS	ANDRIUS	JUSTAS
4	4	36	20

Atkreipkime dėmesį į aiškų faktą, kad bendras visų vaikų turimų saldainių skaičius nekinta, Jų yra, kaip buvo ir pradžioje, 16 × 4 = 64, jie tik pereidinėja iš vienos kišenės į kitą.

Dabar Jono ir Aušrytės saldainių padvigubinimą sujungsime į vieną lentelę, pirmiau nurodydami, kaip buvo prieš Jono dvigubinimą ir, galiausiai, kaip prieš Aušrytės, arba pačioje pradžioje.

AUŠRYTĖ	JONAS	ANDRIUS	JUSTAS
2	64-(2+18+10)=34	18	10
64 – (17+9+5) = 33	17	9	5

Vadinasi, ne tik atstatėme, kaip buvo pradžioje, bet ir nustatėme, kad pati dosniausia po visko pasirodė esanti Aušrytė, nes, atstačius pradinę būseną, paaiškėjo, kad ji atidavė daugiausiai saldainių, būtent 33 – 16 = 17. Jono saldainiai iš esmės nesikeitė, formaliai žiūrint, ir jį galima priskirti prie rėmėjų. Na o Andrius uždirbo 16 – 9 = 7, o Justas 16 – 5 = 11 saldainių.

Ką gi, gal taip ir geriausiai, nes Justas pats mažiausias.

XXVII SKIRSNELIS
DABAR APIE PINIGUS IR ARKLIŲ LENKTYNES

Visi esame girdėję apie arklių lenktynes, azartą, statymus ir apie pirmuosius finišo liniją kertančius arklius ir net su tuo susijusius skandalus.

Atėjęs kaimynas Petras Pasakorius sakė, jog Matematikų Riešėje tuoj bus atidarytas hipodromas, kur pradžioje lenktyniaus tik 3 arkliai. Vienas arklys visai neblogas, vardu Trimitas, kiti du, Būgnas ir Skudutis yra ne tokie geri.

Kadangi Trimitas yra pats greičiausias, tai už jį statymai priimami santykiu 1 : 1. Tai reiškia: jeigu jūs statėte 100 litų, kad jis bus pirmas, ir Trimitas atbėgs pirmas, tai jūs atgausite savo statytus 100 litų ir dar gausite antra tiek arba dar 100 litų.

Jeigu Trimitas nebus pirmas, jūsų pinigai liks organizatoriams.

Už Būgną priimami statymai santykiu 1 : 4, o už Skudutį – santykiu 1 : 5. Tai reiškia, jeigu, pavyzdžiui, Skudutis atbėgs pirmas, o jūs buvote už jį statęs 100 litų, tai jūs atgausite savo statytus 100 litų ir dar gausite 500 litų. Aišku, kad Skudutis yra laikomas silpniausiu arkliu. Jeigu jis nebus pirmas, jūs tų savo pinigų nebematysite.

Kaip vertinti Petro Pasakoriaus pasakojimą? Panagrinėkime padėtį. Gal čia įmanoma užsidirbti? Gal čia pradedantis nepatyręs hipodromas?

Pasižiūrėkime, kas čia gali dėtis.

Sakykime, kad už pirmąjį arklį, vardu Trimitas, pastatėme A litų, už antrąjį arklį, vardu Būgnas, pastatėme B litų, galiausiai už trečiąjį arklį, vardu Skudutis, pastatėme C litų.

Aišku, jeigu pirmas atbėgs Trimitas, mes turėsime $2A$ litų (pagal sąlygą atgauname pastatytus pinigus ir gauname dar kita tiek), jeigu pirmas atbėgs Būgnas, mes gausime $5B$ litų (atgausime įneštuosius ir dar gausime keturiskart tiek), galop, jei pirmasis bus Skudutis – kas mažiausiai tikėtina, sprendžiant iš to, kokiu santykiu organizatoriai priima už jį statymus, tai mes gausime $6C$ litų (atgausime statytuosius ir dar gausime penkiskart tiek.

Iš viso mes pastatėme $A + B + C$ litų ir, jeigu mes tikimės bet kuriuo atveju nepralošti, tai, kad ir koks arklys beatbėgtų pirmas, mūsų gaunama suma turi būti didesnė už tą ką tik nurodytą sumą, arba turi būti

$$2A > A + B + C,$$
$$5B > A + B + C,$$
$$6C > A + B + C,$$

arba

$$A > B + C,$$
$$4B > A + C,$$
$$5C > A + B,$$

o tokiai sistemai sprendinių parinkti ne taip sunku, tinka, pavyzdžiui, $A = 10$, $B = C = 4$ arba, apvalesniais skaičiais, 50, 20 ir 20.

Vadinasi, jeigu už Trimitą statysime 50 litų, o už Būgną ir Skudutį – po 20 litų, tai jei Trimitas atbėgs pirmas, tai mes, pastatę 90 litų, atsiimsime 100, jei Būgnas, tai irgi 100, na, o jeigu Skudutis, tai net 120 litų.

Kitaip tariant, jeigu tas hipodromas ir toliau taip elgtųsi, tai mes greitai galėtume ten neregėtai užsidirbti,

XXVIII SKIRSNELIS
GAL NORĖTUMĖTE PASKAIČIUOTI ONUTĖS PIEŠTUKUS?

arba susipažinti su bene pačiu subtiliausiu 2003 Tarptautinio „Kengūros“ konkurso uždaviniu, kurį Lietuvoje sprendė visų penkių amžiaus grupių moksleiviai nuo pirmokų iki pačių dvyliktokų arba maždaug 60 000 drąsių gerų galvų.

Onutė turi 9 pieštukus, ir tarp jos pieštukų bent vienas mėlynas pieštukas tikrai yra. Dar yra tikra, kad:

(A) iš bet kurių 5 jos turimų pieštukų daugiausiai 3 yra skirtingų spalvų;

(B) iš bet kurių 4 jos turimų pieštukų daugiausiai 3 yra vienos spalvos.

Kiek mėlynų pieštukų turi Onutė?

Tiesą (A) pavadinkime **pirmuoju**, o tiesą (B) – **antruoju** Onutės dėsniu.

Paklauskime, kiek daugiausiai skirtingų spalvų pieštukų mergaitė turėti: vienos, dviejų, trijų ar gal net daugiau spalvų?

Jeigu rastųsi bent keturių spalvų pieštukų tai paimkime 4 tokius keturių spalvų pieštukus ir dar vieną bet kurį kitą bet kurios spalvos pieštuką penktuoju ir su tokiu pieštukų rinkiniu mes tikrai nusikalsime pirmajam Onutės dėsniui.

Vadinasi, tų spalvų yra arba viena, arba dvi, arba trys ir ne daugiau.

Dabar paklauskime, ar gali nutikti taip, kad pas Onutę rasime 4 kurios nors vienos spalvos pieštukus? Jeigu taip, tai paimkime juos į ranką ir gaukime pylos nuo antrojo Onutės dėsnio. Vadinasi, bet kurios spalvos pieštukų yra trys arba dar mažiau.

Vadinasi ir spalvų yra tik trys arba mažiau, ir kiekvienos atskiros spalvos pieštukų irgi tik trys arba mažiau.

Bet iš viso tų pieštukų yra 9. Vadinasi, ir spalvų yra trys, ir kiekvienos spalvos pieštukų yra po 3.

Atsakymas. Onutė turi 3 mėlynus pieštukus.

XXIX SKIRSNELIS
ARBA DAR VIENAS UŽDAVINYS ŠOKLIOSIOS KENGŪROS MOTYVAIS

Kad būtų kiek linksmiau – o nelengvose proto aštrinimo pratybose to linksmumo, jeigu tik nors kiek vykusio, niekada nebūna per daug, mes savo uždavinį suformuluosime penkianulininko Avalinsko turto, kurį jis nori iškeisti 1 ct monetomis, pervežimo motyvais,

Taigi kartą garsusis penkianulininkas Avalinskas susapnavo, kad iki ryto jam lemta persikraustyti į naują butą ir pasiimti visus pinigus, kuriuos jis, kad vagys visų nepakeltų, laikė 50-tyje pažymėtų dėžių, sveriančių atitinkamai 150, 151, 152,..., 197, 198 ir 199 kg. Jis iš karto nusprendė, kad pervežimus atliks jo pasitikėjimą pelniusi transporto firma „Vežam tiesiai, vežam drąsiai“, turinti pakankamai sandarių sunkvežimių, vežančių ne daugiau kaip po 1200 kg kiekvienas ir ėmė svarstyti, su keliais firmos sunkvežimiais jam pavyktų išsiversti?

Kadangi ir mokykloje (aukso medalis) ir gyvenime jis buvo sumanus žmogus, todėl ir čia iš karto ėmėsi vertinti bendrą vežtinų monetų svorį ir žaibiškai suskaičiavo 50 savo dėžių svorių sumą 150 + 151 + 152 + ... + 197 + 198 + 199. Taip žaibiškai suskaičiuoti jam pavyko ir dėl to, kad sumaniai surikiavo dėmenis poromis po du su vienoda suma imdamas vienodai nutolusius nuo „galų“ dėmenis. Taip jis gavo 25 poras su vienoda suma, nes tikrai 150 + 199 = 349 = 151 + 198 = 152 + 197 = ... = 174 + 175.

Vadinasi, visas krovinys svėrė 25 × 349 = 8725 kilogramus. Kadangi vienas sunkvežimis gali vežti 1200 kg ir ne daugiau, tai 7 sunkvežimių bus aiškiai per mažai, nes jie galėtų nuvežti tik 1200 × 7 = 8400 kg monetų. Todėl reikės mažiausiai 8 sunkvežimių. Tačiau Avalinskas vis tiek truputį nerimavo, ar jam tikrai pasiseks išsiversti su 8 sunkvežimiais.

Kadangi dėžių tai 50, o 50 : 8 > 6, tai pirmiausiai jis sumetė, kad į pirmuosius 2 sunkvežimius reikėtų krauti po 7, suprantama, pačias mažiausias dėžes, o į likusius sunkvežimius po 6 dėžes.

Ar 2 sunkvežimiai paveš po 7 lengviausias dėžes? Pirmajam tuomet galėtų tekti 150 + 151 + 152 + 153 + 154 + 155 + 156 = 1071 kg, o antrajam 157 + 158 + 159 + 160 + 161 + 162 + 163 = 1120 kg.

Dabar į likusius 6 sunkvežimius reikėtų krauti po 6 sunkėjančias dėžes, pirmiausiai į trečiąjį krautume 164 + 165 + 166 + 167 + 168 + 169 = (164 + 169) + (165 + 168) + + (166 + 167) = 333 × 3 = 999 kg. Telpa. Ir kitos dėžės po šešias tikrai tilps, jeigu tik tilps pačios sunkiausios dėžės. Žiūrime. 194 + 195 + 196 + 197 + 198 + + 199 = 393 + + 393 + 393 = 1191 < 1200.

Vadinasi, 8 sunkvežimiais krovinys bus tikrai nuvežtas.

Avalinskas net nespėjo nudžiugti, tokį optimalų planą sugalvojęs, kol jam paskambino žmona Kinga. Ji patvirtino jau sužinojusi apie artėjančią perkraustą ir paprašė dar nugabenti dar ir jos kitoje vietoje laikytas 4 dėžutes, sveriančias atitinkamai 200, 201, 202 ir 203 kg. Ji pareiškė tikinti, kad ir dabar jis optimaliai suplanuosiąs.

Avalinskas ėmė galvoti, kaip čia dar tas keturias dėžutes priglaudus, o įdomiausia jam buvo, ar dabar su tomis atsiradusiomis 4 dėžėmis naujų sunkvežimių samdyti jam nereikės ir 8 sunkvežimių jam dar vis tiek pakaks.

Kol kas jo vežimo schema buvo, kaip matėme, tokia:

1 sunkvežimis: 150 + 151 + 152 + 153 + 154 + 155 + 156 – arba iš viso 1071 kg
2 sunkvežimis: 157 + 158 + 159 + 160 + 161 + 162 + 163 – arba iš viso 1120 kg
3 sunkvežimis: 164 + 165 + 166 + 167 + 168 + 169 – arba iš viso 999 kg
4 sunkvežimis: 170 + 171 + 172 + 173 + 174 + 197 – arba iš viso 1035 kg
5 sunkvežimis: 176 + 177 + 178 + 179 + 180 + 181 – arba iš viso 1071 kg
6 sunkvežimis: 182 + 183 + 184 + 185 + 186 + 187 – arba iš viso 1107 kg
7 sunkvežimis: 188 + 189 + 190 + 191 + 192 + 193 – arba iš viso 1143 kg
8 sunkvežimis: 194 + 195 + 196 + 197 + 198 + 199 – arba iš viso 1179 kg

Ką daryti su tomis keturiomis naujai pasirodžiusiomis dėžėmis – jeigu būtų atkeliavusi tik vieną, 200 kg dėžė, tai nieko nereikėtų keisti – į trečią sunkvežimį ją ir viskas.

Aišku, kad joks sunkvežimis daugiau kaip 7 dėžių nepajudins, nes 8 pačios lengviausios vis tiek sveria jau 150 + 151 + 152 + 153 + 154 + 155 + 156 + 157 = 1228 kg. Akivaizdu, kad krauti dabar reikia labai taupiai, nes visos 54 dėžės dabar sveria jau 150 + 151 + ... + 202 + 203 = 353 x 27 = 9531, o kadangi iš viso pervežti įmanoma, kaip žinome, 9600 kg, todėl tuose 8 sunkvežimiuose tegalės būti jau tik 9600 – 9531 = 79 kg „laisvos vietos“.

Todėl suprantama, kad Avalinsko planas dabar pasikeitė ir pasidarė toks: krauti po 6 pačias sunkiausias dėžes į 2 sunkvežimius, arba iš viso 12 sunkiausių dėžių į 2 sunkvežimius, grupuojant jas po 2 nuo galų, kaip sumuojant aritmetinę progresiją, ir panašiai mėginti elgtis su likusiomis 42 dėžėmis.

12 pačių sunkiausių dėžių nuo 192 iki 203, grupuojant jas poromis nuo galų reikštų į vieną sunkvežimį krauti 192 + 203 + 193 + 202 + 194 + 201 = 1185, o į kitą 195 + 200 + 196 + 199 + 197 + 198 = 1185 kg.

Abiem atvejais neišnaudojame po 1200 – 1185 = 15 kg svorio, vadinasi, per abu sunkvežimius prarandame 15 × 2 arba 30 kg svorio, todėl laisvo svorio likusiems 6 sunkvežimiams jau teturime tik 69 – 30 = 39 kg.

Vadinasi, liko 42 dėžės, sveriančios nuo 150 iki 191 kg ir 6 sunkvežimiai. Kaip dabar pakrauti, jeigu tai tik įmanoma.

Mėginkime imti krauti nuo galų stengdamiesi prarasti kuo mažiau svorio. Planas yra toks: išdėstykime mūsų dėžes 7 eilėmis po 6 arba taip:

150	151	152	153	154	155
156	157	158	159	160	161
162	163	164	165	166	167
168	169	170	171	172	173
174	175	176	177	178	179
180	181	182	183	184	185
186	187	188	189	190	191

O dabar mėginkime imtis po likusiais 3 pačias lengviausias ir sunkiausias dėžes ir dar po vieną kurią dėžę iš ketvirtosios eilės.

Tos trys poros pačių lengviausių ir sunkiausių dėžių svers visos vienodai po (150 + 191) + (151 + 190) + (152 + 189) = 341 + 341 + 341 = 1023 kg ir dabar mes prie jos galime jungti bet kurią iš ketvirtosios eilės dėžių, kadangi pati sunkiausia ketvirtosios eilės dėžė sveria 173 kg, o 1023 + 173 = 1096 < 1200, tai planas yra geras visiems 6 sunkvežimiams, nes kitų 4 eilės sunkvežimių svoriai yra jau mažesni.

Atsakymas: Ir priėmęs dar keturias dėžes iš savo žmonos Kingos Avalinskas pajėgs išsiversti su 8 sunkvežimiais.

XXX SKIRSNELIS
PSICHOLOGINIAI PAPRASTŲ FORMULUOČIŲ PAVOJAI

Neretai gyvenimiškose istorijose tenka išgirsti: „jis atrodė toks doras žmogus, o apgavo“ arba „reikalas atrodė toks paprastas, o nieko neišėjo“.

Matematikoje tokių pavyzdžių taip pat apstu, tik čia viskas vyksta daug „kultūringiau“, nes galima neklusnų uždavinį palikti (kuriam laikui) ramybėje ir vėliau su naujomis jėgomis prie jo grįžti ir vėl pamėginti ką nors daugiau nuveikti, negu kad iki tol buvo pasisekę.

Tik norėtume atkreipti dėmesį į tai, kad kartais galime susidurti su tokia problema, kurią visi šviesieji žmonijos protai sprendžia tūkstantmečius ir niekaip negali išspręsti.

Tokiu atveju vargas mums - ypač jeigu uždavinio formuluotė yra apgaulingai paprasta, kartais vienu vieninteliu sakiniu išreiškiama, o dar blogiau gali būti tai, kad jūs jau galite būti pažadėję sau tą uždavinį išspręsti, pavyzdžiui, per savaitę, ar mėnesį, ar metus – kaip gi kitaip – mes juk smarkūs.

Bet psichologinė mūsų patirtis turi mums priminti, kad yra paprastos, visai lengvai sprendžiamos problemos, yra rimtesnės, įveikiamos, bet jau gana sudėtingos ir, deja, gyvenimo išmintis sako mums, kad tikrai yra ir ilgalaikių, nežinia, ar kada iš viso pasiduosiančių problemų.

Mūsų žmogiškoji būtis įpareigoja mus neatsiriboti ir nuo tokių problemų, žmogiškoji patirtis vis primena, kad tokių gali būti ir, gal būt, dabar mūsų sprendžiamas uždavinys yra iš tokių amžinųjų problemų.

Nenorime nei gąsdinti klausytojo, nei mažinti jo drąsos, tik norime priminti, kad būna visaip ir reikia būti pasirengus susidurti net ir su tokia galimybe.

O be to, neslėpkime, kad drąsiam žmogui kartais taip įdomu susiremti su uždaviniu, kuris neklauso nė vieno iš aplinkinių.

Nereikia nė Ferma problemos

Standartinis tokios neįveikiamos, o jau kaip aiškiai formuluojamo uždavinio pavyzdys yra Ferma problema, žinoma jau daugiau kaip 300 metų ir sugriovusi gyvenimą ne vienam iš ją sprendusių išminčių.

Priminsime jos formuluotę.

Pirmiausiai pastebėsime, kad nesunku rasti tokius tris sveikuosius skaičius, kad dviejų iš jų kvadratų suma yra lygi trečiojo skaičiaus kvadratui.

Pirmas tokių skaičių pavyzdys būtų skaičiai 3, 4 ir 5. Yra daug ir kitų pavyzdžių.

Išdrąsėję mes galėtume greitai apibendrinti ir paklausti: jei yra trys tokie sveikieji skaičiai, kad dviejų iš jų kvadratų suma yra lygi trečiojo skaičiaus kvadratui, tai gal yra ir tokie trys skaičiai, kad dviejų kubų suma yra lygi trečiojo skaičiaus kubui.

O gal ir ketvirtųjų, o gal ir n-tųjų?

Taip pasaulyje atsirado **Ferma problema**.

Ar yra trys tokie sveiki teigiami skaičiai *x*, *y* ir *z*, kad *x* *n*-tuoju plius *y* *n*-tuoju laipsniu lygu *z* *n*-tuoju laipsniu ($x^n + y^n = z^n$ **)?**

Už šios problemos sprendimą buvo skiriamos milžiniškos premijos ir daugybė žmonių bandė su ja galynėtis, bet dar blogiau buvo tai, kad Ferma spėjo pasakyti, kad žino sprendimą, tiktai tos knygos, kur jis užrašė tą pastabą, paraštės yra per siauros to įrodymo užrašymui.

Vien iš tikėjimo ta Ferma pastaba – ir kaip netikėsi pasauliniu autoritetu – buvo sukurtos naujos matematikos sritys. Sritys buvo sukurtos, o Ferma problema vis likdavo neišspręsta.

Taip tęsėsi šimtmečiais.

Ir tik prieš kelerius metus paaiškėjo, kad atsakymas į Ferma klausimą yra neigiamas, nėra tokių trijų sveikųjų skaičių, kad dviejų iš jų *n*-tųjų laipsnių suma yra lygi trečiojo skaičiaus *n*-tajam laipsniui, jeigu tas laipsnis yra didesnis už 2.

Problemos po milijoną dolerių kiekviena

Kiekvienas skaitytojas internete gali rasti ne vieną problemą, už kurių sprendimą yra siūloma, ką ten siūloma, o jau paskirta po milijoną dolerių.

Tik skaitytojau, būk atsargus, nepritrūk psichologinės išminties ir atmink, kad dar prieš Tau išgirstant problemos formuluotę, su ja jau galynėjosi rimti žmonės ir jeigu jau jiems nepavyko – nes problema liko – tai ir Tu turėk tai galvoje.

XXXI SKIRSNELIS
DAR VIENA IŠ PAŽIŪROS PAPRASTAI FORMULUOJAMA PROBLEMA

Paimkime kokį nors sveiką teigiamą skaičių ir sutarkime su juo elgtis taip: jeigu jis lyginis, tai dalykime jį pusiau, o jeigu jis nelyginis, tai patrigubinkime jį ir dar pridėkime 1, o gautajam skaičiui tą procedūrą nuosekliai taikykime toliau.

Pavyzdžiui, imkime mūsų pamėgtą metų skaičių 2005 ir nuosekliai taikykime jam tą taisyklę.

Kadangi 2005 yra nelyginis skaičius, tai teks jį patrigubinti ir dar 1 pridėti, todėl turėsime 6016, toliau mažinsime perpus, nes tai lyginis skaičius, gausime 3008, vėl lyginis, tai dar perpus, bus 1504, dar 752, toliau atitinkamai 376, 188, 94, 47.

Matome, kad skaičiai greitai mąžta, žiūrėsime, kas bus toliau.

Taigi nuo 47 pereisime prie $3 \times 47 + 1$ arba 142, toliau 71, 214, 107, 322, 161, 484, 242, 121, 364,182, 91, 274, 137, 412, 206, 103, 310, 155, 466, 233, 700 (o, apvalus skaičius!), 350, 175, 526, 263, 790, 395, 1186 (vėl persiritome 1000), 593, 1780 (beveik pasiekėme pradinį skaičių), 890, 445, 1336, 668, 334, 167, 502, 251, 754, 377, 1132, 566, 283, 850, 425, 1276, 638, 319, 958, 479, 1438, 719, 2158 (persiritome per pradinį skaičių), 1079, 3238 (turime jau kone dvigubai didesnį skaičių negu pradžioje), 1619, 4858 (nustojome stebėtis, kaip auga), 2429, 7288 (taip ir per 10.000 netruksime persiristi), 3644, 1822, 911, 2734, 1367, 4102, 2051 (jau visai arti pradžios), 6154, 3077, 9232, 4616, 2308, 1154, 577, 1732, 866, 433, 1300 (vėl apvalus skaičius), 650, 325, 976, 488, 244, 122, 61 (vėl labai nukritome), 184, 92, 46, 23, 70, 35, 106, 53, 160, 80, 40, 20, 10 (oho, kaip mažėja, tuoj būsim vienaženkliai), 5, 16, 8, 4, 2, 1 (kelio galas).

O dabar klausimas: ar taip atsitiks – kad nusileisime iki 1 – su kiekvienu skaičiumi?

Odabar siūlome dar kitą uždavinį kartu su klausimu, kuris sunkesnis?

Nesupyk, skaitytojau, kad mes vėl jį suliteratūrinsime.

Štai ta jo aranžuota sąlyga.

Neramų savo gyvenimą baigęs ir Jurgos taip ir nesuradęs Baltaragis pakliuvo į vieną iš begalinio skaičiaus rojaus sferų, kurios buvo sunumeruotos natūraliaisiais skaičiais ir toliau ieškojo savo Jurgos, kuri, kaip jis jautė, irgi bus pakliuvusi į rojų, tik, matyt, į kitą sferą, kurios numerio Baltaragiui nebuvo duota žinoti.

Tačiau savo Jurgos jis buvo nusiteikęs ieškoti iki begalybės, patikrindamas, kokios yra galimybės pakliūti į visas kitas sferas.

Tranzito galimybės, kaip jis išsiaiškino, buvo tokios:

1. Iš sferos su numeriu N panorėjus galima pereiti į sferą su numeriu $2N$ ten ir atgal.

2. Iš sferos su numeriu N panorėjus galima pereiti į sferą su numeriu $3N + 1$ ten ir atgal.

Sėdėjo Baltaragis ir mąstė, kaip čia kuo greičiau visas sferas apžiūrėjus, jeigu tai apskritai įmanoma. Jis suprato, kad paieškoms reikia rimtai ruoštis.

Jis apsižiūrėjo esąs sferoje su numeriu 2005 ir pagalvojo, ar galėtų jis patekti į sferą su numeriu 1.

Tada, jeigu ir Jurgai būtų suteiktos tokios pačios galimybės, tai ir ji sugalvotų veržtis į pirmąją sferą ir ten jie galutinai susitiktų.

Ir pradėjo jis rašyti savo būsimos kelionės į pirmąją sferą planą.

2005 skaičius užrašomas pavidalu $3 \times 668 + 1$, todėl kelias į 668 sferą laisvas. Toliau galime leistis į 334 sferą, nes $668 = 2 \times 334$, o sekančiu žingsniu, galima dar kartą sferos numerį sumažinti perpus ir pasiekti sferą su numeriu 117.

$117 = 3 \times 39$, o tai nei lyginis, nei $3n + 1$ pavidalo skaičius, todėl sekančiu kartu teks eiti į sferas su didesniais numeriais, o to Baltaragis visai netroško.

Tris dienas galvojęs išmąstė tokį dalyką: $117 \to 352 \to 704 \to 1408$.

$1408 = 3 \times 469 + 1$, todėl kelias į 469 sferą laisvas. Laimei, 469 yra $3 \times 156 + 1$, todėl laisvas kelias į 156 sferą, dabar galima dalinti iš 2 (ir net ne vieną kartą). Todėl mažėti mums sekasi ir toliau keliaujame maršrutu $156 \to 78 \to 39$.

Teks vėl didėti $39 \to 118 \to 236 \to 472$.

Dabar $472 = 3 \times 157 + 1$, todėl $472 \to 157 = 3 \times 52 + 1$, todėl iš $157 \to 52 = 2$ x 26, vadinasi $52 \to 26 \to 13 = 3 \times 4 + 1 \to 4 = 3 \times 1 + 1 \to 1$, o tai kelio galas – liko tik palaukti Jurgos.

Dabar iškyla patys normaliausi klausimai.

1. Ar taip pat kaip su skaičiumi 2005 Baltaragiui būtų pasisekę su bet kuriuo kitu skaičiumi?

PAGRINDINIS KLAUSIMAS YRA TOKS: AR BALTARAGIS GALI IŠ BET KURIOS SFEROS PAKLIŪTI Į BET KURIĄ KITĄ SFERĄ? Kadangi eismas yra dvipusis, tai tam pakanka galėti iš bet kurios sferos pakliūti į pirmąją sferą.

2. Koks buvo Baltaragio planas, apie kurį jis, pamokytas skaudžios žemiško gyvenimo patirties, tylėjo kaip žemė?

3. Koks buvo jo veiksmų planas tada, kai jis buvo sferoje, kurios numeris dalijosi iš 3? Nes tada jis visada ir ne po kartą kildavo („varydavo“) aukštyn, o po jam kažkaip vėl pavykdavo dar labiau pažemėti.

Tai, skaitytojau, dar kartą klausiame, kuris iš šių dviejų uždavinių yra sunkesnis.

Primename, kad šį uždavinį lyginame su prieš tai buvusiu uždaviniu arba klausimu, ar galėtume garantuoti, kad paėmę bet kurį natūralųjį skaičių N ir nuosekliai taikydami jam 2 operacijas arba darydami iš jo skaičių $3N + 1$, jeigu jis nelyginis, arba darydami iš jo skaičių $N/2$, jeigu jis lyginis, visada pasiekti 1?

Esu siūlęs šį uždavinį įvairiose auditorijose ir gavęs įvairius atsakymus.

Vienas iš šių uždavinių jų yra pasaulinė, iki šiol neišspręsta, jau trijų mėginusių ją spręsti įžymybių vardais aplipusi problema, kita gi – 1997 Tarptautinėje komandinėje „Baltijos kelio“ olimpiadoje Danijoje spręstas uždavinys.

Taigi matome, kad galime suformuluoti dar vieną uždavinių sprendimo psichologijos dėsnį, kuris gerai žinomas kasdieniame gyvenime: **išorė būna apgaulinga**

Ji kažkiek gimininga kitam gyvenimiškam dėsniui, kuris skamba maždaug taip:

Pagal išorę pasitinka, pagal protą palydi, kurio viena iš matematiškai-psichologinių versijų galėtų būti tokia:

Pagal paprastumą pasitinka, pagal esmę palydi.

Arba kaip kita proga apie tą patį sakė žymus baltarusių matematikos uždavinių kompozitorius ir Baltarusijos komandos treneris profesorius Sergiejus Mazanikas: „Skaičių teorijos uždavinys, kurio sąlygai pasakyti gana vieno sakinio, yra mirtinas“.

Visai nenorime gąsdinti skaitytojo, bet tiesos slėpti taip pat nedera.

Vadinasi, jeigu tik įrodytume, kad Baltaragis visada gali nusileisti nors viena sfera žemiau, tai nieko daugiau nebereikia – jeigu iš bet kurios padėties galima pažemėti, tai po to galima dar pažemėti ir taip prieiti iki pirmosios sferos, o ten jau tikriausiai Jurga belaukianti.

O jei ir nelaukia, tai eismas visur dvipusis ir jeigu iš bet kurio sferos galima nusileisti į pirmąją, tai galima ir iš bet kurios sferos patekti į bet kurią kitą sferą.

Pasukę galvą supratome, kaip Baltaragis žemyn leidosi.

Sferos būna su numeriais

A) $3N$; B) $3N + 1$; C) $3N + 2$.

Antruoju atveju „pažemėti“ paprasta, nes iš sferos 3N + 1 leidžiama eiti į sferą su numeriu $N < 3N + 1$

Trečiuoju atveju reikalingi du žingsneliai:

$$3N + 2 \to 6N + 4 = 3(2N+1) + 1 \to 2N + 1 < 3N + 2$$

Labiausiai Baltaragiui, kaip matėme, teko sukti galvą būnant $3N$-toje sferoje. Pasitikrink, skaitytojau, kad tais atvejais jis abu kartus elgėsi pagal schemą

$$3N \to 9N + 1 \to 18N + 2 \to 36N + 4 =$$
$$= 3(12N + 1) + 1 \to 12N + 1 = 3 \times (4N) + 1 \to 4N \to 2N < 3N.$$

Atsakymas: Visais atvejais Baltaragis gali sumažinti sferos, kurioje jis yra, numerį, todėl, nuosekliai elgdamasis, jis iš bet kur gali pasiekti pirmąją sferą, o kadangi eismas tarp sferų yra abipusis, tai jis gali iš bet kurios sferos pakliūti į bet kurią kitą sferą.

O į pirmąjį uždavinį žmonija dar neturi atsakymo, o hipotezė jau vadinasi trijų ją sprendusių įžymybių vardais.

Tiesa, regis, milijono už ją dar nesiūlo, bet... .

Kažkur skaičiau, kad žmonės moka įrodyti tik tiek, kad kankindami bet kurį skaičių kažkada būtinai gausime dalų iš 4 skaičių.

Tik tiek. Klausimas atviras. O sąlygos pažiūrėjus ne taip jau labai skiriasi.

XXXII SKIRSNELIS
ARBA DAR KARTĄ KĄ DARYTI, KAI NELABAI AIŠKU, KO GRIEBTIS?

Klausimas yra pakankamai paradoksalus arba prieštaringas, tačiau ir čia įmanoma verstis.

Tai gal truputį primena sriubos iš kirvio virimą.

Duosime panašų pavyzdį.

2000 metais Raseinių krašto olimpiadoje profesoriaus Jono Kubiliaus įsteigtai taurei laimėti pasiūliau uždavinį, kuris tebuvo lengvesnė kažkada įprastinėje Lietuvos jaunųjų matematikų olimpiadoje pasitaikiusio uždavinio parafrazė – bet užtat ir buvo pasiūlytas jis jaunesnėms klasėms.

Štai to uždavinio sąlyga:

Duota lygtis $x^2 + y^2 + z^2 + 10 = xyz$.

Ieškosime natūraliųjų jos sprendinių ir struktūruodami prašysime:

(A) nurodyti (ar atspėti) kokį nors vieną jos sprendinį natūraliaisiais skaičiais.

(B) nurodyti 7 natūraliuosius tos lygties sprendinius.

(C) ar tikrai ši lygtis turi 2000 (šiandien klaustume, ar ji turi 2005) sprendinių?

(D) ar ta lygtis turi be galo daug sprendinių natūraliaisiais skaičiais?

Iš pradžių mūsų struktūruota sąlyga arba A dalis prašo visai nedidelio dalyko: nurodyti ar atspėti (tai tas pats) vieną tos lygties sprendinį.

Psichologiškai žiūrint, kaip jau sakėme, mus nori įtraukti į veiksmą arba sudominti tuo, kas vyksta.

Paprastai sakant, esame prašomi surasti 3 natūraliuosius skaičius, kurie (pa)tiktų tai lygčiai, arba kuriuos įrašę gautume teisingą lygybę – kaip besuksi, paprasčiau nepasakysi.

B dalis prašo surasti jau 7 tokius natūraliųjų skaičių trejetus.

C dalis jau visai drąsiai klausia, ar ta lygtis turi bent 2000 sprendinių (šiandien, žinoma, klaustume jau 2005 sveikųjų tos lygties sprendinių).

Galiausiai D dalis jau kelia kone filosofinį klausimą: ar toji lygtis gali turėti neribotai daug arba kitaip be galo daug sprendinių.

Praėjus kiek laiko gavau vieno labai rimto skaitytojo, susidūrusio su tuo uždaviniu laišką – tai buvo rimtas laiškas. Jame buvo sakoma: aš esu informatikos docentas, aš pamačiau jūsų uždavinį, pasižiūrėjau į jį ir supratau: aš nežinau, ko griebtis. O už kadro gal būt liko ir nebylus, tačiau be galo natūralus klausimas: o juk tai buvo mokiniams skirtas uždavinys – kaip jiems suktis?

Labai rimtas ir natūralus klausimas.

Vėl pasižiūrėkime, ar tas uždavinys yra jau toks sunkus ir neprieinamas.

Skaitytojo laiškas su prisipažinimu, kad ne iš karto aišku, ką daryti, jau kreipia link minties, kad uždavinys visai geras.

Betgi pirmoji, arba A, dalis teprašo tiek nedaug - surasti arba atspėti vieną tinkamą trejetą – jokių formulių čia nereikia. Imk ir parink. Tik tiek. Berinkdamas išgudrėsi, imsi daugiau matyti.

Žinoma, šioje vietoje reikėtų atvirai pasakyti, kad apskritai į spėliojimą žmonės, mes, mokytojai ir kiti žmonės, kartais žiūrime įvairiai arba kai kada labai atsargiai. Niekas neneigia jo vertės, tik kartais būna abejonių, ar tikrai iš mūsų pačių jis tas pažinimas kyla? O gal iš kaimyno galvos ar pirmūno sąsiuvinio? Tai atsargumas natūralus, nes taip tikrai (dažnai) būna, bet pačios spėliojimo arba, kitaip sakant, prognozavimo vertės tai nė kiek nemenkina.

Juk kiekvienos televizijos žinios prasideda ir baigiasi orų prognoze, kurios labai pagarbiai klausomės, o tai juk irgi prognozavimas arba spėliojimas.

Man yra tekę daugybę kartų pačiose įvairiausiose auditorijose – nuo penktokų iki mokytojų – kalbėti apie tą uždavinį – nebuvo nė vieno atvejo, kad daugiausiai po kokių 30 sekundžių kas nors nepastebėtų: skaičių trejetas 3, 4 ir 5 (pa)tinka mūsų lygčiai.

Taigi uždavinio A dalis atlikta, ir dabar reikia dairytis, ką čia nuveikus toliau – o toliau yra 7 sprendinių reikalas. Bet kol radome tą sprendinį (3, 4, 5), spėjome truputį apsidairyti, bent jau tą į lygtį geriau pasižiūrėti. Ką dar galėtume nesunkiai pasakyti? – ogi kad visi nežinomieji, arba, galėtume pasakyti, ieškomieji toje lygtyje dalyvauja vienodomis teisėmis, bet kuris kaip ir kitas kuris. Toji demokratija turi savo pavadinimą – lygtis yra simetrinė – ten sukeiskime kintamuosius vienas su kitu kaip tinkami, lygtis nepasikeis, liks kokia buvusi.

Bet tada iš to vieno trejeto (3, 4, 5) pasidarys daugiau trejetų – taigi sprendiniu bus ne tik (3, 4, 5), bet ir (3, 5, 4), (4, 3, 5), (4, 5, 3), (5, 3, 4) o galiausiai dar ir (5, 4, 3). Taip iš 1 sprendinio pasidarė 6 ir dabar iki sėkmingos jau B dalies atomazgos betrūksta vieno sprendinio.

O juk viskas prasidėjo nuo vieno spėjimo ir vieno paprasto pastebėjimo.

Dabar reikėtų dar kažko, kad reikalai pajudėtų iš esmės – ta esme čia bus paprasta kvadratinės lygties idėja. Mūsų lygtyje sudauginami 3 kintamieji, todėl tokia lygties mokyklose nerasi – ji tikrai ne kvadratinė.

Tačiau nuo nemokyklinių iki mokyklinių reikalų šiuo atveju yra vienas žingsnelis – užtenka įsivaizduoti, kad 2 kintamuosius, sakykime, *y* ir *z*, tuos, kuriuos atspėjome, žinome, o *x*, apsimeskime, kad pamiršome, ir tada atsiras kvadratinė lygtis – kas kad mes, kad ir $x = 3$ žinome, bet neįrašę x, turėsime kvadratinę lygtį, o ši veikiausiai pasakys dar ir kitą mums dar nematytą *x*.

Taigi įrašome 4 vietoje *y*, o 5 vietoje z ir toliau nuduodami, kad visai pamiršome *x* (kuris buvo 3 – vis tiek dar kažkiek atsimename) gauname kvadratinę lygtį.

$$x^2 - 20x + 51 = 0,$$

pasakančią mums kitą šaknį yra $x = 17$.

Taip surandame dar vieną trejetą (17, 4, 5), tinkantį mūsų lygčiai, o kadangi nežinomuosius simetriškoje lygtyje visada galima perstatinėti, tai iš tikrųjų radome net ne vieną, o iš karto dar 6 trejetus, tinkančius mūsų lygčiai.

Kas dar svarbiau, mes suvokėme, kad tą procesą galime tęsti: imkime, sakysime trejetą su pačiu mažiausiu pirmuoju skaičiumi *x*, arba (4, 5, 17), tą *x*, šiuo atveju 4 vėl „užmirškime“ ir vietoj jo rašydami x, gausime naują kvadratinę lygtį

$$x^2 - 85x + 324 = 0,$$

kuri pasakys mums naują *x* reikšmę 85, arba trejetą (85, 5, 17), kurį vėl galima perstatinėti ir tą procesą galime nepabaigiamai tęsti, įsitikindami, kad toji lygtis turi ne tik kad 2005, bet apskritai neribotai daug sprendinių.

Griežtesniam skaitytojui galime pasiūlyti pasiremti Vieto teorema, primenančią ir grįžtamąjį ryšį tarp kvadratinės lygties koeficientų ir jos šaknų.

XXXIII SKIRSNELIS
VISAGALĖ PAPRASTINIMO IDĖJA

Kartais atrodo, kad to mes nelaikome ypatingai svarbiu dalyku, nors idėjiškai arba teoriškai suprantame, koks tai efektyvus instrumentas.

Štai pasižiūrėkime į dar labiau beletrizuotą, negu buvo iš pradžių, ant Nevos krantų gimusio uždavinio sąlygą.

Apie beletrizaciją, arba kitaip apie sąlygos pagyvinimo reikšmę, galimybes ir vietą dar norėtume ir pakalbėti, ir parašyti.

Neatidėliodami paprašykime skaitytoją įvertinti, kokią vieno ir to paties uždavinio sąlygą jis rinktųsi: ar sausą ir dalykišką sąlygos pateikimo būdą:

Turime svirtines svarstykles be svarelių ir 9 uždengtus indus, sveriančius atitinkamai 1, 2. 3, 4, 5, 6, 7, 8 ir 9 kg. Ant kiekvieno indo buvo užrašytas jo svoris. Nusisukus į vieną indą buvo įmestas 1 kg svarelis.

Kaip dabar 2 svėrimais išsiaiškinti, į kurį indas buvo įmestas svarelis?

O gal kiek patrauklesnė tokia sąlyga su nuotykių intarpais?

Ant stiprios medžio šakos tupi Mikė Pūkuotukas ir svajoja, kaip doros medų. O jo jis turi pakankamai: čia pat, ant tos pačios šakos, pūpso 9 ąsotėliai medaus, sveriantys atitinkamai 1, 2 3, 4, 5, 6, 7, 8 ir 9 kilogramus, ant kiekvieno ąsotėlio rūpestinga ranka užrašytas jo svoris.

Prisistatęs Aplinkos apsaugos inspektorius Lūšis patikrino visus Pūkuotuko leidimus: leidimą gyventi ant šakos, leidimą laikyti ant jos medų ir net, ar nepasibaigusi jo licenzija dirbti su turimomis nepriekaištingai veikiančiomis svirtinėmis svarstyklėmis.
Ir nors visi popieriai ir leidimai buvo tvarkingi, Inspektorius net neslėpė savo ketinimų iškraustyti iš ten Mikę Pūkuotuką, nes, girdi, jis vis gaunąs kaimynų skundų, kad naktimis, kai Mikė Pūkuotukas miegodamas ant šakos vartosi, ta šaka labai girgžda, o kai jis doroja medų, tai priedo dar labai čepsi.

Mikė jau ne pirmą vasarą gyveno miške ir gerai suprato, kad pirmiausiai Lūšį domina labai gera jo šakos vieta – nuo jos visas miškas kaip ant delno, o čia dar patikimai viskas įtvirtinta – ir puikios galimybės miško turizmui.

Jam begalvojant ir tą valandą nieko aplinkui nematant, pro šalį skridusi varna į vieną ąsotėlį įmetė 1 kg kilogramo sūrio gabalą ir ėmė karksėti: „Kur sūrio gabalas krito, tu niekada nesužinosi, nebent tenai įkištum nosį“.

Žinojo kaimynai Mikės tvarkingumą ir kad pas jį viskas sužiūrėta ir surašyta. Ir todėl niekas labai nenustebo, kai mokytas Barsukas pagalvojęs pridūrė, kad įmanoma dviem svirtinių svarstyklių svėrimais be svarelių nustatyti, į kurią puodynę varna įmetė sūrį, o mokyta šarka su lape sukirto ta proga lažybų.

Šarka sakė, kad čia ne Pūkuotuko nosiai suprasti ir apskritai, kad dviejų svėrimų per maža, o lapė labai tikėjo mokyto barsuko autoritetu ir drąsiai sakė:

- Kaip barsukas sako, taip ir bus – ir ne kitaip.

Žodžiu, visas miškas laukė, kuo čia baigsis, ir šimtai nematomų akių stebėjo kiekvieną Mikės Pūkuotuko judesį.

O jis sėdėjo ir mąstė.

Ką gi jam daryti?

Kaip čia supaprastinti uždavinio sąlygą?

Pirmiausiai jam galime patarti pasitreniruoti sprendžiant paprastesnę problemą:

Imame kelias puodynes: vienkilograminę, dvikilograminę ir t. t. Kiek daugiausiai jų, po 1 kg sunkėjančių galėtume imti, kad vienu svėrimu galėtume surasti tą, kurioje yra sūris?

Vieno ąsotėlio mažai, nes neturėtume su kuo jo lyginti, vieną ąsotėlį galime lyginti tik su kitu – dar kartą primename, kad Mikė Pūkuotukas neturi svarelių, taigi tegali lyginti tik vienus ąsotėlius su kitais.

Taigi vieno ąsotėlio ne gana, o su dviem jau galima dirbti, ir Mikė dės juos ant skirtingų svarstyklių lėkštelių – o kas gali nutikti, kai vienoje pusėje yra ąsotėlis, ant kurio užrašas 1 kg, o ant kito – 2 kg ir dar viename yra varnos dovana.

Mikė dės, o mes jam dar padėsime.

Jeigu varnos dovana yra tame ąsotėlyje, kur užrašyta 1 kg, tai bus pusiausvyra, o jeigu, kur 2 kg, tai jie ir nusvers.

Taigi jeigu yra tik du ąsotėliai, su į vieną kurį įkritusiu sūrio gabalu, tai žinome, ką daryti.

Na, o jeigu būtų 3 ąsotėliai, sveriantys 1, 2 ir 3 kg ir į vieną kurį iš jų būtų įmestas sūrio gabalas, tai kaip būtų tada? Ar galima vienu svėrimu garantuotai sužinoti, kuriame ąsotėlyje sūris?

Mėginkime. Jeigu turime 3 ąsotėlius, tai galima 2 iš jų dėti ant vienos svarstyklių lėkštelės, o vieną ant kitos.

Sveikas protas sako, kad tada 1 ir 2 kg ąsotėliai eina į vieną svarstyklių pusę, o 3 kg – į kitą. Kitaip sakant, „tikriname lygybę, ar dar 1 kg + 2 kg yra 3 kg"?

Jeigu 3 kg ąsotėlis nusveria, tai jame ir yra sūris, o jeigu nusveria ta pusė, kur 1 ir 2 kg, tai ji sunkesnė, tačiau kuriame iš tų dviejų ąsotėlių sūris, garantuotai pasakyti negalime, galime tik spėlioti.

Jeigu dėtume po vieną ąsotėlį į kiekvieną pusę, tai vėl nieko gali neišeiti, nes:

(A) Jei į vieną pusę dėtume 1 kg, o į kitą 3 kg, tai visai nieko nesužinotume.

(B) Jei į vieną pusę dėtume 1 kg, o į kitą 2 kg, tai atsakymą rastume tik tuo atveju, jei svarstyklės rodytų pusiausvyrą, kitais atvejais vėl nieko garantuotai tvirtinti negalima. Vėl galėtume tik spėlioti, ar sūris ten, kur buvo 2 kg, ar kur 3kg?

(C) Jeigu į vieną pusę dėtume 2 kg ąsotėlį, o į kitą 3 kg, būtų panašus atvejis.

O kitaip nėr kaip dėti.

Vadinasi, vienu svėrimu garantuotai susitvarkome tik su 2 ąsotėliais.

Bet vis pabrėžiame, jog mums daug kas paaiškėjo.

XXXIV SKIRSNELIS
9 ĄSOTĖLIAI IR 2 SVĖRIMAI – FANTAZIJA AR REALYBĖ?

Iš to, ką mes jau patyrėme, lieka baimė po pirmojo svėrimo likti su trim svareliais. Tačiau mes tuoj pamatysime, kad dabar pirmas svėrimas bus padėjęs antrajam.

Imkime tikrinti kokią nors lygybę, pavyzdžiui ar 1 kg + 3 kg + 8 kg vis dar tas pats, kaip 2 kg + 4 kg + 6 kg. (lieka neliesti 5, 7 ir 8 kg ąsotėliai).

Jeigu persveria, sakykime, ta pusė, kur yra 1 kg + 3 kg + 8 kg, tai aišku, kad ji persveria dėl to, kad ten yra įkritęs sūris, ir tebebūkštaudami liekame su 3 ąsotėliais ir jau tik vienu svėrimu.

Anksčiau tai mus pražudė, bet dabar mums yra geriau, nes dabar mes turime daugiau ąsotėlių, o dar kad likę 6 ąsotėliai yra tikri, jie sveria tiek, kiek ant užrašyta, vadinasi, juose nėra sūrio.

Vienu iš tų „tikrų" ąsotėlių pasinaudosime.

Taigi sūris yra arba ten, kur yra1 kg, arba kur 3 kg, arba kur 8 kg, o likę ąsotėliai yra „besūriai".

Todėl dabar imkime besūrį ąsotėlį 5 kg ir tikrinkime lygybę, ar vis dar 3 kg + 5 kg = 8 kg.

Jeigu persveria 3 kg + 5 kg , tai sūris kur buvo 3 kg, jeigu 8 kg, tai ten ir sūris, o jeigu pusiausvyra, tai sūris nuimtajame nuo svarstyklių 1 kg ąsotėlyje.

Analogiškai elgiamės atveju, kai persveria 2 kg + 4 kg + 6 kg.

O jeigu 1 + 3 + 8 = 2 + 4 + 6?

Vadinasi, sūris arba kur 5, arba kur 7, arba kur 8 kg.

Tada imame tikrą 2 kg ąsotėlį ir tikriname , ar dar 2 kg + 5 kg = 7 kg.

Vėl viskas bus panašiai. Jeigu pusiausvyra, tai sūris 8 kg ąsotėlyje, jeigu nusvėrė ta lėkštelė, kur buvo 2 + 5, tai sūris „buvusiame“ 5 kg ąsotėlyje, o jei nusvėrė buvęs 7 kg svorio ąsotėlis, tai sūris jame.

Antrasis Mikės Pūkuotuko išbandymas

O dabar įsivaizduokime, kad Mikė Pūkuotukas prasigyveno ir nusipirko sandėliuką ir vienoje lentynoje laiko 10 nedidelių medaus puodelių, sveriančių 100, 101, 102, 103, 104, 105, 106. 107, 108 ir 109 gramus. Ant kiekvieno indelio užrašytas jo svoris, Vieną karštą dieną atzvimbė širšių spiečius, kiekvieną širšė svėrė po gramą ir apipuolė tą medų. Akylieji miško gyventojai matė, kad ne visos širšės išskrido atgal, kad mažų mažiausiai viena širšė tikrai paskendo meduje.

Kokią dabar užduotį miško išminčiai kels Pūkuotukui.

Dabar jis gali sverti kiek tinkamas tomis svirtinėmis svarstyklėmis be svarelių, bet turi neklysdamas surasti nors vieną puodelį su širše nekabindamas medaus.

Patarkime jam vietoje 10 puodelių imti tik 2 ir jeigu jis susitvarkys su 2, tai supras, kaip elgtis su dešimtimis, šimtais ar tūkstančiais vis po gramą sunkėjančių puodelių.

Taigi Mikė ima tuos abu 100 ir 101 gramo puodelius ie deda ant skirtingų svarstyklių lėkštelių..

Galimi du atvejai: arba tas buvęs 100-gramis ąsotėlis ir dabar yra lengvesnis, arba ne.

Jeigu jis nebėra lengvesnis, tai, aišku, kad tame 100 puodelyje bent viena širšė tikrai yra.

Na, o jeigu buvęs 100-graminis puodelis ir dabar lengvesnis?

Tada bent viena širšė tame 101-graminiame puodelyje yra. Tikrai, jeigu į jį niekas neįkrito, tai garantuotai įkrito į tą 100-graminį ir sveriant būtų pažeista buvusi „svorių hierarchija“.

Priedo paaiškėjo, kad nuo puodelių skaičiaus šiuo atveju niekas nepriklauso, nes tik ilgiau reikės nuosekliai dėti ant skirtingų svarstyklių lėkštelių tuos po gramą sunkėjančius puodelius.

Imtume iš eilės ir tikrintume 100 su 101, 101 su 102 ir t.t, iki pat 108 su 109. Jei kuriuo nors svėrimu būtų pažeista buvusi svorių hierarchija, tai tame buvusiame lengvesniame, kurio dabar gramu sunkesnis jo kaimynas jau nebenusveria, širšių tikrai yra.

Na, o jeigu buvusi „svorių hierarchija“ išlieka ir po paskutinio svėrimo, kas tada?

Tada vėl taip pat: paskutiniame 109-graminiame puodelyje tikrai yra širšių.

Nes jeigu paskutiniame 109-graminiame puodelyje širšių nebūtų nė vienos, tai kadangi jų kur nors yra, tai prieš tai kuriuo nors svėrimu būtų pažeista senoji svorių hierarchija.

Turime įdomią padėtį, kai galime ir negalėti pasakyti, nuo kurio puodelio atsiranda įkritusių širšių?

Trečiasis Mikės Pūkuotuko išbandymas

Vieną kartą Pūkuotukas susapnavo, kad jis turi be galo daug po gramą sunkėjančių puodelių ir vėl turi surasti nors vieną puodelį su širše.

Pagalvojęs jis su siaubu suvokė, kad jis dabar to gali ir nebegalėti padaryti.

Jeigu jis, paeiliui sverdamas gretimus puodelius (manykime, kad jis spės atlikti be galo daug svėrimų), rastų pažeistą svorių eilę, tai tada aišku, kad buvusiame lengvesniame širšių yra.

O jeigu svorių eilė nepažeista, tai jis nieko garantuoti negali – kai puodelių be galo daug, nebėra paties sunkiausio, nes, kurį bepaimtum, už visada yra kitas 1 gramu sunkesnis ir Mikė gali tik spėlioti.

Pavyzdžiui, tuo atveju, kai į kiekvieną puodelį įkrito po vieną širše, buvusi svorių eilė išliks, o paskutinio sunkiausio puodelio dabar nėra

Geras pavyzdys, kai be galo daug yra tikrai per daug, kad galėtume sužinoti, ko klausia uždavinys arba kai be galo daug yra „blogiau" už baigtinį skaičių.

Tegu skaitytojas nepyksta, kad mes rimtu veidu kalbame apie begalinį Mikės Pūkuotuko puodelių skaičių, begalybė žvelgia į mus iš pačių normaliausių vietų, sakysime niekas neabejoja tuo, kad sveikųjų skaičių yra be galo daug, skaičių intervale – irgi be galo daug.

Kažkada kažkoks spaudos magnatas sakė, kad turtingas žmogus yra tas, kuris nepajėgia susiskaičiuoti savo pinigų.

Vėl kažkas į begalybės pusę. Kadangi begalybė mūsų vaizduotėje absoliučiai pagrįstai yra kažkas neaprėpiamo ir paslaptingo, o paslaptinga graikiškai yra mistiška (mystikos), tai ir pridėsime vieną beveik mistišką uždavinį, arba tokį, kurį lyg turėtų būti neįmanoma išspręsti, bet mes jį išspręsime arba papasakosime apie užduotį vardu

XXXV SKIRSNELIS
KAIP RASTI ŽMOGŲ, KURIO VARDO NIEKAS NEŽINO?

Kartą įžymiojo anglų pėdsekio ir dedukcinio metodo pradininko Šerloko Holmso draugai organizavo jo susitikimą seminarą su taip pat įžymiu prancūzų pėdsekiu Puaro. Iš karto pasakysime, kad Puaro vardo niekas pasaulyje nebuvo susekęs – net garsusis Šerlokas. Į susitikimą Puaro atvyko ne vienas, o lydimas 99 stažuotojų. Puaro, suprantama, žinojo visų kitų su juo atvykstančiųjų vardus, kiti gi stažuotojai kurių savo kolegų stažuotojų vardus žinojo, kurių ne; visi jie buvo tiesiakalbiai ir nugrimuoti jie buvo visi kaip vienas įskaitant ir Puaro.

Šerlokas Holmsas pradėdamas seminarą angliškai santūriai bet kartu širdingai pasveikino 100 prancūzų ir pasakė, kad jis gali ir nežinodamas Puaro vardo, surasti įžymųjį kolegą detektyvą, jei tik jam būtų leista prieiti, prie kurio nori svečio, parodyti į kitą svečią ir paklausti, ar jis žino to svečio vardą.

Jam nereikėsią nė 100 klausimų ir jis kolegą suras. Taip iliustruodamas savo dedukcinį metodą jis rasiąs žmogų, kurio vardo niekas nežino**:**

Jeigu Holmsas priėjęs prie svečio A ir rodydamas į kitą svečią B į klausimą: „Ar Jūs žinote, sere, kuo jis vardu"– gauna atsakymą: „Taip", tai kadangi visi svečiai duoda teisingus atsakymus, o Puaro vardo, primename, niekas pasaulyje nežino, tai B – tikrai ne Puaro.

Todėl B iš karto yra kviečiamas į furšeto kambarį ir , būdamas mandagus, iš karto ten ir eina.

Jeigu Šerlokas Holmsas į savo klausimą gauna atsakymą „Ne", tai tada jis priėjo ne prie Puaro ir dabar jau A eina į furšeto kambarį.

O toliau kas? O toliau veiksmas tęsis tol, kol ten beliks tik 2 žmonės, o likę 98 jau bus perėję pavalgyti ir atsigaivinti.

Dabar, kai jau yra belikę tik 2 žmonės, Šeriokas prieis prie pirmojo parodys į antrąjį ir pakartos tą patį klausimą. Jeigu jis išgirs „Taip“, tai jis jau ir yra priėjęs prie Puaro ir širdingai, tik dabar jau asmeniškai jį pasveikins, o jeigu išgirs „Ne“, tai prieis prie antrojo ir tars: „Sveiki, mesje Puaro“.

Taip jis, klausdamas tik vardų, bus suradęs žmogų, kurio vardo niekas nežinojo.

XXXVI SKIRSNELIS
KĄ GALIMA SUŽINOTI IR KO NE?

Kartais kartu su gera nuotaika ir optimizmu įsiskverbia natūrali mintis, kad mes viską galime nustatyti, jeigu tik mums kas nors ką nors esmingo pasakė – arba iš karto, arba pagalvoję.

Deja, tai ne visada taip, gali nutikti, kad mums pasakė nepakankamai daug, nors esti ir tokių sąlygų, kuriose pasakoma daugiau, negu reikia, arba kai sąlygoje yra per daug duomenų ir mes galėtume atsakyti į uždavinio klausimą, arba surasti tiesą, net jeigu mums būtų pasakyta mažiau.

Mėginant juokauti tuo atveju, kai mums yra pasakyta per mažai, galėtume prisiminti klasikinį uždavinį iš nemirtingosios garsiojo čekų rašytojo Jaroslavo Hašeko knygos „Šauniojo kareivio Šveiko nuotykiai“, kur yra pateikiamas maždaug toks uždavinys:

Name yra 5 aukštai, kiekviename aukšte yra po 25 langus. Kuriais metais mirė namo prižiūrėtojo močiutė?

Gyvenime taip pat dažnai nutinka ir taip, kai yra pasakoma per daug ir tokios sąlygos yra nusipelniusios atskiro perteklinių sąlygų vardo.

Kitos sąlygos yra tokios, kad jos leidžia atsakyti į mums keliamą klausimą, bet remiantis tik jomis negalima visiškai atkurti viso įvykių vaizdo.

Pateiksime paprastą pavyzdį, kurį prieš gerą dešimtmetį matėme vėl Sankt-Peterburgo olimpiadiniuose rinkiniuose.

Dabartinė karta yra menkiau susipažinusi su trimis muškietininkais Atu, Portu, Aramiu ir su jų kolega D‘Artanjanu, kuris, nesakytum, kad buvo jų vadas ar koks viršininkas, bet nedaug betrūko.

Populiarus rašytojas Diuma apie jų tikrus ar tariamus žygdarbius parašė daugybę visai tikrų o ne tariamų ar virtualių knygų, kuriose įdomiai išguldė, kaip ten viskas klostėsi.

Ir nors istorikai nesutinka daug su kuo iš to, ką mes tose knygose randame, skaitytojui tai ne visada svarbu, juoba, kad gražiai papasakota.

Psichologiškai žiūrint, romėnai jau prieš tūkstančius metų tokiu posakiu įvertino meistriškus pasakojimus, žodžiais: „Jeigu tai ir ne tiesa, tai nors gerai sugalvota“.

O kas gerai sugalvota, tas gražu, o grožis labai įtikina.

Štai nūdienos uždavinys apipintas vardais, kuriuos ikikompiuterinėje eroje žinojo kiekvienas, skaitantis knygas, o tokių skaičius buvo maždaug toks pat kaip dabar rymančių prie monitorių.

Kiekviena karta turi savo priekinį flangą.

XXXVII SKIRSNELIS
TENISAS IR GUDRAGALVIS d'ARTANJANAS

Kartą trys muškietininkai Atas, Portas ir Aramis žaidė tenisą, o d'Artanjano su jais nebuvo.

Žaidė jie, kaip sakyta, tenisą, po vieną geimą, visi buvo užimti, nes du žaidė, o trečias teisėjavo. Geimui pasibaigus laimėjusis likdavo žaisti toliau, pralaimėjęs eidavo teisėjauti, o teisėjavęs – žaisti. Ir taip geimas po geimo.

Ilgai muškietininkai žaisdavo, arba, kaip dabar pasakytume, daug dėmesio savo formos palaikymui skirdavo ir dar dienoraštį vedė.

Vieną dieną po ilgų žaidimų jie susiskaičiavo, kad Atas sužaidė 15 geimų, Portas – 10, o Aramis – net 17. Kur buvęs, kur nebuvęs, ką tik atsiradęs d'Artanjanas ėmė aiškinti, kad jis gali, vien į tuos 3 žaidėjų sužaistų geimų skaičius pažiūrėjęs, oi daug ką apie geimų baigtis pasakyti galėtų.

– Na ir ką tu iš to pliko žaistų geimų skaičiaus gali įžiūrėti?

– Matau, kas pralošė antrą geimą.

– Bet juk Tavęs nebuvo, mes jau ir patys užmiršome, kas ten tą antrą geimą žaidė, o ką jau ir bekalbėti apie tai, kas tą geimą laimėjo.

– Nežinau, mano šaunieji broliai, ar jūs galit, ar negalit pasakyti, kas ten tą antrą geimą žaidė, ar kas laimėjo. Jūs žaidėte, aš ne, bet aš tikrai galiu pasakyti, kas pralošė antrą geimą. Ir ne tik antrą, bet ir ketvirtą geimą.

– Daug tu gali.

– Visi gali, kas stengiasi , – oriai atrėmė d'Artanjanas.

– Tai paaiškink, kaip galvoji, – nusileido draugai.

Negi D'artanjanas tikrai žino, kuris pralošė antrą geimą?

Atsisėdę pievutėje ant apsiaustų muškietininkai pasiruošė įdėmiai klausytis, ką gi čia jiems išaiškins jų jaunasis draugas.

Mielas skaitytojau, mes puikiai suprantame, kad ne visiems toks sąlygos gyvinimas prie širdies.

Juo labiau, kad sąlygą gyvinant, ją nesunku sugadinti ir nejučia padaryti, kad kengūra vienu šuoliu nušoka 100 kilometrų arba kad žirgas peršoka 15 metrų kliūtis.

Suprasdami tai, mes tvirtai manome, kad tinkamas sąlygos pagyvinimas padaro ją triskart patrauklesnę penkiskart platesniam galimų sprendėjų ratui – o juk galutinis uždavinių sprendimo tikslas yra padaryti skaitytoją IŠMINTINGESNIU.

D'Artanjanas pradėjo aiškinti reikalus sakydamas, kad jeigu Atas lošė 15 kartų arba 15 geimų, Portas 10, o Aramis – 17 geimų, tai jie visi kartu lošė 42-juose geimuose, o kadangi kiekvienam geimui reikalingi du žaidėjai, tai tų geimų būta 42 : 2 = 21.

Antra mokytojo pastaba buvo tokia, kad nors ir koks prastas būtų žaidėjas – čia jis vos pastebimai dėbtelėjo į Portą – jis mažiausiai kas antrą kartą arba kas antrą geimą vis tiek stovi aikštelėje ir mojuoja rakete.

Draugai, klausydamiesi d'Artanjano, gal to dėbtelėjimo ir nepastebėjo, o mes matėme ir iš karto pagalvojome, negi Portas ir kodėl Portas?

Portas težaidė 10 kartų per tuo 21 geimą, tai kadangi iš bet kurių dviejų iš eilės einančių geimų bent viename iš turi būti žaidęs, išeina, kad tada vienintelė galimybė jam buvo žaisti 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18 ir 20 geimus ir, deja, visus pralaimėti, kitaip kada nors jis būtų lošęs 2 geimus iš eilės, o kitaip neišeina būti žaidus per 21 geimą tik 10 kartų..

– Bet aš ramiai žiūrėjau į tuos pralaimėjimus,– regis, taip ir girdime sakant Portą, kuriam buvo svarbios ne tiek pergalės teniso kortuose, o geras bendras fizinis pasirengimas ir taiklūs dūriai kautynėse.

XXXVIII SKIRSNELIS
APIE PAPRASTŲ DALYKŲ GROŽĮ

Grožis labai patraukia, veikia kaip magnetas, kone ima nelaisvėn, vadinasi, ir psichologiškai yra labai galingas dalykas, kadangi žmogus dažnai nelaukia didelių gražybių iš paprastų dalykų, nes ten viskas atrodo regėta, matyta, įprasta ir ką jau ten tokio įspūdingo beišpeši.

Kita vertus, žmogus savo esybe yra senas aukso plovėjas, o juk yra pasakyta, „kas ieško, tas randa....“, - nors bent kiek didesnis skeptikas galėtų ir atitarti: - ... arba gauna į sprandą“, bet net tai labai neatbaido susižavėjusių ieškotojų.

Tiesa yra tai, kad spręsdamas uždavinį žmogus dažnai susiduria su rimtais psichologiniais sunkumais.

Tai suprantama, nes net jeigu uždavinys yra nesunkus ar net trivialus, tai man, sprendėjui, vis tiek malonu, kad aš jį įveikiau, kad aš galiu pasakyti, ko klaustas.

Tik tai nelabai praplečia mano išminties platumas ir gilumas, - na, žinojau ir padariau, kas čia tokio?

Visai kitas dalykas, kai manęs klausia kažko, kas ne labai paprasta, ko nelabai suprantu ar visai nežinau, nesu girdėjęs, dėl ko aš turiu laužyti galvą, pasitelkti visą savo patirtį, valią ir ryžtą ir laiką, kurio apskritai visada trūksta..

Net ir tada, dažnai būna, kad vis tiek negaliu rasti, ko prašomas.

Tada nereikia nusiminti, o tik nurimti ir vėl iš naujo tuo užsiimti.

Pradėkime nuo to, kas tikrai išeina

Sunku būtų rasti žmogų, kuris nepajėgtų išspręsti tokio uždavinio.

100 metrų ilgio medis buvo supjaustytas į 30 rąstgalių, kurie buvo arba 3, arba 4 metrų ilgio.

Kiek dar kartų reikėtų pjauti tuos rąstgalius, kad jie visi pasidarytų 1m ilgio?

Pirmasis paprastas ir doras pamąstymas būtų toks: 3 metrų rąstgalį, kad iš jo išeitų metriniai rastgaliai reikės pjauti du kartus, o tą 4 metrų – 3 kartus.

Todėl jeigu mes žinotume, kiek yra trimetrinių ir kiek yra keturiametrinių rąstgalių, tai trimetrinių rąstgalių skaičių padaugintume iš 2, keturiametrinių – iš 3 ir suskaičiavę tų skaičių sumą, sužinotume, kiek iš viso kartų reikės pjauti.

Toliau įprastinis sąlygos glaudinimo receptas būtų toks: pažymėkime trimetrinių rąstgalių skaičių x, keturiametrinių – raide y, tai kadangi iš viso jų yra 30, tai

$$x + y = 30,$$

o kadangi jie gauti iš 100 metrų ilgio kamieno, tai

$$3x + 4y = 100.$$

Net ir tokią paprastutę lygčių sistemą galima išspręsti truputį kitaip, negu tai paprastai yra daroma.

Kadangi 3 × 30 = 90, yra arčiau 100 negu 3 × 40 = 120, tai imame kalbėti taip: jeigu visi 30 rąstų būtų trimetriniai, tai jų bendras ilgis tebūtų 90, o yra 100, todėl ne visi rąstai yra 3-metriniai – yra ir 4-metrinių.

Jeigu vieną 3-metrinį rąstą iškeistume į vieną 4-metrinį (barteris!), tai bendras rąstų skaičius nepakistų, o laimėtume 1 metrą medžio kamieno. Kadangi jo laimėti mums reikia 10 metrų, arba tiek, kiek 90 skyrėsi nuo 100, tai reikia dešimtį 3-metrinių rąstigalių iškeisti į 10 4-metrinių.

Taigi yra 20 trimetrinių ir 10 keturiametrinių rąstgalių, todėl pjauti reikės 25 × 2+ 5 × 4 = 70 kartų.

O dabar pasižiūrėk, skaitytojau, kaip galima puikiai apsieiti be visos šitos trijų keturių metrų litanijos.

Pirmas judesys visiškai nelauktas – užuot pjaustę imamės priešingo veiksmo, būtent rąstgalių „lipdymo“: visus rąstgalius sulipdome į buvusį kamieną: kadangi tų rąstgalių yra 30, tai reikės 29 sulipdymų. Dabar jau kamienas sulipdytas, jo ilgis vėl 100 metrų, kaip pradžioje, supjaustome jį į metrinius rąstgalius, dabar pjauti, žinoma, jau reikės 99 kartus, iš jų ir per 29 ką tik lipdytas vietas, vadinasi, tikrų naujų pjūvių bus tik 99 – 29 = 70.

Ši puiki miniatiūra paimta iš maskvietiškų olimpiadinių knygų.

Šioje vietoje autorius norėtų pridėti pastabą, kad pagal antrąjį sprendimą visiškai nesvarbu, kokio ilgumo buvo tie rąstai (svarbu tik, kad jų ilgis būtų matuojamas sveikais metrais!) – sprendimas liktų toks pat – vėl būtų 29 suklijavimai, 99 nauji pjovimai, iš kurių 29 nebereikėtų, nes jie eina per „sulipdymo“ vietas, arba iš viso būtų 99 – 29 = 70 tikrų pjovimų.

Dar sykį pakartosime, kad svarbu tik, kad kamienas būtų supjaustytas „sveikais metrais“, na ir, suprantama, jų skaičius (šiuo atveju 30).

Manau, kad skaitytojas jau suvokė, kaip atsiranda, sakysime, tokie uždaviniai:

N metrų ilgio rąstas buvo supjaustytas į *n* dalis, kurių ilgiai yra. $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$.(visų tų rąstgalių ilgiai reiškiami sveikais metrais).

Kiek kartų reikėtų pjauti, kad visus rąstgalius supjaustytume į 1 m ilgumo dalis?

Skaitytojui turėtų būti visiškai aišku, koks šiuo atveju yra apsakymas?

Neatimsime malonumo iš skaitytojo pasakyti jį pirmiau mūsų, tik pridursime, kad teisingas atsakymas užrašomas 3 spaudos ženklais.

XXXIX SKIRSNELIS
ARBA PO PJAUSTYMŲ EINA LAUŽYMAI

Idėjų , nors labai paprastų atsiradimas, sprendžiančiojo galvoje nėra toks greitas kaip kad sprendžiančiam norėtųsi. Viskas turi savo kainą ir vertę. Viskas ateina pamažu ir tie, kurie galvoja, kad viskas darosi greitai, gali kiek atvėsti, prisiminę kaip Euklidas atsakė pas jį apsilankiusiam imperatoriui, paprašiusiam jį greitai išmokyti geometrijos. Jis drąsiai tarė: „Geometrijoje nėra karališkų kelių“.

Nors psichologiškai žiūrint, Euklido drąsa stulbina – nes su karališkais žmonėmis laikomasi kitokių mandagumo taisyklių – bet išminties požiūriu tai tikra tiesa – niekas per dvi dienas negali išmokti geometrijos.

Ir apskritai, mažai ko gero galima gerai išmokti per 2 dienas.

Viskas turi savo kainą.

Vėl papasakosime vieną labai paprastą uždavinį ir pasiūlysime skaitytojui truputėlį sunkėlesnį, bet stengsimės viską papasakoti taip, kad 10 minučių mąstymo turėtų pakakti, kad skaitytojas taptų to uždavinio sėkmės riteriu.

Tai vėl melodijos Sankt-Peterburge matytų uždavinių motyvais. Gražias melodijas nelengva užmiršti.

Gudrutis turi 100 kartelių, kurių kiekviena yra po 1m arba po 3m ilgio. Jis norėtų, panaudodamas jas visas atitverti stačiakampio formos sklypą, kurį tada jo senelis jam nupirktų ir užrašytų, bet tik su sąlyga jeigu jis sugebės tai atlikti tik vieną kartą perlauždamas vieną kurią kartelę.

Kaip Gudručiui ir čia pasirodyti gudriausiu?

Tai gana nesunku.

Nors ir nežinoma, kiek tiksliai kokio ilgio kartelių Gudrutis turi, bet tikrai aišku, kad vienų kurių jis turi pakankamai daug, bent jau daugiau negu 2. Tada jis gali paimti dvi iš tų kartelių ir „paversti“ jas dviem priešingomis stačiakampio kraštinėmis. Gi visas likusiais jis gali išdėti į eilę ir perlaužti, jei reikia tą lazdelę, esančią tiksliai per išdėliotų lazdelių vidurio vietą ir imti jas kitomis dviem stačiakampio kraštinėmis. Taip jis tikrai gaus stačiakampį lauždamas daugių daugiausiai vieną lazdelę.

O dabar uždavinys skaitytojui.

Gudrutis vėl turi 100 lazdelių bet dabar jų ilgiai jau nežinomi. Gudrutis vėl nori iš jų visų išdėlioti stačiakampį ir jeigu jam ne daugiau ne dviem laužimais pavyks tai padaryti, tai dabar jau senelė nupirks jam jo stačiakampiu atitvertą žemę, kuri šį kartą yra kurortinėje zonoje, arba tai būtų puiki investicija į anūkų ateitį.

Kaip dabar verstis Gudručiui? Primename, kad lazdelių vėl 100, tačiau jų ilgiai dabar neaiškūs, nors laužti atitveriant stačiakampį dabar galima jau 2 kartus, o nebe vieną, kaip kad buvo su 1m ir 3m kartelėmis.

O dabar jau esame subrendę griebtis visai neprasto uždavinio apie tai kaip turėdami daugybę 8 ir 9 cm pagaliukų, kurių bendras ilgis 18 metrų užsibrėžėme bet kuriuo atveju įtikinti ir save, ir pasaulį, kad visada galima dabar jau griežtai nelaužant pagaliukų sudėti taisyklingą 8-kampį, kuriame būtų panaudoti abiejų ilgių pagaliukai.

Taisyklingo aštuonkampio dėlionė iš 8 ir 9 cm ilgio pagaliukų, kurių bendras ilgis 1800 centimetrų – negi visada pavyks?

Kaip tai padaryti? Ko tada griebtis? Tai nuolatos bet ką darantį, bet ką bet ko besiėmusį žmogų lydintys klausimai.

Iš pradžių galėtume pabandyti elgtis santūriai ir laikydami, kad tą taisyklingą aštuoniakampį su 8 lygiomis kraštinėmis išdėlioti galima, turime, kad kiekvienos kraštinės ilgis tada turėtų būtų po 1800 : 8 = 225 cm.

Jeigu 8 cm ilgio pagaliukų yra x, o 9 cm ilgio pagaliukų – y, tai visų 8 cm ilgio pagaliukų ilgis yra $8x$, o visų 9 cm ilgio pagaliukų ilgis yra $9y$, o tai tada jų visų bendras ilgis yra $8x + 9y$, o tai 18 m arba 1800 cm.

Taip atsiranda lygybė

$$8x + 9y = 1800.$$

Ką ji mums sako? Ji sako, kad x dalijasi iš 9, nes iš jų dalijasi abu kiti lygybės nariai – 1800 ir $9x$. Todėl iš 9 privalo dalytis x. Lygiai taip pat y dalijasi iš 8, nes iš 8 dalijasi abu likę lygybės nariai1800 ir $8x$.

Vadinasi x dalijasi iš 9, o y dalijasi iš 8. Ką tai reiškia aiškumo prokalbe kalbant? Tai reiškia kad 8 cm pagaliukų skaičius dalijasi be liekanos iš 9, o 8 cm pagaliukų skaičius dalijasi be liekanos iš 8 Primename, kad pagal sąlygą tikrai esama abiejų rūšių pagaliukų .

Vadinasi, mes galime visus 8 cm ilgio pagaliukus suskirstyti ryšeliais po 9, kad jokio laisvo pagaliuko 8 cm neliktų ir lygiai taip galime visus 9 cm pagaliukus suskirstyti ryšeliais po 8 taip , kad jokio laisvo 9 cm pagaliuko irgi nebebūtų.

Dabar būtų gerai susivokus kiek kartu yra tų abiejų ilgių ryšelių. Tai jau visai paprasta: kadangi 8 cm ilgio pagaliukai suskirstyti po 8, o 8 cm pagaliukai – po 9, tai abiejų ryšelių pagaliukų bendras ilgis yra 8 x 9 = 9 x 8 = 72 cm, vadinasi, tų ryšelių yra tiek kiek kartų 72 cm telpa 1800 cm, o tai yra 1800 : 72 = 25 kartus. Vadinasi, abiejų rūšių ryšelių yra iš viso 25.

Dabar seka vienas mikrojudesys. Kadangi mums reikia mūsų 8 ir 9 cm pagaliukais surinkti 8 kartus po 225 cm, o kiekvienos rūšies pagaliukų yra, tai paimkime vieną 9 cm ilgio po 8 pagaliukų ryšelį ir išdėliokime jį po 1 pagaliuką į kiekvieną mūsų norimo 8-kampio kraštinę. Tada mums dar liks kiekvienai kraštinei duoti po 225 – 9 = = 216 cm ilgio pagaliukų.

Bet dabar mums dar liko 24 ryšeliai po 72 cm bendro ilgio kiekvienas. Todėl į kiekvieną kraštinę išklosime po bet kuriuos 3 vis tiek 72 cm suminio ilgio ryšelius ir reikalas bus atliktas.

XL SKIRSNELIS
PRIE AKROPOLIO PAPĖDĖS AKMENŲ DĖLIONIŲ

Šio uždavinio idėja priklauso įžymiojo Rusijos nestandartinio švietimo lyderio Igorio Rubanovo kūrybinei laboratorijai.

Sizifas legendinio Olimpo kalno papėdėje turi prisirinkti penkių skirtingų svorių akmenų (jis gali imti ir vienodo svorio akmenis), kad pajėgtų su Hefaistu sužaisti pusiausvyros žaidimą. Hefaistas po vieną kiekviena ranka gali paliesti bet kuriuos 2 Sizifo pasirinktus akmenis. Tada Sizifas savo atrinktų akmenų krūvelėje visada turi galėti rasti paliesti kitus 2 akmenis, kad abiejų ir jo, ir Hefaisto paliestų akmenų bendras svoris būtų vienodas. Kalno papėdėje yra bet kiek bet kurio svorio akmenų.

Taip pasielgti Sizifas turi pajėgti kiekvieną kartą, kad ir kokius 2 akmenis Hefaistas bepaliestų.

Dievai už bausmę Sizifui buvo padarę taip, kad jis be paliovos turėdavo ritinti sunkų akmenį į kalno viršūnę ir kai jau jis būdavo jį beveik užritinęs, akmuo išsprūsdavo iš jo rankų ir nusirisdavo žemyn ir Sizifas vėl be jokio atokvėpio turėdavo jį vėl ritinti aukštyn. Dabar jie pažadėję jam už tai atokvėpį liepė Sizifui surasti patį mažiausią įmanomą penkių skirtingų svorių akmenų skaičių, kad jis visada pajėgtų į bet kuriuos 2 Hefaisto paliestus akmenis pajėgti paliesti kitus 2 tokio paties bendro svorio akmenis.

Sizifas ėmė galvoti, nuo ko jam pradėti norint pajudėti.

Jis sugalvojo supaprastinti klausimą pirmiausiai pasirinkdamas mažiausiai 2 vieno svorio akmenis. Vėliau jis planavo imtis 2 skirtingų svorio akmenų atvejo ir taip atsikasti iki 5 skirtingo svorio akmenų atvejo.

Taigi, jeigu jam būtų leista imtis mažiausiai 2 vienodo svorio akmenų atvejo, tai tada jam pakaktų 4 vienodų akmenų. Gali sau Hefaistas tada paliesti vienus kuriuos 2, jis palies kitus tokio paties svorio 2 akmenis.

Jeigu Sizifui reiktų pasirinkti 2 skirtingų svorių akmenų, tai jų tikrai reikėtų 8, nes Hefaistui paliečiant 2 skirtingų svorių akmenis, jam reikėtų turėti kitus 2 tokių pačių skirtingų svorių akmenis.

Vadinasi abiejų svorių akmenų yra mažiausiai po 2 ir tada Sizifui liečiant vienus 2 mažiausio (didžiausio) svorio akmenis Sizifui reikia turėti dar kitus 2 mažiausio (didžiausio) svorio akmenis.

O turėdamas po 4 dviejų skirtingų svorių akmenis Sizifas pajėgs atsakyti į bet kokį Hefaisto 2 akmenų palietimą.

Mes jau supratome, kad penkių skirtingų svorių akmenų atveju Sizifui tikrai neprireiks daugiau negu $5 \times 4 = 20$ akmenų, nes Sizifas visada pajėgs atsakyti Hefaistui.

O gal galima apsieiti su mažiau?

Mes pasistengsime įrodyti, kad 5 skirtingo svorio akmenų atveju 13 akmenų pakanka, o su mažiau išsiversti nepasiseka.

Pradžia ta pati. Hefaistas palietus 2 pačių lengviausių (arba pačių 2 pačių sunkiausių) svorių akmenis Sizifas turi galėti paliesti kitus bendro tokio paties svorio akmenis. Tai vėl tegali būti kiti 2 dviejų lengviausių (arba sunkiausių) svorių akmenys. Vadinasi, dviejų pačių lengviausių (ir pačių sunkiausių) svorio akmenų yra po 2, taigi, iš viso jau turi būti $2+ 2 + 1 + 2 + 2 = 9$ akmenys (vidurinis vienetas įrašytas dėl to, kad turi būti bent vienas viduriniojo 5-tojo svorio akmuo.

Tačiau, jeigu yra 2 paties lengviausio (arba sunkiausio svorio) akmenis, tai Hefaistui, juos palietus, reikės dar kitų 2 tokių pačių lengviausių (arba 2 pačių sunkiausių) akmenų, vadinasi jų jau bus bent $4 + 2 + 1 + 2 + 4 = 13$.

Dabar mes pateiksime pavyzdį, liudijantį, kad yra tokie 13 konkretaus svorio akmenų, kad Sizifas visada pajėgia į Hefaisto 2 akmenų palietimą atsakyti savuoju kitų dviejų to paties bendrojo svorio akmenų palietimu.

Sizifui užtenka pasirinkti tokius 13 akmenų (primename, kad Olimpo papėdėje yra kiek norime bet kurio svorio akmenų. Žmonėms, mėgstantiems tvarką, galėtume leisti manyti, kad Olimpo kalno papėdėje guli tik sveiko svorio akmenys – sprendime tai nieko nekeičia.

Štai Sizifui pakankamas 13 akmenų komplektas (1, 1, 1, 1, 2, 2, 3, 4, 4, 5, 5, 5, 5). Nesunku matyti, kad ir ką Hefaistas bepaliestų, Sizifas sugebės paliesti kitus 2 bendro tokio paties svorio, kaip ir Hefaisto paliestieji.

XLI SKIRSNELIS
APIE PAPRASTŲ UŽDAVINIŲ VERTĘ, ARBA KADA GANA BŪTI VEIKLIU PENKTOKU?

1960/61 Čekoslovakijos olimpiadoje buvo pasiūlytas uždavinys.

Duota skaičių eilutė

1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5,...

Raskite koks skaičius yra 1000-tasis toje eilutėje.

Mes tą uždavinį kiek praplėsime ir pirmiau paklausime, koks yra 100-tasis tokios eilutės skaičius o po to koks tūkstantasis ir, žinoma, dar paklausime, koks yra 2005 tos eilutės skaičius?

Žiūrėdami į tą eilutę, mes matome, kad vienodų skaičių vis po vieną daugėja, arba kitaip sakant, pastebime, kad vienetas buvo tik 1, dvejetų buvo jau 2, trejetų – 3, ketvertų – 4 ir t. t.

Vadinasi dedant 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 +... mums pirmiausiai reikia žiūrėti kelintas dėmuo persirita 100, toks skaičius ir bus tas 100-tasis skaičius toje eilutėje.

Dėdami iš eilės prie 1 vis po 1 padidėjančius skaičius gauname

1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55, 66, 78, 91, 104,...

Kadangi 100 persirita 14-tasis dėmuo, tai 100-tasis tos eilutės skaičius yra 14. Žinoma 14 yra ir 92-tasis, ir 93-sias, ..., iki pat 104-tojo skaičiaus.

Na, o su 1000-tuoju kaip? Negi vėl skaičiuosime rankomis?

Dabar mums yra reikalingas toks n, kad

$1 + 2 + 3 +...+ (n - 1) < 1000$, o

$1 + 2 + 3 +...+ (n - 1) + n > 1000$

arba toks n, kad

$$2(1+2+3+...+(n-1)) = ((1+(n-1)) + (2+(n-2)) +\ldots+ ((n-1)+1)) = n(n-1) < 2000,$$

o

$$2(1+2+3+\quad+(n-1)+ n) = ((1+n) + (2+(n-1)) +\ldots + (n+1) = n(n+1) > 2000$$

Kadangi $n(n-1)$ su $n(n+1)$ sukinėjasi apie n kvadratą o 45 kvadratas yra 2025, tai pažiūrime ir randame, kad $44 \times 45 = 1980$, o $45 \times 46 = 2070$, todėl ieškomasis n yra 45.

Skaitytojas pats nesunkiai ras, kuris dėmuo yra 2005-tasis ir net kuris 1 000 000-asis ar net 1 000 000 000-asis

XLII SKIRSNELIS
LINKSMOJI MATEMATIKA

Visi gerai atsimename ariją „Figaro čia, Figaro ten“. Matematikoje irgi daug judrumo ir nesunku įsivaizduoti, kad iš pradžių buvo pora (A, B), o po to ir pora (B, A) ar dar kas nors panašaus.

Neretai nutinka, kad iš teiginio A išplaukia teiginys B. Pavyzdžių toli ieškoti nereikia. Jų apstu visur: pavyzdžiui, jeigu teiginys A yra „Giedrią dieną patekėjo saulė“, o B yra „Neužtemdytame kambary pasidarė šviesu“, tai yra visai aišku, jog esant normalioms įprastinėms aplinkybėms, jei įvyko A, tai įvyko ir B.

O jeigu dabar B sukeistume su A, tai kaip tada? Ar būtinai, jeigu jau neužtemdytam kambaryje pasidarė šviesu, tai ar būtinai taip nutiko dėl to, kad giedrią dieną patekėjo saulė?

Aišku, kad visai nebūtinai ir atsakyti galima šmaikščiu klausimu:

Kas yra svarbesnis: Mėnulis ar Saulė?

Atsakymas: Mėnulis, nes šviečia naktį, kai nėra Saulės, o dieną ir taip šviesu.

Būtinos ir pakankamos sąlygos

Jeigu iš to, kad teisingas teiginys A, išeina, kad teisingas ir teiginys B, tai reiškia, kad teiginys A „užtikrina“ teiginį B.

Jeigu patekėjo saulė, tai pasidarė šviesu. O jeigu pasidarė šviesu, tai ar būtinai patekėjo saulė? Visai ne, tiesiog vidurnaktį galėjome įjungti galingą prožektorių.

Žaismingai tai galėtume išreikšti **žodžiais „Kiekvienas tortas yra turtas, bet ne kiekvienas turtas yra tortas“.**

Panašias išvadas galėtume padaryti iš kitos istorijos arba

Iš istorijos apie bonifacą ir jo katiną

Du lygiateisiai partneriai – Bonifacas ir jo katinas Leopoldas - pasirašė sutartį, pagal kurią Bonifacas už tinkamą maitinimą įsipareigojo tvarkyti namuose pelių ir žiurkių apskaitą, o dar teikti papildomas paslaugas, nes jis pasižadėjo, kad jeigu rytoj lis, tai jis šiandien nusičiaudės.

Ką tik jis nusičiaudėjo.

Rytoj lis, pamanė Bonifacas. Ar būtinai jis teisus?

Skaitytojas, kuriam po 3 sekundžių čia viskas aišku ir jis plačiai šypsosi, gali pasveikinti save su tuo, kad su logine klausa pas jį viskas kuo puikiausiai.

O jeigu ne, tai tada kas? Ogi nieko tokio. Viską galima ugdyti. O šiaip jau galėjo būti ir taip, kad buvote išsiblaškęs skaitydamas sąlygą. O gal nemėgstate kačių?

Kad dar labiau prablaškytume Jus, o tai svarbu, nes mes kalbame, kad ir juokais bet apie (psicho)logiškai labai svarbius dalykus, pateiksime dar vieną šmaikščią epigramą.

Sir, I admit your general rule,
That every poet is a fool:
But you yourself may serve it,
That every fool is not a poet.

Tai galėtume išversti maždaug taip:

Ir kas gi, mielas pone, ginčytis išdrįs,
Su jūsų žodžiais: kas poetas, tas kvailys.
O jūsų pavyzdys, lig šiolei neregėtas,
Įrodo, kad kvailys - nebūtinai poetas.

XLIII SKIRSNELIS
AR YRA GYVYBĖ MARSE, ARBA APIE MATEMATINIUS SIURPRIZUS

Jeigu mums pasakytų, kad Marse yra gyvybė, tai mes labai nustebtume, o tūlas tuo visiškai nepatikėtų.

Taip būna ir su uždaviniais. Dažnai mūsų klausia to, kas iš pirmo žvilgsnio yra absoliučiai neįtikėtina, atrodo neįmanoma, na, kažkokios fantazijos. Ir vis dėlto staigmenų ir netikėtumų būna visur ir tai irgi yra rimta gyvenimiško ar matematinio žavesio komponentė.

Tiesą pasakius, matematikoje su jos tūkstantmetėmis tradicijomis ir sukurtais subtiliais metodais to žavesio yra tiek, kad nors vežimu vežk.

Tuojau pamatysite, kad netikėtumų atsiranda jau aritmetikoje.

Štai toks pavyzdys (arba psichologinis siurprizas mūsų aritmetinei intuicijai) – arba gal ne vien Marse yra gyvybė.

Visi Marso ir Merkurijaus vyrai ir moterys mokosi visą gyvenimą ir kiekvienais metais jų žinios yra vertinamos vienu pažymiu taip kaip ir mūsuose – nuo 1 iki 10.

2004 metais pasirodė, kad visų Merkurijaus moterų pažymių vidurkis yra didesnis negu visų Marso moterų pažymių vidurkis ir visų Merkurijaus vyrų pažymių vidurkis irgi yra didesnis už visų Marso moterų pažymių vidurkį.

Ar žinodami tik tiek, kiek čia pasakyta, mes galime kategoriškai tvirtinti, kad visų Merkurijaus gyventojų pažymių vidurkis yra didesnis negu visų Marso gyventojų pažymių vidurkis.

Iš pirmo žvilgsnio čia viskas labiau negu aišku. Jeigu ir tos geresnės, ir tie geresni, tai ir vieni visi kartu bus geresni už kitus visus kartus.

Psichologiniu požiūriu čia kažkiek panašu į verslininko balanso uždavinį. Apskritai dažniausiai būna taip, kad jei merkurietės geresnės už marsietes ir merkuriečiai geresni už marsiečius, tai ir visas Merkurijus apskritai turėtų turėti aukštesnį vidurkį negu visas Marsas.

Tačiau dažniausiai nereiškia visada: jeigu aš 10 kartų ėjau ledu ir neįlūžau, tai kas man galėtų garantuoti dėl 11-to ėjimo per ledą.

Pateiksime pavyzdį, kad taip gali nutikti.

Sakysime, kad Merkurijuje gyvena Merkutė, Merkys ir Merkelis, besimokantys atitinkamai pažymiais 10, 5 ir 6, o Marse – Marsytė, Marselietė ir Marselis, kurių pažymiai yra atitinkamai 9, 9 ir 6.

Taip mes, žemės dukros ir sūnūs, žvelgiame į dvi trumputes ataskaitas:

MERKURIJUS

Pavardė	Pažymys	Moterų vidurkis	Vyrų vidurkis	Visų vidurkis
MERKUTĖ	10	**10**		
MERKYS	6		(6+6)/2 = **6**	
MERKELIS	6			(10+6+6)/3=**7,34**

MARSAS

Pavardė	Pažymys	Moterų vidurkis	Vyrų vidurkis	Visų vidurkis
MARSYTĖ	9			(9+9+5)/3=**7,67**
MARSELIETĖ	9	(9+9)/2= **9**		
MARSELIS	5		**5**	

Ir viskas kaip ant delno: atskirai ir tie geresni, ir tos geresnės, o kartu – atvirkščiai, nors tu ką. Nieko sau statistiniai nuotykiai.

Ir pa(si)tikėk, žmogau, po viso to tais visais vidurkiais.

Beje, doras penktokas pastebėtų, kad nors Marsytės ir Marselietės bendras vidurkis yra tik 9, lyginant su Merkutės, kuri turi 10, tačiau abi Marsietės į bendrą visų vidurkį įnešė 9 × 2 – 10 = 8 svariais balais daugiau negu Merkutė, tie 8 balai ir nulėmė, nes Merkys ir Merkelis, kurių bendras vidurkis yra 6, ir kuris, žinoma, yra didesnis už Marselio 5, teįnešė 6 × 2 – 5 = 7 balais daugiau.

O tas 1 jų skirtumo balas ir nusvėrė svarstyklių (vidurkių) lentelę marsiečių pusėn.

XLIV SKIRSNELIS
REIŠKINIO „MYLI –NEMYLI“ MATEMATINIAI MODELIAI

Esame tvirtai įsitikinę kad visi rimti gyvenimiški dalykai turi savo matematinius analogus.

Turi matematinę interpretaciją ir spėliojimas ar myli, ar nemyli pešiojant ramunės žiedlapius ir ji labai paprasta: vietoj myli matematikas dažnai gali pasakyti lyginis, vietoj nemyli nelyginis ir samprotauti toliau. Situacija, kai labai daug lemia ar net viską išsprendžia svarstymai, kas čia lyginis, kas nelyginis, dažnai sutinkama įvairiausiuose uždaviniuose.

Pateiksime vieną pavyzdį. Uždavinio veikėjus pavadinsime plačiai žinomos liaudies dainos veikėjų Jono, Baltraus ir Matijošiaus vardais, tik šį kartą jie ne Alvitą dūdos pirkti „varo“, o su 7 × 7 lentelėje surašytais visais sveikaisiais skaičiais nuo 1 iki 49 krapštosi.

Taigi dar kartą pakartokime, kad 7 × 7 matmenų lentelės langeliuose surašyti visi sveikieji skaičiai nuo 1 iki 49 ir pasakysime, kas ten buvo toliau. Toliau Jonas teisingai suskaičiavo visų kiekvienos eilutės ir visų kiekvieno stulpelio skaičių sumą, suprantama, kad tų sumų iš viso buvo 14 – 7 eilučių ir 7 stulpelių skaičių sumos.

Lygines sumas Jonas atidavė Baltrui, o nelygines jaunėliui Matijošiui. Ir Baltrus, ir Matijošius atskirai susiskaičiavo jiems atiduotų sumų sumą. Susiskaičiavę jie labai nustebo, kad jų abiejų suskaičiuotos sumų suma išėjo vienoda.

Dar jiems nepradėjus linguoti galvomis svarstant, kokių tik sutapimų gyvenime nesama, apie tų sumų sutapimą išgirdęs tėvas pasakė, kad kuris nors iš jų sūnelių bus „pridirbęs“, arba, paprastai kalbant, suklydęs.

Klausiame, kuo remiasi tėvo išmintis?

Primename, kad Jonas, tas kuris suskaičiavo tas 14 sumų ir lygines atidavė vienam, o nelygines sumas – kitam broliui skaičiavo labai susikaupęs ir jokių aritmetinių klaidų nepadarė.

Nepriklausomas ekspertas ir Žemės ūkio banko Arklėnų skyriaus patarėjas dr. Tadas Blinda tyręs šią istorija, iš karto atkreipė dėmesį į du dalykus:

1. Kadangi Baltrui buvo duodamos lyginės sumos, tai Baltraus sumų suma, jeigu tik ji teisingai buvo suskaičiuota, privalo būti lyginė.

2. Visi lentelės skaičiai arba skaičiai nuo 1 iki 49 į sumą „pakliūdavo“ du kartus – vieną kartą kaip atitinkamos eilutės, o kitą kartą – kaip atitinkamo stulpelio skaičiai.

3. Jeigu Baltraus sumų suma B yra tokia pati kaip Matijošiaus sumų suma M, tai abiejų brolių sumų sumos suma $B + M = 2B = 2M$. Kadangi B, kai sakyta, yra lyginis skaičius, tai $2B$ dalinsis be liekanos jau iš 4.

Dabar jau visi ėmė gėrėtis tėvo išmintimi: Jeigu sumų sumos suma dalijasi iš 4, tai tikrai kažkas negerai, nes ji privalo būti lygi dvigubai visų skaičių nuo 1 iki 49 sumai arba

$$2\,(1 + 2 + 3 + ... + 47 + 48 + 49) = 2450,$$

o 2450, deja, iš 4 nesidalija.

Taigi bent vienas kuris iš brolių, Baltrus arba Matijošius – o gal net ir abu – tikrai bus apsirikę.

XLV SKIRSNELIS
KĄ PRADĖJAI, DIRBK IR BAIKI, NORS TENAI IR KAŽINKAS

Jau esame citavę apie šį gražų pasakymą iš Kazio Binkio poemos apie Tamošių Bekepurį.

Tik psichologiškai žiūrint, gražūs pasakymai dažniausiai yra nelengvai, neretai sunkiai o kartais net labai sunkiai įvykdomi. Sakysime, visi žino, kad būti darbščiu yra labai praktiška, naudinga ir šiaip labai patogu, tik, deja, neretai nutinka taip, kad kai reikia ką nors sudėtingesnio baigti, žiūrėk, ir nusvyra rankos.

Nežinau, skaitytojau, gal tau taip ir nebūna, tačiau autoriui taip dažnokai nutinka.

Kad tai neliktų tik tušti žodžiai, papasakosime apie vieną uždavinį, spręstą viename 2005 jaunųjų Lietuvos galvų susiėjime.

Visų skaičių nuo 1 iki N skirstymo į tris dalis su vienoda suma – ar tai visada įmanoma?

Suprantama, kad jeigu aibę būtų galima būtų suskirstyti į tris (nesikertančias) dalis su vienoda jos skaičių suma, joje turi būti bent trys skaičiai.

Tačiau aibės {1, 2, 3} aiškiai negalima suskirstyti į tris su vienoda suma.

Toliau kantriai žiūrime į sekančią aibę {1, 2, 3, 4} ir klausiame, tai galima ją suskirstyti į tris dalis su vienoda kiekvienos dalies skaičių suma, ar ne?

Čia galimybių suskirstyti į tris dalis nedaug, jas nesunkiai suskaičiuotume „ant vienos rankos pirštų“, nors labai tiksliai sakant vienos rankos pirštų „truputį neužtektų“, nes jeigu keturelementę aibę skirstome į tris nesikertančias dalis su vienoda skaitmenų suma, tai jokia dalis nėra tuščia, o tada suprantame, kad į vieną kurią aibę įeis du skaičiai, o į likusiais dvi - po vieną. Tokių atvejų yra 6. Išvardinsime juos:

Štai tie galimi skirstiniai: {(1, 2), (3), (4)}, {(1, 3), (2), (4)}, {(1, 4), (2), (3), {(2,3), (1), (4)}, {(2,4), (1), (3)} ir galiausiai {(3,4), (1), (2)}.

Taip perrinkinėtų kompiuteris – proziškai, be emocijų, bet ir be klaidų išvardintų visus atvejus, pasižiūrėtų, kad nė vienas netinka ir palieptas išspausdintų arba tik atsakymą, kad ne, o jeigu norėtume, tai ir visą lentelę.

Taip dažnai darytų ir pradedantis tvarkingas penktokas. Tačiau išrašęs tai, ką tik išrašėme mes, jis pasidarytų gudresnis, nes įgijo praktikos, arba kitaip sakant, „įsijautė“ į aibę {1, 2, 3, 4} ir mato jos elementų sumos galimybes.

Dabar, kai psichologiškai žiūrint, jis apsiprato su ta aibe, tai mėgindamas skirstyti ją į tris dalis su vienoda suma jis sakys: jeigu tai įmanoma, mažiausias tos aibės skaičius 1 negali likti vienas, nes jis jau ir taip pats mažiausias. Taigi su 1 reikia imti ir dar ką nors.

Tačiau, jeigu su 1 imsime 2, tai jų suma bus jau 3, o kitos dvi likusios vienaelementės aibės bus (3) ir (4), jas būsime priversti imti po vieną į kiekvieną ir visos sumos nebus lygios.

Panašiai, bus ir jeigu 1 imsime su 3.

Na, o jeigu 1 imsime su 4, tai visų skirstinio aibių sumos bus skirtingos.

Dabar dar geriau jau įsijautę į tai, kas čia vyksta, galėtume jau išsiversti ir vienu sakiniu: Kadangi aibės {1,2,3,4} elementų suma yra 1 + 2 + 3 + 4 = 10, tai jos negalima suskirstyti 5 tris dalis su vienoda suma jau vien dėl to, kad tada 10 turėtų dalytis be liekanos iš 3, o taip niekaip nėra.

Jeigu toliau imtume aibę {1, 2, 3, 4, 5} , tai ji natūraliai susiskirsto į tris dalis su vienoda suma –{(1, 4), (2, 3), (5)}.

Nėra vargo ir su sekančia aibe {1, 2, 3, 4, 5, 6}, nes jos skirstinys į tris dalis su vienoda suma yra toks {(1,6), (2, 5), (3, 4)}.

Sekanti aibė {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}, vėl kaip ir aibė {1, 2, 3, 4}, niekaip nesileidžia suskirstoma į tris dalis su nesikertančia suma. Tik jau dabar rankom perrinkti visus atvejus, kaip ką tik darėme, būtų daug sunkiau, nes, nors prisidėjo tik trys skaičiai 5, 6 ir 7, bet skaidymo būdų ženkliai padaugėjo.

Besiaiškinant, ar galima suskirstyti, ar ne, mus gelbsti tas baigiamasis pastebėjimas, kaip ir su aibe {1, 2, 3, 4}, o būtent, tada sakėme, kad tos keturelementės aibės skaitmenų suma 1 + 2 + 3 + 4 yra 10, ir todėl, kad 10 nesidalija be liekanos iš 3, tos aibės negalima suskirstyti į tris dalis su vienoda jos skaičių suma. Dabar prie tos aibės prisidėjo skaičiai 5, 6 ir 7, tai ta „globali“ suma padidėjo skaičiumi 5 + 6 + 7 = 18 ir dabar ji jau yra 10 + 18 = 28 ir vėl nesidalija iš 3, todėl ir aibės {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}suskirstyti į tris dalis su vienoda suma negalima.

Bet dabar psichologiškai žiūrint labai malonu, nes atsivėrė „vienas kelias į begalybę“, nes jei prie aibės {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7} prijungtume dar sekančius tris skaičius, arba skaičius 8, 9, 10, tai vėl viskas pasikartotų, nes tų prisidėjusių skaičių 8, 9 ir 10 suma 8 + 9 +10 yra 27, vadinasi, dalijasi iš trijų, todėl visų skaičių nuo 1 iki 10 suma yra 28 + 27 arba 55, ir vėl iš 3 nesidalija, todėl ir jos negalima suskirstyti į 3 dalis su vienoda suma.

Ir taip liks „per amžius“, nes kad ir kokius sekančius skaičius n+1, n+2 ir n+3 prie į tris dalis su vienoda elementų suma nepadalijamos aibės {1,2,3,..., n}, nes tos aibės visų elementų suma paprasčiausiai nesidalija iš 3, beprijungtume, naujai „atėjusių“ skaičių suma yra (n+1)+(n+2)+(n+3) = 3n+6 = 3(n + 2), taigi dali iš 3, ir todėl praplėstosios aibės visų elementų suma vėl bus nedali iš 3, taigi ir visa padidėjusi aibė vėl yra nepadalijama į 3 poaibius su vienoda jose esančių skaičių suma.

Taigi, išsiaiškinome, kad jokia iš aibių

{1, 2, 3, 4}, {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}, {1, 2, 3,...,10}, {1, 2, 3, ..., 13},..., {1, 2, 3,..., 3n+1} nepadalijama į tris poaibius su vienoda juose esančių skaičių suma.

O kitos kaip?

Prisiminkime, kad sakėme, jog, pavyzdžiui, aibės {1, 2, 3, 4, 5} ir {1, 2, 3, 4, 5, 6} padalijamos į tris dalis su vienoda jose esančių skaičių suma:

$$\{1, 2, 3, 4, 5\} = \{1, 4\} + \{2, 3\} + \{5\}$$

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}=\{1, 6\}+ \{2, 5\} + \{3, 4\},$$

kur „+“ ženklu dabar pažymėjome poaibių junginį.

Dabar prie bet kurios iš jų galime prijungti sekančius tris skaičius, išlaikydami visų poaibio elementų sumų lygybę.

Pirmuoju atveju reikia prijungti skaičius 6, 7 ir 8 – tai visai paprasta: iš poaibio {1, 4} „išimsime“ 1 ir į jį „paskirsime“ 8, į antrą poaibį {2, 3}„paskirsime“ 7, galiausiai į poaibį, kuriame buvo vienintelis skaičius, 5 „paskirsime“ tą ką tik „išimtąjį“ 1 ir dar likusį niekur dar nepriglaustą skaičių 6.

Gausime

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} = \{4, 8\} + \{2, 3, 7\} + \{1, 5, 6\}$$

Lygiai taip padarysime su skaidiniu

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}=\{1, 6\}+\{2, 5\}+\{3, 4\},$$

įjungdami sekančius tris skaičius 7, 8 ir 9 taip: iš pirmojo poaibio paimsime 1 ir ten įjungsime 9, į antrąjį įjungsime 8, o į trečiąjį įjungsime iš pirmojo poaibio ką tik paimtąjį 1 ir dar likusį niekur neimtą 7 ir turėsime dėstinį

{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}={6, 9} + {2, 5, 8} + {1, 3, 4, 7}

su vėl vienoda visų poaibių skaičių suma (= 15).

Šiuos 2 atvejus taip smulkiai išnagrinėjome dar ir dėl to, kad būtų visai aišku, kad toks prijunginėjimas gali tęstis be pabaigos:

Jeigu turime aibę

{1, 2, 3, ..., n} padalintą į tris poaibius A, B ir C su vienoda poaibių A,B ir C skaičių suma ir norime prijungti sekančius tris skaičius $n + 1$, $n + 2$ ir $n + 3$, išlaikydami vienodą tuose trijuose poaibiuose esančių skaičių sumą, tai darome lygiai taip. kaip ką tik darėme: kažkuriame iš tų poaibių, sakykime, A yra vienetas, jį paimame ir tą poaibį A įjungiame skaičių $n + 3$ (vadinasi to poaibių skaičių suma padidėja $(n + 3) – 1 = n + 2$), į antrąjį poaibį B įjungiame $n + 2$ (vadinasi, vėl skaičiumi $n + 2$ padidėja ir visų poaibio B skaičių suma, galiausiai, į trečiąjį poaibį C įjungiame iš poaibio A ką tik paimtąjį 1 kartu su paskutiniuoju dar niekur neįjungtu $n + 1$, taigi ir visų poaibio C skaičių sumą padidiname skaičiumi $(n + 1) + 1 = n + 2$.

Pakartokime, kad visų poaibių skaičių sumą padidinome vienu ir tuo pačiu skaičiumi $n + 2$, todėl, kadangi pagal sąlygą visų poaibių sumos buvo tokios pačios ir prie prijungėme skaičius su vienoda suma, todėl ir praplėstųjų poaibių visų skaičių sumos bus irgi vienodos.

Taigi dabar jau žinome, kad visus poaibius

{1, 2, 3, 4, 5}, {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}, {1, 2. 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10. 11},..., {1, 2, 3, ..., $3n – 1$}
ir

{1, 2, 3, 4, 5, 6, }, {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9},
{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12},...,{ 1, 2, 3, ..., $3n$}

galima padalinti į tris dalis su vienoda visų tų trijų dalių skaičių suma.

O viskas prasidėjo taip nekaltai nuo kelių skaičių skirstinių.

XLVI SKIRSNELIS
DAR VIENAS UŽDAVINYS SU SUMŲ LYGYBĖMIS

Kokią nors aibę padalyti į vienodą elementų skaičių turinčių dalių taip, kad dar kas nors tose aibėse sutaptų, visada buvo ir įdomu, ir nelabai paprasta.

` Visada, kai sutampa keli požymiai, tai esti psichologiškai įdomu.

Paimkime tokį pavyzdį, kurį leiskime sau pateikti klausimo forma.

Ar galima visų sveikųjų teigiamų skaičių nuo 1 iki 105 aibę suskaidyti į 15 poaibių, turinčių po 7 elementus su vienoda visų tų poaibiuose esančių skaičių suma?

Vėl galėtume pradėti nuo mikrojudesių, arba nuo beveik nepastebimų palengvinimų.

Pirmiausiai pastebėkime, kad visų aibės nuo 1 iki 105 skaičių suma yra 1+2+3+…+ 103+104+105 = ((1+105) × 105)/2 = 105 × 53 = 5565, tai jeigu tą aibę galima padalyti į 15 poaibių, turinčių po 7 elementus, tai kiekvieno tokio poaibio visų elementų suma turi būti būti lygi 5565 : 15 = 371.

Pirmiausiai aibę (1, 2, 3, …, 103, 104, 105) pamėginkime truputį „pastumti“ taip, kad jos vidurinis elementas būtų 0.

Iš karto paklauskime, ką mes iš to laimėsime - atsakymas, mes įjungsime simetrijos „jausmą“ – mes esame savotiškai daug labiau įpratę, kad nulis yra „vidurio“ taškas.

Tada mūsų uždavinys virstų tokiu:

Visų sveikųjų skaičių nuo (–52, –51, –50,…, 0, „… 50, 51, 52) suskirstykime į 15 poaibių po septynis elementus kiekvienas, kad kiekvieno 7-elemenčio poaibio elementų suma būtų lygi 0.

Tolesnis mikrojudesys – jau priešpaskutinis - būtų pirmiau surasti 15 aibių po 3 elementus kiekviena, kad kiekvieno tokio trejeto suma būtų lygi 0 ir kad visų tų parinktų 15 × 3 = 45 skaičių aibė būtų irgi simetriška nulio atžvilgiu – t. y., jeigu į tą aibę, pavyzdžiui, įeina skaičius 10, tai į ją įeitų ir skaičius –10.

Tai padaryti nesunku – tokias 15 poaibių po 3 elementus su nuline suma kiekvienas galima tiesiog išvardyti:

(–1, 0, 1), (4, 5, –6), (–4, –5, 6), (7, 8, –9), (–7, –8, 9), (10, 11, –12), (–10, –11, 12), (13, 14, –15), (–13, –14, 15), (16, 17, –18),(–16, –17, 18), (19, 20, –21), (–19, –20, 21), (22, 23, –24) ir (–22, –23, 24).

Ši 45 lementų aibė tikrai yra simetriška nulio atžvilgiu. Todėl už jos ribų likę 105 – 45 = 60 elementų gali būti suskirstyti į 30 vienas kitam priešingų skaičių (a, $–a$) porų.

Todėl dabar turėdami 15 3-elemenčių aibių su nuline suma kiekviena, mes galime prijungti po 2 priešingų elementų poras ir turėsime jau visą sveikųjų skaičių nuo –52 iki +52 aibę išskaidę į 15 7-elemenčių aibių su 0 lygią visų skaičių suma kiekvienoje aibėje.

Dabar ją pakanka „pastumti“ atgal per 53 kiekvieną skaičių, tada elementų suma , žinoma, liks tokia pati ir bus lygi 53 × 7 = 371, apie ką jau kalbėjome.

XLVII SKIRSNELIS
NUO DIDINGO IKI PAPRASTO – VIENAS ŽINGSNIS

Žinome, kad klasikai yra sakę, kad nuo tragiško iki juokingo atstumas kartais yra vienas žingsnis. Kiekvienas rimtas pasakymas turi daugybę interpretacijų - viena iš tokių tokia galimų interpretacijų yra mūsų skirsnelio antraštė.

Ką mes tuo norėtume pasakyti? Ogi tai, kad mažumėlę padidinę sąlygos skaičius, gautume jau Pasaulinės moksleivių matematikos olimpiados uždavinį. Iš sąlygos skaitytojas nesunkiai nujaus, kelintų metų pasaulinėje Olimpiadoje tas uždavinys buvo gvildenamas.

Ar galima visus sveikuosius skaičius nuo 1 iki 1989 suskirstyti į 117 aibių po 17 skaičių kiekvienoje, kad visų kiekvienos tokios aibės skaičių suma būtų vienoda?e

Sprendimas visiškai atkartotų tai, ką mes ką tik darėme.

O jei tai būtų buvęs 2005 metų metų olimpiados uždavinys, tai būtume skaitę ką nors panašaus į klausimą"

Ar galima visus sveikuosius skaičius nuo 1 iki 2005 suskaidyti arba į 5 poaibius po 401 skaičių kiekviename su vienoda kiekvieno poaibio skaičių suma, arba į 401 poaibį po 5 skaičius ir su vienoda suma kiekviename?

Manytume, kad skaitytojui savaime aiškus yra toks teisingas jutimas, kad visus sveikuosius skaičius nuo 1 iki n visada galima suskirstyti į k nesikertančių poaibių nuo vienoda suma kiekviename iš tokių poaibių, jei tik k dalijasi iš *n*.

Toks jutimas būtų teisingas ir tada visi mūsų nagrinėtieji uždaviniai būtų atskiri tokio teiginio (jeigu tik pajėgtume jį įrodyti!) atvejai.

Gal dabar sužaiskime domino?

Jungtinėse Amerikos Valstijose prieš kokius 10 metų buvo leidžiamas matematikos ir informatikos talentams vystyti skirtas leidinys etimologiškai lotynišku pavadinimu „Consortium“.

Tame leidinyje radome ir labai įdomų uždavinį su domino kauliukais, apie kurį ir norėtume dabar pakalbėti.

Tikime, kad mūsų skaitytojas žino, kas tie domino kauliukai, kiek jų yra, bet apsidarusdami, jeigu pasitaikytų kas nors nežinantis, priminkime, kad atskiras domino kauliukas yra 1 × 2 matmenų stačiakampis, kurio kiekviename langelyje yra įrašyti skaičiai nuo nuo 0 iki 6 – gali būti ir taip, kad tie abu skaičiai yra vienodi. Tie skaičiai nuo 0 iki 6 yra įrašomi visais galimais būdais.

Taigi kadangi į abu domino kauliukų langelius visais galimais būdais yra įrašomos visos įmanomos (nebūtinai skirtingos) skaičių 0, 1, 21, 3, 4, 5, 6 poros, tai iš viso yra 28 domino kauliukai:

(0;0), (0;1), (0;2), (0;3), (0;4), (0;5), (0;6), (1;1), (1;2), (1;3), (1;4), (1;5), (1;6), (2;2), (2;3). (2; 4), (2;5). (2;6), (3;3), (3,4), (3;5), (3;6), (4;4), (4;5), (4;6), (5;5), (5;6), (6;6).

Pastebėkime, kad kiekvienas skaičius domino kauliukuose pasitaiko 8 kartus 7 kauliukuose: šešiuose – po kartą su kiekvienu kitui skaitmeniu, o septintame kauliuke - su savimi.

Kadangi kauliukų yra, kaip jau išvardijome – 28, o kiekvienas yra sudurtas iš 2 vienetinių kvadratėlių, tai pilnam domino kauliukų komplektui pagaminti reikia 28 × 2 =56 vienetinių kvadratėlių ir todėl jais galima ištisai nukloti be perdengimų ir tarpų nukloti visą 7 × 8 matmenų stačiakampį.

Psichologiniam pagyvinimui pamėginkime šį amerikietišką uždavinį „išversti“ į Mykoliuko sapnų ir košmarų kalbą.

Kartą Mykoliukas sapne pamatė iš visų domino kauliukų sudėtą 7 × 8 matmenų stačiakampį. Uragano banga užliejo tą stačiakampį ir viską aplink.

Atsipeikėjęs Mykoliukas nustebo išvydęs, kad uraganas stačiakampio nesugriovė, tik išplovė kauliukų ribas.

Burtininkas Šmekionė pasakė Mykoliukui, kad jo košmaras baigsis jam atstačius kauliukų ribas. Jis pasakė:

– Iš šio košmaro tu išsivaduiosi tik tada, kai atkursi visų domino kauliukų ribas – taip Mykoliuką gąsdino burtininkas.

Nusiminė Mykoliukas, dar kartą į tą 7 × 8 lentelę pasižiūrėjo, o ten tik tokie skaičiai tesimatė:

5	5	5	2	1	3	3	4
6	4	4	2	1	1	5	2
6	3	3	2	1	6	0	3
3	0	5	5	0	0	0	6
3	2	1	6	0	0	4	2
0	3	6	4	6	2	5	5
2	1	1	4	4	4	1	5

Kaip mums padėti Mykoliukui per kokią valandą atstatyti išdilusias domino kauliukų ribas ir išlaisvinti į visų jam gręsiančių nemalonumų?

XLVIII SKIRSNELIS
AGNIO ANDŽANSO „CONSORTIUMO“ UŽDAVINYS

Radome ir skaitytojui su malonumu pateikiame tokį įžymiojo latvių profesoriaus, sprendėjo ir kompozitoriaus Agnio Andžanso uždavinį. Beje, profesorius mielai atvyksta į Lietuvą ir ne tik į mokslines konferencijas, bet ir dirbti su mūsų gabuliais. Jo, pavyzdžiui, su malonumu ne kartą klausėsi ir mūsų gabių vaikų Akademijos klausytojai.

Štai tas gražus iš dviejų dalių susidedantis uždavinys.

Pirmoje lentelės 2 × 9 lentelės eilutėje surašome visus skaičius nuo 1 iki 9, antroje surašome tuos pačius tik išmaišytus skaičius, pavadinę juos a(1), a(2), a(3), a(4), a(5), a(6), a(7), a(8) ir a(9), o žemiau surašome tų skaičių skirtumus, atimdami iš didesnio skaičiaus mažesnį. Klausimas yra toks, ar mes galėtume juos surašyti taip, kad paeiliui atimdami iš didesnių skaitmenų mažesnius, trečioje eilutėje galėtume kada gauti visus skaičius 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8?

1	2	3	4	5	6	7	8	9
a(1)	a(2)	a(3)	a(4)	a(5)	a(6)	a(7)	a(8)	a(9)

Padėsime skaitytojui pateikdami pavyzdį, kad su skaičiais nuo 1 iki 9 taip padaryti galima.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
8	7	4	6	5	9	3	2	1
7	5	1	2	0	3	4	6	8

O dabar paklausime skaitytoją, ar galima padaryti tokią pačią lentelę imant vienu skaičiumi daugiau, t.y. jau nebe nuo 1 iki 9, bet nuo 1 iki 10?

Dabar mes klausiame, ar galima pirmoje eilutėje surašyti visus skaičius 1, 2, 3, 4. 5, 6, 7, 8, 9, 10, o antrojoje po jais surašyti tuos pačius, tik permaišytus skaičius a(1), a(2), a(3), a(4), a(5), a(6), a(7), a(8), a(9) ir a(10), kad nuosekliai atimdami iš didesnio skaičiaus mažesnį gautume visus galimus sveikuosius skaičius nuo 0 iki 8?

Psichologiškai mes žinome, kad nežymiai pasikeitus sąlygai, sprendimas paprastai išlieka panašus, tačiau esti ir taip, kad nežymus sąlygos pakeitimas keičia patį atsakymą.

Sakysime, visai aišku, kad visų sveikųjų skaičių nuo 1 iki 9 suma 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45 yra nelyginė. „Nežymiai“ pakeitus sąlygą, arba pridėjus dar vieną dėmenį 10, toji suma 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 išlieka nelyginė – kitaip ir būti negali, nes prisidėjęs dėmuo 10 nekeičia buvusios sumos nuo 1 iki 9, lygios 45, dabar jau lygios 55, lyginumo.

Tačiau tolesnis „nežymus“ sąlygos pakeitimas, arba naujo dėmens 11 prijungimas jau keičia sumos (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10) + 11 = 55 +11 = 66 lyginumą.

Šiuo paprastučiu pavyzdžiu norėjome tik atkreipti skaitytojo dėmesį, kad su nežymiais sąlygos pakeitimais reikia elgtis labai atidžiai ir kad jeigu jums nepavyktų pateikti panašaus pavyzdžio su skaičiais nuo 1 iki 10, kaip kad mes jums pateikėme su skaičiais nuo 1 iki 9, t.y., jeigu jūs imsite manyti, kad to su skaičiais nuo 1 iki 10 to padaryti negalima, tai tą reikia pagrįsti.

Psichologiškai mus dažnai stebina tokie dalykai, kad aplinkybės panašios, o rezultatai labai skirtingi.

XLIX SKIRSNELIS
DAR VIENAS RUMUNIŠKAS GRAŽUS PAPRASTAS, BET VIS TIEK VISIEMS ĮVEIKIAMAS UŽDAVINYS

Psichologiškai (ir žmogiškai) žiūrint nėra nieko blogesnio už tai, kaip įsivaizduoti, kad jeigu aš per 5 minutes pasiūlyto uždavinio neišsprendžiau, tai aš jį vargu ar apskritai išspręsiu.

Tiesa yra tai, kad žmonių mąstymo gylis yra nevienodas, bet juk tai niekam netrukdo. Sakysime, visi supranta, kad ne kiekvienas yra Jasikevičius, tačiau niekas nesiginčys, kad visada galima pasimokyti geriau mėtyti baudas ar efektyviau bėgioti po aikštę.

Ne kiekvienam lemta tapti krepšinio Saboniu, bet kiekvienas gali pagilinti savo mąstymo gylį. Tam ir skirta mūsų knygelė.

Tik reikia nesibijoti, pirmiausiai, jeigu kas, 3 kartus perskaityti uždavinio sąlygą, po to prireikus paklausti savęs, ar aš supratau, ko manęs klausia uždavinys ir ar aš turiu kokių nors idėjų, ką man reikėtų daryti.

Po to imti ką nors daryti, o jeigu nieko neišeina, tai pasitraukti ir po kurio laiko vėl grįžti su naujomis jėgomis ir jau nebegaištant laiko susipažinimui su uždaviniu, o tai kainuoja nemenkų psichologinių ir žmogiškų pastangų.

Tai proto valios ir asmenybės ugdymas, kurio mums gyvenime taip reikia, kad neretai net pritrūksta ir kurį irgi vysto tikslieji mokslai.

Tik niekada nereikėtų leisti sau manyti, kad tai man per sunku, aš to negaliu, nes tai tik papildomos niekam nereikalingos kliūtys, kurias aš dažnai be reikalo sau sukuriu.

Žinia, gali nutikti, kad aš pataikiau ant pasaulinio sunkumo uždavinio, bet net ir tai labai naudinga, nes plečia akiratį, ugdo valią ir supratimą, kad ne viskas per dieną padarome – senovės žmonės tai buvo labai taikliai išreiškę žodžiais, kad „Roma ne per vieną naktį išdygo“.

Po tokių pasamprotavimų labai praverstų gražus nebanalus, bet įveikiamas uždavinys. Juo ir bus antraštėje pažadėtas rumuniškas uždavinys, kurio sąlyga labiau negu aiški, o sprendimas gana įdomus, nes nesunkus ir keliapakopis.

Keliais būdais galima išskirstyti visų sveikųjų skaičių aibę nuo 1 iki 10 į 2 nesikertančias dalis taip, kad visų vienos dalies skaičių suma būtų lygi visų kitos dalies skaičių sandaugai?

Duokime toms aibėms pavadinimus – tą aibę, kurios elementus sumuojame, pavadinkime aibe *B*, o tą, kurios elementus dauginame, pavadinkime aibe *C*.

Pastebėkime, kad aibės *B* elementų suma yra ne didesnė negu $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 55$, t. y., kad aibė *C* turi ne mažiau negu 4 elementus, nes kitaip aibės C elementų sandauga būtų mažiausiai $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$.

Todėl mums tenka išnagrinėti tokias galimybes:

(A) Aibė C susideda iš vienintelio elemento. to negali būti, nes tada aibės C elementų sandauga yra daugiausiai 9 o aibės B elementų suma yra mažiausiai 55 –9 = 46.

(AA) Aibę C sudaro 2 elementai x ir y. Tarkime, kad $x < y$. Tada gauname x x y = $55 - x - y$ kuri gali būti perrašyta kaip $(x+1)(y+1) = 56$. Kadangi $x + 1 < y + 1 \leq 11$, vienintelė galimybė yra, kad $x + 1 = 7$ ir y + 1 = 8, duodantis aibę $C = \{6, 7\}$ ir aibę $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 8, 9, 10\}$.

(AAA) Tarkime, kad C susideda iš 3 elementų x, y ir z, tokių, kad $x < y < z$. Tada duotoji sąlyga reiškia $xyz = 55 - x - y - z$.

Kai $x = 1$, naudodamiesi panašiais samprotavimais, gauname, kad $y = 4$ ir kad $z = 10$, todėl $C = \{1, 4, 10\}$ ir $B = \{2, 3, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

Kai $x = 2$, turime $2yz + y + z = 53$ arba pertvarkius $(2y + 1)(2z + 1) = 107$, o 107 yra pirminis skaičius. Todėl šiuo atveju jokių sprendinių negauname.

Jeigu $x \geq 3$, tai tada aišku, kad $xyz \geq 3 \times 4 \times 5 = 60 > 55 - x - y - z$. Taigi, šiuo atveju jokių sprendinių nesama.

(AAAA) Aibė C susideda iš 4 elementų $x < y < z < t$. Mes esame priversti imti $x = 1$, kitaip $xyzt \geq 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120 > 55$. Mes turime yzt = $54 - y - z - t$ ir $2 \leq y < z < t$. Atvejis, kai $y \geq 3$ duoda prieštarą kaip ir (aaa) atveju. Vadinasi, y = 2 ir $2zt + z + t = 52$ arba $(2z+1)(2t+1) = 105$. Todėl $2z+1 = 7$ ir $2t+1 = 15$, o tai reiškia, kad $z = 3$ ir $t = 7$, duodantys sprendinius $C = \{1, 2, 3, 7\}$ ir $B = \{4, 5, 6, 8, 9, 10\}$.

L SKIRSNELIS
ALBANŲ SENELIO PROBLEMA

Šį pavadinimą paėmėme iš albanų įdomesnių uždavinių rinkinių, todėl nenuostabu, kad taip pavadinome ir šį skirsnelį.

Pas mus šeimos retesnės, išskydo per paskutinį gerą pusšimtį metų, o ne taip toli nuo mūsų, nes vis dar Europoje reikalai dar, matyt klostosi kitaip – nepamirškime, kad Albanija – tai ta pati Europa, bet geografiškai ir demografiškai nesiblaškykime ir imkimės to žavaus uždavinio.

Vienoje kaimo mokyklos klasėje mokosi 20 mokinių. Klasė pasižymi nuostabia vienybe ir draugiškumu – bet nieko nestebina, nes visi žino tai dar, kad ir kokius 2 klasės vaikus bepaimtumėme, jie turi bendrą senelį.

Esame prašomi įrodyti, jog tokiomis sąlygomis atsiras senelis, turintis toje klasėje mažiausiai 14 anūkų.

Tokia kvapą gniaužianti pradžia, nors rėk nakčia ar paslapčia. Bet nuo kažko reikia pradėti, juk kiekvienoje istorijoje esti pirmieji lapai.

Pirmiausiai paklauskime savęs, ar taip gali būti? Aišku, kad galėjo būti taip, kad kažkuris senelis turėjo 20 vaikų, o šie savo ruožtu turėjo kiekvienas po savo vaiką ir leido jį mokytis į tą klasę.

Tai ką čia dar reikėtų įrodinėti?

Įrodinėti reikėtai tai, kad taip bus ir visais kitais atvejais, ne tik tada, tai yra 20-vaikaitis senelis.

Vėl pagalvokime, kaip galėtume paryškinti uždavinio sprendimą, padaryti taip, kad mes geriau įsivaizduotume, kas vyksta, kad mums būtų aiškiau.

Vaizdumo dėlei galime įsivaizduoti, kad rugsėjo 1 dieną mes paprašomę kiekvieną mokinį atvykti į mokyklą su abiejų senelių nuotraukomis ir prieš pirmą pamoką jie visi atsistoja laikydami iškėlę abiejų senelių nuotraukas. Taip ir regime 20 besišypsančių vaikų, savo senelių nuotraukas belaikančių.

Jeigu jie visi laiko po vieną to paties žmogaus nuotrauką, tai turime mūsų jau aptartą atvejį, kai atsiranda vienas bendras senelis visiems tos klasės vaikams. Tad visi kitų vaikų antrieji seneliai gali būti visi skirtingi ir tada 20 vaikų turėtų 21 skirtingą senelį.

Jeigu taip nėra, kad visi vaikai turėtų bendrą senelį, tai tada, žiūrėdami į tuos 20 stovinčių vaikų, laikančių po dvi abiejų savo senelių nuotraukas, suskaičiuokite, kiek tose 40 nuotraukų yra skirtingų žmonių? Vaikai turi 40 nuotraukų, gal jau leiskime nuleisti jiems rankas, surinkime iš jų nuotraukas ir išdėliokime pagal skirtingus asmenis. Gal nors kas dešimtoje nuotraukoj rasime skirtingus senelius.

Visai rimtai paklauskime, ar yra tose nuotraukose 4 skirtingi asmenys, ar nėra? Mat jei 4 skirtingų asmenų nuotraukose nerandame, tai per 40 nuotraukų kartojasi daugiausiai 3 seneliai, vadinasi atsiras senelis, randamas bent 14 nuotraukų. (Kitaip per 3 senelius susirinktų daugiausiai $3 \times 13 = 39$ nuotraukos.)

Lieka atvejis, kai 40 nuotraukų surandame bent 4 asmenis. Tada atsiras 3 vaikaičiai, kurie laikė iškėlę 4 skirtingų senelių nuotraukas. Tikrai bet kuris vienas jau laikė 2 skirtingų senelių A ir B fotografijas, dar suraskite kitą, laikantį senelio C fotografiją ir dar trečią, laikantį senelio D fotografiją.

Pastebėkime, kad antrasis laikyti abiejų senelių C ir D fotografijas negali, nes tada pirmas ir antras jau nebeturėtų bendro senelio.

Todėl raktinė, arba svarbiausioji situacija yra tokia:

Pirmasis anūkas	**Antrasis anūkas**	**Trečiasis anūkas**
turi senelius A ir B	**turi senelį C**	**turi senelį D**

Pasižiūrėkime, ką dabar laiko antrasis anūkas antrojoje rankoje – jis gi turi turėti bendrą senelį su pirmuoju – todėl atsakymas žiūrint tuo požiūriu yra toks – antrasis privalo laikyti vieną iš 2 nuotraukų – arba senelį A, arba B. Jeigu jis laiko A, tai tada padėtis tokia:

Pirmasis anūkas	**Antrasis anūkas**	**Trečiasis anūkas**
Seneliai A ir B	**Seneliai A ir C**	**Senelis D**

Kokią tada antrąją nuotrauką gali laikyti trečiasis anūkas, jei jis turi turėti bendrą senelį ir su pirmuoju ir su antruoju anūku, o jis jau laiko senelio D nuotrauką? Jeigu jis antrąja nuotrauka nelaiko senelio A nuotraukos, tai dėl bendro senelio su pirmuoju anūku jis tada tegali laikyti senelio B nuotrauką, o dėl bendro senelio su antruoju anūku, jis tegalėtų laikyti senelio C nuotrauką.

Tai jau loginė katastrofa, nes trečiasis anūkas tada turėtų laikyti jau 3 skirtingų senelių A, B ir C nuotraukas, o tiek jų Jam neskirta.

Vadinasi, ir trečiasis vaikaitis laiko senelio A nuotrauką. Panašiai būtų nutikę, jeigu antrasis anūkas būtų laikęs ne A, o B nuotrauką, tada ir trečiasis anūkas būtų laikęs senelio B nuotrauką.

Nemažindami bendrumo ir apsiribodami atveju, kai antrasis ir trečiasis anūkai laiko nuotrauką A, turime tokią padėtį:

Pirmasis anūkas	**Antrasis anūkas**	**Trečiasis anūkas**	**Bet kuris kitas anūkas**
Seneliai A ir B	**Seneliai A ir C**	**Seneliai A ir D**	**Kokie jo seneliai?**

Tai kokias gi nuotraukas gali laikyti bet kuris kitas anūkas? Jeigu jis nelaiko senelio A nuotraukos, tada dėl bendro senelio su pirmuoju anūku jis privalo kelti senelio B nuotrauką, toliau dėl bendro senelio su antruoju, jis turi būti kėlęs ir senelio C nuotrauką, o dėl bendro senelio su trečiuoju jis turėtų būti kėlęs dar ir senelio D nuotrauką. Taigi, vėl būtų anūkas, kėlęs 3 skirtingų senelių nuotraukas, o tai per daug. Vadinasi, bet kuris kitas ketvirtas anūkas, taigi visi likusieji, neišvengiamai turi būti kėlę to paties senelio A. nuotrauką.

Galime pasakyti netgi truputėlį daugiau negu kad mūsų klausė.Gavome štai ką: jeigu visi 20 anūkų kartu laiko tik 3 skirtingų senelių nuotraukas, vadinasi, 40 nuotraukų randame tik 3 skirtingus asmenis, ir tada kuris nors iš jų yra aptinkamas mažiausiai 14 nuotraukų, arba turi toje klasėje bent 14 anūkų.

Jeigu tarp tų 40 nuotraukų atrandame bent 4 skirtingus senelius, tai tada atsiras vienas senelis visiems tiems dvidešimčiai anūkų..