Russian version

Baltic Way 2006

Turku, November 3, 2006

Длительность олимпиады 4,5 часа

Вопросы по условиям принимаются в письменном виде первые 30 минут.

1. Последовательность a_1, a_2, a_3, ... вещественных чисел удовлетворяет условию

$$a_n = a_{n-1} + a_{n+2} \qquad \text{при } n = 2,\ 3,\ 4,\ \dots .$$

Какое наибольшее число положительных элементов может идти подряд в этой последовательности?

2. Пусть $a_1+a_2+\ldots+a_{59} = 0$, где вещественные числа a_i лежат в отрезке $[-2, 17]$ $(i = 1, 2, \ldots, 59)$. Докажите, что

$$a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_{59}^2 \leqslant 2006 .$$

3. Докажите, что для любого многочлена $P(x)$ с вещественными коэффициентами существуют натуральное число m и многочены P_1, P_2, ..., P_m с вещественными коэффициентами, такие что

$$P(x) = (P_1(x))^3 + (P_2(x))^3 + \ldots + (P_m(x))^3 .$$

4. Пусть a, b, c, d, e, f — неотрицательные вещественные числа, $a + b + c + d + e + f = 6$. Найдите наибольшее возможное значение выражения

$$abc + bcd + cde + def + efa + fab$$

и определите все шестерки (a, b, c, d, e, f), для которых оно достигается.

5. Безумный профессор посвятил свою последнюю книгу некоторой бинарной операции "$*$". Применение этой операции к двум целым числам дает в результате снова целое число. Известно, что операция удовлетворяет следующим аксиомам:

   1) $x * (x * y) = y$ при любых $x,\ y \in \mathbb{Z}$;
   2) $(x * y) * y = x$ при любых $x,\ y \in \mathbb{Z}$.

   Профессор утверждает, что из аксиом следуют две теоремы:

   (a) операция $*$ коммутативна: $x * y = y * x$ при любых $x,\ y \in \mathbb{Z}$;
   (b) операция $*$ ассоциативна: $(x * y) * z = x * (y * z)$ при любых $x,\ y,\ z \in \mathbb{Z}$.

   Какие из этих утверждений действительно следуют из аксиом?

6. Некоторое множество натуральных чисел удовлетворяет следующим условиям:

   (a) в записи чисел из этого множества встречаются только цифры 1, 2, 3, 4, 5, 6;
   (b) в каждом числе все цифры различны;
   (c) в каждом числе цифры расположены в строго возрастающем порядке;
   (d) любые два числа имеют хотя бы одну общую цифру (возможно, в разных разрядах);
   (e) ни одна цифра не встречается сразу во всех числах.

   Какое наибольшее количество элементов может иметь такое множество?

7. Фотограф сделал несколько снимков на вечеринке с 10 участниками. На каждом снимке изображены либо два, либо три человека. Оказалось, что каждая из 45 возможных пар участников присутствует ровно на одном из снимков. Каково наименьшее возможное число снимков?

8. В департаменте образовано шесть комитетов, каждый из которых состоит ровно из трех человек. Докажите, что глава департамента может разбить департамент на два отдела так, что ни один из комитетов не войдет целиком в один отдел.

9. В каждой вершине пятиугольника написано вещественное число. Разрешается выбрать две соседние вершины и заменить оба числа в этих вершинах на их среднее арифметическое. Верно ли, что из любой исходной растановки, в которой сумма чисел равна 0, можно получить расставновку, в которой все пять чисел равны 0?

10. В таблице 30×30 расставлено 162 плюса и 144 минуса так, что в каждом столбце и каждой строке стоит не более 17 символов. (В каждой клетке стоит максимум один знак). Для каждого плюса подсчитали количество минусов в его строке, а для каждого минуса подсчитали количество плюсов в его столбце. Найдите наибольшую возможную сумму всех подсчитанных чисел.

11. Длины высот треугольника равны 12, 15 и 20. Найдите его площадь.

12. В треугольнике ABC точки B_1 и C_1 — середины сторон AB и AC соответственно. P — вторая точка пересечения описанных окружностей треугольников ABC_1 и AB_1C. P_1 — вторая точка пересечения прямой AP и описанной окружности треугольника AB_1C_1. Докажите, что $2AP = 3AP_1$.

13. На сторонах AB и AC треугольника ABC выбраны точки D и E соответственно. Прямые BE и CD пересекаются в точке F. Оказалось, что

$$BC^2 = BD \cdot BA + CE \cdot CA.$$

Докажите, что точки A, D, F, E лежат на одной окружности.

14. На сфере отмечено 2006 точек. Докажите, что сферу можно разрезать на 2006 равных частей так, чтобы внутри каждой из частей содержалась ровно одна точка.

15. Медианы треугольника ABC пересекаются в точке M. Через точку M проведена прямая t, пересекающая описанную окружность треугольника ABC в точках X и Y, причем точки A и C лежат по одну сторону от t. Докажите, что $BX \cdot BY = AX \cdot AY + CX \cdot CY$.

16. Существуют ли такие четыре различных натуральных числа, что произведение любых двух из них, увеличенное на 2006, является точным квадратом?

17. Найдите все натуральные числа n, для которых $3^n + 1$ делится на n^2.

18. Для каждого натурального числа n обозначим через a_n последнюю цифру числа $n^{(n^n)}$. Докажите, что последовательность (a_n) чисто периодична и найдите длину минимального периода.

19. Существует ли такая последовательность $a_1, a_2, a_3, \ldots$ натуральных чисел, что для каждого натурального n сумма любых n подряд идущих членов последовательности делится на n^2?

20. Некоторое 12-значное натуральное число, не содержащее цифр, отличных от 1, 5 и 9, делится на 37. Докажите, что сумма его цифр не равна 76.