9. ŽORDANO FORMA

Vektorinės erdvės V virš kūno K tiesinės transformacijos f *tikriniu vektoriumi* vadinamas nenulinis tos erdvės vektorius α, kai su tam tikru kūno K skaliaru l yra teisinga lygybė

$$f(\alpha) = l\alpha.$$

Skaliaras l vadinamas tiesinės transformacijos f *tikrine reikšme.*

1 teorema. *Vektorinės erdvės tiesinės transformacijos tikrinio vektoriaus tiesinis apvalkas (ir tik jis) yra vienmatis f-invariantinis poerdvis.*

Tiesinės transformacijos *spektru* vadinama visų jos tikrinių reikšmių aibė.

Tiesinė transformacija vadinama paprastojo spektro transformacija, kai jos tikrinių reikšmių skaičius lygus erdvės dimensijai.

Vektorinės erdvės tiesinė transformacija vadinama paprastosios struktūros transformacija, kai erdvėje egzistuoja bazė, sudaryta iš tos transformacijos tikrinių vektorių.

2 teorema. *Vektorinės erdvės tiesinė transformacija yra paprastosios struktūros tada ir tik tada, kai galima sudaryti bazę, kurioje tos transformacijos matrica yra diagonalinė.*

Tiesinės transformacijos f, aprašytos matrica A, *charakteristiniu polinomu* vadinamas determinantas $f_A(t) = |tE - A|$.

3 teorema. *Kūno K elementas l yra vektorinės erdvės virš to kūno tiesinės transformacijos f tikrinė reikšmė tada ir tik tada, kai l yra tos transformacijos charakteristinio polinomo šaknis.*

Išvada. *Vektorius α yra tiesinės transformacijos, aprašytos matrica*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

tikrinės reikšmės l tikrinis vektorius tada ir tik tada, kai jo koordinatės yra lygčių sistemos

$$\begin{cases} (l - a_{11})x_1 - a_{21}x_2 - \dots - a_{n1}x_n = 0, \\ -a_{22}x_1 + (l - a_{22})x_2 - \dots - a_{n2}x_n = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ -a_{1n}x_1 - a_{2n}x_2 - \dots + (l - a_{nn})x_n = 0 \end{cases}$$

nenulinis sprendinys.

Tiesinė transformacija f vadinama *nilpotenčiąja*, kai bent vienas jos natūralusis laipsnis f^m lygus nulinei transformacijai.

4 teorema. *Nilpotenčiosios transformacijos tikrinės reikšmės lygios nuliui.*

Kvadratinė k-osios eilės kompleksinių skaičių matrica

$$I_k(l) = \begin{pmatrix} l & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & l & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & l & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & l \end{pmatrix}$$

vadinama skaičiaus l *Žordano k-osios eilės langeliu.*

Langeliais diagonalinė matrica

$$\begin{pmatrix} I_{k_{11}}(l_1) & & & & & \\ & I_{k_{12}}(l_1) & & & \mathbf{0} & \\ & & \ddots & & & \\ & & & I_{k_{21}}(l_2) & & \\ & \mathbf{0} & & & \ddots & \\ & & & & & I_{k_{sm_s}}(l_s) \end{pmatrix}$$

su Žordano langeliais $I_{k_{11}}(l_1), I_{k_{12}}(l_1), \dots, I_{k_{21}}(l_2), \dots, I_{k_{sm_s}}(l_s)$ $(k_{11}, k_{12}, \dots, k_{sm_s} \in N,$ $l_1, l_2, \dots, l_s \in C)$ įstrižainėje vadinama Žordano matrica.

5 teorema. *Jei f yra kompleksinės vektorinės erdvės V tiesinė transformacija, tai galima sudaryti tos erdvės bazę, kurioje transformacija f turi Žordano matricą.*

Išvada. *Kiekviena kvadratinė kompleksinių skaičių matrica yra panaši į tam tikrą Žordano matricą.*

6 teorema. *Matricos Žordano forma randama vienareikšmiškai, kai Žordano matricos, kurios skiriasi tik langelių tvarka, nelaikomos skirtingomis.*

Tiesinės transformacijos f tikrinės reikšmės l Žordano h-osios eilės langelių skaičius q_h randamas iš lygybės

$$g_h = r_{h-1} - 2r_h + r_{h+1};$$

čia r_t yra matricos $B^t = (A - lE)^t$ rangas, A – tranformacijos f matrica.

7 teorema. *Tiesinė transformacija yra paprastosios skruktūros tada ir tik tada, kai tos transformacijos Žordano matrica yra sudaryta iš Žordano pirmosios eilės langelių.*

PAVYZDŽIAI

1. Rasime aritmetinės erdvės R^3 tiesinės transformacijos f, apibrėžtos matrica

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

tikrines reikšmes ir tikrinius vektorius.

Skaičiuojame šios transformacijos charakteristinį polinomą:

$$|tE - A| = \begin{vmatrix} t-1 & -1 & 1 \\ -2 & t-2 & -1 \\ -2 & 0 & t-3 \end{vmatrix} = (t-1)(t-2)(t-3).$$

Tikrinės reikšmės yra šio polinomo šaknys, todėl $l_1 = 1$, $l_2 = 2$, $l_3 = 3$. Transformacijos f tikrinės reikšmės $l_1 = 1$ tikrinio vektoriaus α_1 ieškome, spręsdami lygčių sistemą

$$\begin{cases} (1-1)x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 0, \\ -x_1 + (1-2)x_2 = 0, \\ x_1 - x_2 + (1-3)x_3 = 0. \end{cases}$$

Šios sistemos bendrasis sprendinys yra

$$x_1 = c_2,\ x_2 = c_2,\ x_3 = -c_2 \quad (c_2 \in R).$$

Taigi su kiekvienu nelygiu nuliui realiuoju skaičiumi c vektorius $\alpha_1 = c(1, 1, -1)$ yra transformacijos f tikrinės reikšmės $l_1 = 1$ tikrinis vektorius.

Analogiškai spręsdami, randame, kad vektorius $\alpha_2 = c(0, 1, -1)$ $(c \in R^*)$ yra tos transformacijos tikrinės reikšmės $l_2 = 2$ tikrinis vektorius, o $\alpha_3 = c(1, 1, 0)$ $(c \in R^*)$ – tikrinės reikšmės $l_3 = 3$ tikrinis vektorius.

Vektoriai $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ sudaro aritmetinės erdvės R^3 bazę. Šioje bazėje transformacijos f matrica yra

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Vadinasi, transformacija f yra paprastosios struktūros.

2. Rasime aritmetinės erdvės R^3 tiesinės transformacijos f, apibrėžtos matrica

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -5 & 1 & -2 \\ 4 & -4 & 1 \end{pmatrix},$$

dvimatį invariantinį poerdvį.

Randame transformacijos f charakteristinį polinomą:

$$|tE - A| = \begin{vmatrix} t-1 & -2 & -1 \\ 5 & t-1 & 2 \\ -4 & 4 & t-1 \end{vmatrix} = t^3 - 3t^2 + t - 3 = (t-3)(t^2+1).$$

Kadangi polinomas turi kompleksinių šaknų, tai aritmetinė erdvė R^3 turi dvimatį f-invariantinį poerdvį.

Sprendžiame lygčių sistemą

$$\begin{cases} (i-1)x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 0, \\ -2x_1 + (i-1)x_2 + 4x_3 = 0, \\ -x_1 + 2x_2 + (i-1)x_3 = 0. \end{cases}$$

Šios sistemos bendrasis sprendinys yra

$$x_1 = \frac{1}{13}(19+9i)c_3,\ x_2 = \frac{1}{13}(16-2i)c_3,\ x_3 = c_3\ (c_3 \in C).$$

Pasirinkę $c_3 = 13$, sudarome iš sprendinio komponenčių realiųjų dalių ir menamųjų dalių koeficientų du vektorius $\alpha = (19, 16, 13)$, $\beta = (9, -2, 0)$. Šių dviejų vektorių tiesinis apvalkas $L(\alpha, \beta)$ ir yra f-invariantinis dvimatis poerdvis.

3. Užrašysime matricą

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -2 \\ 2 & 6 & -3 \\ 4 & 8 & -4 \end{pmatrix}$$

Žordano forma.

Pirmiausia apskaičiuojame tiesinės transformacijos, apibrėžtos matrica A, charakteristinį polinomą:

$$|tE - A| = \begin{vmatrix} t-3 & -3 & 2 \\ -2 & t-6 & 3 \\ -4 & -8 & t+4 \end{vmatrix} = t^3 - 5t^2 + 8t - 4 = (t-2)^2(t-1).$$

Šio polinomo šaknys yra $l_1 = l_2 = 2$, $l_3 = 1$. Pakanka surasti Žordano langelių, atitinkančių tikrinę reikšmę $l = 2$, skaičių. Skaičiuojame matricos $A - 2E$ laipsnių rangus:

$$\begin{aligned} r_0 &= r(E) = 3; & r_1 &= r(A-2E) = 2; \\ r_2 &= r(A-2E)^2 = 1; & r_3 &= r(A-2E)^3 = 1. \end{aligned}$$

Iš Žordano langelių skaičiaus formulės gauname

$$q_1 = r_0 - 2r_1 + r_2 = 0, \quad q_2 = r_1 - 2r_2 + r_3 = 1.$$

Vadinasi, tikrinę reikšmę $l = 2$ atitiks antros eilės Žordano langelis ir matricos A Žordano forma yra

$$I = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Sudarysime transformacijos f, kurios matrica

$$A = \begin{pmatrix} 20 & -47 & 100 \\ 17 & -44 & 100 \\ 5 & -14 & 33 \end{pmatrix},$$

Žordano matricą ir Žordano bazę.

Pirmiausia apskaičiuojame charakteristinį polinomą

$$|tE - A| = \begin{vmatrix} t-20 & 47 & -100 \\ -17 & t+44 & -100 \\ -5 & 14 & t-33 \end{vmatrix} = (t-3)^3.$$

Taigi $l = 3$ yra šios transformacijos tikrinė reikšmė. Norėdami surasti tą reikšmę atitinkančių Žordano langelių skaičių, skaičiuojame matricos $A - 3E$ laipsnių rangus:

$$r_0 = r\big((A-3E)^0\big) = r(E) = 3;$$

$$r_1 = r\begin{pmatrix} 17 & -47 & 100 \\ 17 & -47 & 100 \\ 5 & -14 & 30 \end{pmatrix} = 2;$$

$$r_2 = r\left(\begin{pmatrix} 17 & -47 & 100 \\ 17 & -47 & 100 \\ 5 & -14 & 30 \end{pmatrix}^2\right) = r\begin{pmatrix} -10 & 10 & 0 \\ -10 & 10 & 0 \\ -3 & 3 & 0 \end{pmatrix} = 1;$$

$$r_3 = r\left(\begin{pmatrix} 17 & -47 & 100 \\ 17 & -47 & 100 \\ 5 & -14 & 30 \end{pmatrix}^3\right) = r\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0.$$

Gauname $q_1 = q_2 = 0$, $q_3 = 3$. Vadinasi, transformacijos f Žordano matrica yra

$$I = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Kadangi transformacijos $f - 3id$ aukštis lygus 3 (id – tapačioji transformacija), Žordano bazė sudaroma gana paprastai – pasirenkame matricos $(A-3E)^0$ kurią nors eilutę, pavyzdžiui, trečiąją ir sudarome pirmąjį bazės vektorių $\alpha_1 = (0,0,1)$. Tuomet galime pasirinkti antrąjį bazės vektorių – $\alpha_2 = \alpha_1(A-3E) = (5,-14,30)$, o trečiąjį – $\alpha_3 = \alpha_1(A-3E)^2 = (-3,3,0)$.

5. Sudarysime tiesinės transformacijos f, kurios matrica

$$A\begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 1 \\ -1 & -2 & -3 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

Žordano matricą ir Žordano bazę.

Skaičiuojame charakteristinį polinomą:

$$|tE - A| = \begin{vmatrix} t-3 & -2 & -5 & -2 \\ -1 & t-3 & -4 & -1 \\ 1 & 2 & t+3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & t \end{vmatrix} = t(t-1)^3.$$

Tikrinę reikšmę $l_1 = 0$ atitinka vienmatis Žordano langelis. Norėdami surasti tikrinę reikšmę $l_2 = 1$ atitinkančių Žordano langelių skaičių, skaičiuojame matricos $A - E$ laipsnių rangus:

$$r_0 = \big((A-E)^0\big) = r(E) = 4;$$

$$r_1 = r\left(\begin{pmatrix} 2 & 2 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 1 \\ -1 & -2 & -4 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}\right) = 2;$$

$$r_2 = r\left(\begin{pmatrix} 2 & 2 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 1 \\ -1 & -2 & -4 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}^2\right) = r\begin{pmatrix} -1 & -2 & -4 & -1 \\ -1 & -2 & -4 & -1 \\ 1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 1;$$

$$r_3 = r\left(\begin{pmatrix} 2 & 2 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 1 \\ -1 & -2 & -4 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}^3\right) = r\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 1 \\ -1 & -2 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 1.$$

Taigi $q_1 = q_2 = 1$. Vadinasi, transformacijos f Žordano matrica yra

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Transformacijos $f - id$ aukštis lygus 2. Todėl pirmojo bazės vektoriaus parinkimui pakanka paimti matricos $(A-E)^0$ kurios nors eilutės narius. Pasirinkime $\alpha_1 = (0,0,0,1)$. Tuomet antrasis bazės vektorius $\alpha_2 = \alpha_1(A-E) = (-1,0,-1,-1)$.

Trečiąjį bazės vektorių randame, išsprendę homogeninę tiesinių lygčių sistemą

$$\begin{cases} -2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ -2x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0, \\ -5x_1 - 4x_2 + 4x_3 + x_4 = 0, \\ -2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

Šios sistemos bendrasis sprendinys yra

$$x_1 = c_1,\ x_2 = c_2,\ x_3 = c_1 + c_2,\ x_4 = c_1 \quad (c_1, c_2 \in R).$$

Pasirinkę $c_1 = c_2 = 1$, užrašome trečiojo bazės vektoriaus koordinates: $\alpha_3 = (1,1,2,1)$.

Ketvirtąjį bazės vektorių gausime iš bendrojo sistemos

$$\begin{cases} -3x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ -2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0, \\ -5x_1 - 4x_2 + 3x_3 + x_4 = 0, \\ -2x_1 - x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

sprendinio. Bendrasis sprendinys yra

$$x_1 = c_1,\ x_2 = 2c_1,\ x_3 = 4c_1,\ x_4 = c_1 \quad (c_1 \in R).$$

Pasirinkę $c_1 = 1$, turėsime ketvirtojo bazės vektoriaus koordinates: $\alpha_4 = (1, 2, 4, 1)$.

UŽDAVINIAI

9.1. Raskite aritmetinės erdvės R^n tiesinės transformacijos tikrines reikšmes ir tikrinius vektorius, kai tos transformacijos matrica yra:

1) $A = \begin{pmatrix} -22 & -10 & 19 \\ 10 & 6 & -8 \\ -26 & -10 & 23 \end{pmatrix}$; 2) $A = \begin{pmatrix} -16 & 11 & -18 \\ 12 & -5 & 12 \\ 21 & -13 & 23 \end{pmatrix}$;

3) $A = \begin{pmatrix} 6 & 16 & -4 \\ -16 & -34 & 8 \\ -56 & -112 & 26 \end{pmatrix}$; 4) $A = \begin{pmatrix} 13 & -24 & 18 \\ -4 & 9 & -6 \\ -14 & 28 & -20 \end{pmatrix}$;

5) $A = \begin{pmatrix} -23 & -46 & -7 \\ 10 & 20 & 3 \\ 6 & 13 & 0 \end{pmatrix}$; 6) $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$;

7) $A = \begin{pmatrix} 27 & 17 & -43 & 43 \\ -12 & -5 & 22 & -22 \\ 6 & 1 & -14 & 11 \\ -6 & -7 & 5 & -8 \end{pmatrix}$; 8) $A = \begin{pmatrix} 7 & 7 & -7 & 10 \\ -2 & -2 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & -1 & 3 \\ -2 & -3 & 2 & -2 \end{pmatrix}$.

9.2. Raskite aritmetinės erdvės tiesinės transformacijos f, kurios matrica A, tikrinių vektorių tiesinius apvalkus:

1) $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & -3 & 5 \end{pmatrix}$; 2) $A = \begin{pmatrix} -17 & 8 & -16 \\ -4 & 1 & -4 \\ 14 & -7 & 13 \end{pmatrix}$;

3) $A = \begin{pmatrix} -5 & 11 & -1 & 4 \\ -3 & 6 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; 4) $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ -2 & -4 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

9.3. Ar aritmetinės erdvės R^n tiesinė tranformacija, kurios matrica A, yra paprastosios struktūros transformacija:

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$; 2) $A = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -4 \\ 1 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & 6 \end{pmatrix}$;

3) $A = \begin{pmatrix} -2 & -3 & -3 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 7 \end{pmatrix}$; 4) $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -3 & -6 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$?

9.4. Sudarykite aritmetinės erdvės R^n bazę, kurioje tos erdvės tiesinė transformacija, apibrėžta matrica A, turi diagonalinę matricą:

1) $A = \begin{pmatrix} 8 & 5 & 6 \\ -6 & -5 & -6 \\ -4 & -2 & -2 \end{pmatrix}$; 2) $A = \begin{pmatrix} -15 & -42 & -42 \\ 10 & 29 & 30 \\ -6 & -18 & -19 \end{pmatrix}$;

3) $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$; 4) $A = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 5 & 10 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ -5 & -5 & -5 & -8 \end{pmatrix}$.

9.5. Raskite aritmetinės erdvės R^n tiesinės transformacijos, apibrėžtos matrica A, dvimatį invariantinį poerdvį:

1) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; 2) $A = \begin{pmatrix} 0 & -4 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$;

3) $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & 3 & -6 \\ -4 & 7 & 3 & -3 \end{pmatrix}$; 4) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 2 & -3 \\ 1 & -3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

9.6. Užrašykite šias matricas Žordano forma:

1) $A = \begin{pmatrix} 7 & -16 & 20 \\ 2 & -5 & 8 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$; 2) $A = \begin{pmatrix} -4 & 4 & -4 \\ -2 & 2 & -4 \\ -1 & 2 & -4 \end{pmatrix}$;

3) $A = \begin{pmatrix} -2 & -14 & -3 \\ 2 & 9 & 2 \\ -1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$; 4) $A = \begin{pmatrix} -5 & -14 & -3 \\ 2 & 6 & 2 \\ -1 & -3 & -1 \end{pmatrix}$;

5) $A = \begin{pmatrix} -14 & 1 & 1 & -13 \\ 6 & -1 & 0 & 6 \\ -3 & 0 & -1 & -3 \\ 16 & -1 & -1 & 15 \end{pmatrix}$; 6) $A = \begin{pmatrix} 12 & 1 & 0 & 10 \\ -5 & 2 & 1 & -5 \\ 3 & 0 & 2 & 3 \\ -13 & -1 & 0 & -11 \end{pmatrix}$;

7) $A = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$; 8) $A = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

9.7. Užrašykite šias matricas Žordano forma ir parašykite Žordano bazes:

1) $A = \begin{pmatrix} -4 & -38 & -51 \\ 2 & 17 & 22 \\ -1 & -6 & -6 \end{pmatrix}$; 2) $A = \begin{pmatrix} 5 & -11 & 14 \\ -2 & 5 & -4 \\ -3 & 7 & -7 \end{pmatrix}$;

3) $A = \begin{pmatrix} -3 & -10 & 5 \\ 2 & 6 & -2 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$; 4) $A = \begin{pmatrix} -7 & -18 & -9 \\ 7 & 16 & 7 \\ -4 & -8 & -2 \end{pmatrix}$;

$$5)\ A = \begin{pmatrix} -4 & 1 & -3 & -2 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \\ 5 & 0 & 4 & 6 \\ -1 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}; \quad 6)\ A = \begin{pmatrix} -10 & -8 & -12 & -29 \\ 5 & 5 & 5 & 11 \\ 16 & 11 & 18 & 39 \\ -4 & -3 & -4 & -8 \end{pmatrix};$$

$$7)\ A = \begin{pmatrix} -11 & 1 & 1 & -9 \\ 3 & -2 & -4 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 13 & -1 & -1 & 11 \end{pmatrix}; \quad 8)\ A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

9.8. Kurios iš matricų A, B ir C yra panašios:

$$1)\ A = \begin{pmatrix} 12 & -9 & -36 \\ -7 & 10 & 28 \\ 4 & -4 & -13 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -4 \\ -2 & 7 & -4 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -2 & -10 & 5 \\ 2 & 7 & -2 \\ -1 & -2 & 4 \end{pmatrix};$$

$$2)\ A = \begin{pmatrix} -4 & -14 & -3 \\ -2 & 7 & 2 \\ -1 & -3 & 0 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$3)\ A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -4 & 1 & -3 \\ -1 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$4)\ A = \begin{pmatrix} 6 & -1 & 4 \\ -1 & 2 & -1 \\ -5 & 1 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & 4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

9.9. Raskite Euklidos erdvės E ortogonalios transformacijos, aprašytos matrica Q, kanoninę išraišką ir kanoninę bazę:

$$1)\ Q = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{2} & \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{\sqrt{2}}{4} \\ \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{\sqrt{2}}{4} \\ \frac{\sqrt{2}}{4} & -\frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}; \ 2)\ Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} + \frac{3\sqrt{3}}{8} & \frac{3}{8} - \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} \\ \frac{3}{8} - \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{8} & \frac{1}{4} \\ -\frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}.$$

9.10. Raskite Euklido erdvės E ortonormuotąją bazę, kurioje tos erdvės simetrinės transformacijos matrica S yra diagonalinė ir užrašykite ją:

$$1)\ S = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}; \quad 2)\ S = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -5 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

ATSAKYMAI

9.1. 1) $l_1 = 1,\ \alpha_1 = a\,(-2,-2,1);\quad l_2 = 2,\ \alpha_2 = a\,(1,5,1);$
$l_3 = 4,\ \alpha_3 = a\,(1,0,-1)\quad (a \neq 0,\ a \in R);$

2) $l_1 = 2,\ \alpha_1 = a\,(3,1,2);\quad l_2 = 1,\ \alpha_2 = a\,(3,-1,3);$
$l_3 = -1,\ \alpha_3 = a\,(2,-1,2)\quad (a \neq 0,\ a \in R);$

3) $l_1 = 2,\ \alpha_1 = a\,(2,4,-1);\quad l_2 = l_3 = -2,$
$\alpha_2 = b\,(2,1,0) + c\,(7,0,1)\quad (a \neq 0,\ b^2 + c^2 \neq 0,\ a,b,c \in R);$

4) $l_1 = 0,\ \alpha_1 = a\,(2,-4,3);\quad l_2 = l_3 = 1,$
$\alpha_2 = b\,(1,3,0) + c\,(0,-7,2)\quad (a \neq 0,\ b^2 + c^2 \neq 0,\ a,b,c \in R);$

5) $l_1 = l_2 = l_3 = -1,\ \alpha = a\,(2,5,-1)\quad (a \neq 0,\ a \in R);$

6) $l_1 = l_2 = l_3 = 2,\ \alpha = b\,(1,1,0) + c\,(1,0,-1)\quad (b^2 + c^2 \neq 0,\ b,c \in R);$

7) $l_1 = l_2 = 3,\ \alpha_1 = a\,(0,-1,-1,1);\ l_3 = l_4 = -3,$
$\alpha_2 = b\,(1,0,-3,2) + c\,(0,1,2,0)\quad (a \neq 0,\ b^2 + c^2 \neq 0,\ a,b,c \in R);$

8) $l_1 = l_2 = l_3 = 1,\ \alpha_1 = b\,(0,1,1,0) + c\,(0,0,1,1);\ l_4 = -1,$
$\alpha_2 = a\,(2,5,-1,2)\quad (a \neq 0,\ b^2 + c^2 \neq 0,\ a,b,c \in R).$

9.2. 1) $L = \{(1,-1,1)\};$
2) $L = \{(0,7,2),(1,-4,0)\};$
3) $L_1 = \{(0,1,1,2)\},\quad L_2 = \{(0,0,-1,1),(-1,1,-3,0)\};$
4) $L_1\{(1,1,1,2)\},\quad L_2 = \{(2,2,1,2)\}.$

9.3. 1) Taip; 2) ne; 3) taip; 4) ne.

9.4. 1) Pvz., $\alpha_1 = (4,2,3),\quad \alpha_2 = (1,1,1),\quad \alpha_3 = (2,1,2);$
2) pvz., $\alpha_1 = (3,0,-7),\quad \alpha_2 = (0,3,5),\quad \alpha_3 = (1,3,3);$
3) pvz., $\alpha_1 = (0,0,1,0),\quad \alpha_2 = (1,1,0,1),$
$\alpha_3 = (0,1,0,1),\quad \alpha_4 = (1,-1,1,0);$
4) pvz., $\alpha_1 = (0,1,0,0),\quad \alpha_2 = (0,0,1,0),$
$\alpha_3 = (1,0,0,1),\quad \alpha_4 = (1,1,1,2).$

9.5. 1) $L = \{(1,1,0),(-1,0,1)\};$
2) $L = \{(1,0,-1),(1,2,0)\};$
3) $L = \{(-14,9,6,-6),(-1,-5,0,6)\};$
4) $L = \{(0,1,0,0),(-1,0,0,0)\}.$

9.6.

1) $I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix};$ 2) $I = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix};$

3) $I = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix};$ 4) $I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$

5) $I=\begin{pmatrix}-1&1&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&2\end{pmatrix}$; 6) $I=\begin{pmatrix}2&1&0&0\\0&2&1&0\\0&0&2&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}$;

7) $I=\begin{pmatrix}-2&1&0&0\\0&-2&0&0\\0&0&-2&1\\0&0&0&-2\end{pmatrix}$; 8) $I=\begin{pmatrix}-1&1&0&0\\0&-1&1&0\\0&0&-1&1\\0&0&0&-1\end{pmatrix}$.

9.7.

1) $I=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&5\end{pmatrix}$, bazę sudaro, pvz., $\alpha_1=(1,3,2)$, $\alpha_2=(-1,-2,1)$, $\alpha_3=(0,1,2)$;

2) $I=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$, bazę sudaro, pvz., $\alpha_1=(0,0,1)$, $\alpha_2=(-3,7,-8)$, $\alpha_3=(-2,5,-6)$;

3) $I=\begin{pmatrix}2&1&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$, bazę sudaro, pvz., $\alpha_1=(0,0,1)$, $\alpha_2=(-1,-2,1)$, $\alpha_3=(1,1,-3)$;

4) $I=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$, bazę sudaro, pvz., $\alpha_1=(1,2,1)$, $\alpha_2=(0,4,7)$, $\alpha_3=(4,0,-9)$;

5) $I=\begin{pmatrix}-1&1&0&0\\0&-1&1&0\\0&0&-1&1\\0&0&0&-1\end{pmatrix}$, bazę sudaro, pvz., $\alpha_1=(1,0,0,0)$, $\alpha_2=(-3,1,-3,-2)$, $\alpha_3=(-3,-4,-3,-11)$, $\alpha_4=(1,1,1,3)$;

6) $I=\begin{pmatrix}2&1&0&0\\0&2&1&0\\0&0&2&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}$, bazę sudaro, pvz., $\alpha_1=(2,2,1,0)$, $\alpha_2=(2,1,2,3)$, $\alpha_3=(1,0,1,1)$, $\alpha_4=(1,1,1,3)$;

7) $I=\begin{pmatrix}-2&1&0&0\\0&-2&0&0\\0&0&2&1\\0&0&0&2\end{pmatrix}$, bazę sudaro, pvz., $\alpha_1=(3,0,0,2)$, $\alpha_2=(-1,1,1,-1)$, $\alpha_3=(1,0,-1,1)$, $\alpha_4=(-1,0,0,-1)$;

8) $I=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&2\end{pmatrix}$, bazę sudaro, pvz., $\alpha_1=(1,2,0,0)$, $\alpha_2=(-1,1,-1,-1)$, $\alpha_3=(0,0,1,0)$, $\alpha_4=(1,0,0,1)$.

9.8. 1) Matricos A, B, C yra tarpusavyje panašios;
2) matricos A ir B panašios;
3) matricos A ir C panašios;
4) visos matricos tarpusavyje nepanašios.

9.9

1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$, $\quad \alpha_1 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(1,1,0),$ $\alpha_2 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(1,-1,0),$ $\alpha_3 = (0,0,1);$

2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$, $\quad \alpha_1 = \dfrac{1}{2}(1,-\sqrt{3},0),$ $\alpha_2 = \dfrac{1}{2}(\sqrt{3},1,0),$ $\alpha_3 = (0,0,1).$

9.10.

1) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$, $\quad \alpha_1 = \dfrac{\sqrt{3}}{3}(1,1,1),$ $\alpha_2 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(-1,0,1),$ $\alpha_3 = \dfrac{\sqrt{6}}{6}(1,-2,1);$

2) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$, $\quad \alpha_1 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(-1,0,1),$ $\alpha_2 = \dfrac{1}{3}(2,1,2),$ $\alpha_3 = \dfrac{\sqrt{2}}{6}(1,-4,1).$