7. EUKLIDO ERDVĖ

Realiojoje vektorinėje erdvėje apibrėžta dviejų argumentų α ir β skaliarinė funkcija $< \alpha, \beta >$ vadinama *skaliarine daugyba*, kai su visais tos erdvės vektoriais α, β, γ ir su kiekvienu realiuoju skaičiumi c ji turi tokias savybes:

1) komutatyvumo: $< \alpha, \beta > = < \beta, \alpha >$;
2) distributyvumo: $< \alpha + \gamma, \beta > = < \alpha, \beta > + < \gamma, \beta >$;
3) homogeniškumo: $< c\alpha, \beta > = c < \alpha, \beta >$;
4) reguliarumo: jei $\alpha \neq \theta$, tai $< \alpha, \alpha > > 0$.

Realioji vektorinė erdvė, kurioje apibrėžta skaliarinė daugyba, vadinama *Euklido erdve.*

1 teorema. *Kiekvienoje realiojoje baigtinio matavimo vektorinėje erdvėje galima apibrėžti skaliarinę daugybą.*

Euklido erdvės *vektoriaus α ilgiu* vadinama aritmetinė šaknies $\sqrt{< \alpha, \alpha >}$ reikšmė ir žymima $||\alpha||$.

Euklido erdvės vektorius vadinamas *normuotoju*, kai jo ilgis lygus 1.

Koši–Buniakovskio nelygybė. *Bet kurių Euklido erdvės vektorių α ir β porą sieja nelygybė*

$$| < \alpha, \beta > | \leq ||\alpha|| \cdot ||\beta||.$$

Trikampio nelygybė. *Dviejų Euklido erdvės vektorių sumos ilgis ne didesnis už jos dėmenų ilgių sumą.*

Kampu tarp dviejų nenulinių Euklido erdvės vektorių α ir β vadinamas kampas, kurio didumas φ $(0 \leq \varphi \leq \pi)$ apibrėžtas lygybe

$$\cos\varphi = \frac{< \alpha, \beta >}{||\alpha|| \cdot ||\beta||}.$$

Euklido erdvės vektorių sistema, sudaryta iš poromis tarpusavyje ortogonalių vektorių, vadinama *ortogonaliąja vektorių sistema.*

1 teorema. *Ortogonalioji nenulinių vektorių sistema yra tiesiškai nepriklausoma.*

Euklido erdvės *bazė vadinama ortogonaliąja*, kai jos vektoriai sudaro ortogonaliąją sistemą.

2 teorema. *Kiekviena Euklido erdvė turi ortogonaliąją bazę.*

Išvada. *Kiekvieną Euklido erdvės poerdvio ortogonaliąją bazę galima papildyti iki erdvės ortogonaliosios bazės.*

Euklido erdvės normuotojų vektorių ortogonalioji sistema vadinama *ortonormuotąja sistema.*

Euklido erdvės *bazė vadinama ortonormuotąja*, kai jos vektoriai sudaro ortonormuotąją sistemą.

Kvadratinė realiųjų skaičių matrica vadinama ortogonaliąja, kai jos transponuotoji matrica lygi atvirkštinei.

3 teorema. *Euklido erdvės ortonormuotoji bazė yra keičiama tokia pat baze tada ir tik tada, kai jos keitimo matrica ortogonali.*

Euklido erdvės vektorių $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ sistemos *Gramo determinantu* vadinamas determinantas

$$G(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m) = \begin{vmatrix} <\alpha_1, \alpha_1> & <\alpha_1, \alpha_2> & \ldots & <\alpha_1, \alpha_m> \\ <\alpha_2, \alpha_1> & <\alpha_2, \alpha_2> & \ldots & <\alpha_2, \alpha_m> \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ <\alpha_m, \alpha_1> & <\alpha_m, \alpha_2> & \ldots & <\alpha_m, \alpha_m> \end{vmatrix}.$$

4 teorema. *Euklido erdvės vektorių sistema yra tiesiškai priklausoma tada ir tik tada, kai jos Gramo determinantas lygus nuliui.*

Euklido erdvės *poerdviai L_1 ir L_2 vadinami tarpusavyje ortogonaliais*, kai kiekvienas poerdvio L_1 vektorius yra ortogonalus kiekvienam poerdvio L_2 vektoriui.

Euklido erdvės vektorių, ortogonalių kiekvienam jos poaibio vektoriui, aibė vadinama to poaibio ortogonaliuoju papildiniu. Poerdvio L ortogonalųjį papildinį žymime $L^{\perp}$.

5 teorema. *Euklido erdvė yra bet kurio jos poerdvio ir jo ortogonaliojo papildinio tiesioginė suma.*

Išvada. *Jei L yra Euklido erdvės poerdvis, tai kiekvieną tos erdvės vektorių α galima vienareikšmiškai išreikšti lygybe*

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 \qquad (\alpha_1 \in L, \alpha_2 \in L^{\perp}).$$

Vektorius α_1 vadinamas *vektoriaus α projekcija poerdvyje L* ir žymimas $\mathrm{pr}_L(\alpha)$, o α_2 – statmeniu, nuleistu iš vektoriaus α į poerdvį L, ir žymimas $\mathrm{ort}_L(\alpha)$.

PAVYZDŽIAI

1. Ortogonalizuosime vektorių $\alpha_1 = (1, -2, 2)$, $\alpha_2 = (-1, 8, -5)$, $\alpha_3 = (4, -11, 5)$ sistemą.

Taikysime ortogonalizavimo procesą. Pažymime $\beta_1 = \alpha_1$, $\beta_2 = \alpha_2 + x\beta_1$. Nežinomojo x reikšmę rasime iš lygybės

$$<\beta_2, \beta_1> = <\alpha_2 + x\beta_1, \beta_1> = 0.$$

Iš čia išplaukia lygybė

$$x = -\frac{<\alpha_2, \beta_1>}{<\beta_1, \beta_1>}.$$

Todėl $x = 3$. Vadinasi, $\beta_2 = \alpha_2 + 3\beta_1 = (2, 2, 1)$.

Dabar pažymime $\beta_3 = \alpha_3 + x\beta_1 + y\beta_2$. Nežinomųjų x ir y reikšmes rasime iš lygybių $< \beta_3, \beta_1 >= 0$, $< \beta_3, \beta_2 >= 0$. Iš čia išplaukia lygybės

$$x = -\frac{< \alpha_3, \beta_1 >}{< \beta_1, \beta_1 >}, \quad y = -\frac{< \alpha_3, \beta_2 >}{< \beta_2, \beta_2 >}.$$

Todėl $x = -4$, $y = 1$. Vadinasi, $\beta_3 = \alpha_3 - 4\beta_1 + \beta_2 = (2, -1, -2)$.

2. Papildysime vektorių sistemą $\alpha_1 = (1, -1, 1 - 1)$, $\alpha_2 = (1, 1, 1, 1)$ iki aritmetinės erdvės R^4 ortogonaliosios bazės.

Pirmiausia įsitikiname, kad vektoriai α_1 ir α_2 yra ortogonalūs: $< \alpha_1, \alpha_2 >= 1 \cdot 1 + +(-1) \cdot 1 + 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 = 0$.

Pažymėkime $\alpha = (x_1, x_2, x_3, x_4)$. Nežinomųjų x_1, x_2, x_3, x_4 reikšmes rasime iš lygybių $< \alpha, \alpha_1 >= 0$, $< \alpha, \alpha_2 >= 0$. Įrašę į šias lygybes vektorių α, α_1, α_2 koordinates ir atlikę veiksmus, gauname homogeninę tiesinių lygčių sistemą

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

Šios sistemos bendrasis sprendinys yra

$$x_1 = -c_3,\ x_2 = -c_4,\ x_3 = c_3,\ x_4 = c_4 \quad (c_3, c_4 \in R).$$

Fundamentaliąją sprendinių sistemą sudaro vektoriai

$$\alpha_3 = (-1, -1, 1, 1), \quad \alpha_4' = (-2, 4, 2, -4).$$

Tereikia šią sistemą ortogonalizuoti. Pažymime $\alpha_4 = \alpha_4' + x\alpha_3$ ir nežinomojo x reikšmę randame iš lygybės

$$x = -\frac{< \alpha_3, \alpha_4' >}{< \alpha_3, \alpha_3 >}.$$

Todėl $x = 1$. Iš čia $\alpha_4 = \alpha_4' + \alpha_3 = (-3, 3, 3, -3)$. Vadinasi, erdvės R^4 ortogonaliąją bazę sudaro vektoriai α_1, α_2, α_3, α_4.

3. Apskaičiuosime aritmetinės erdvės R^4 vektoriaus $\alpha = (-1, -4, -3, 2)$ projekciją ir statmenį į poerdvį L, generuotą vektorių $\alpha_1 = (1, 2, -1, 3)$, $\alpha_2 = (2, 5, 3, 2)$.

Apskaičiavę sistemos α_1 ir α_2 rangą, įsitikiname, kad vektoriai α_1 ir α_2 sudaro tiesinio apvalko L bazę:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 5 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} {}^{-2} \\ \downarrow \end{matrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Taigi $r(\alpha_1, \alpha_2) = 2$ ir todėl vektoriai α_1 ir α_2 sudaro apvalko L bazę.

Pažymėkime $\mathrm{pr}_L(\alpha) = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2$. Tuomet $\mathrm{ort}_L(\alpha) = \alpha - \mathrm{pr}_L(\alpha) == (-1 - x_1 - -2x_2, -4 - 2x_1 - 5x_2, -3 + x_1 - 3x_2, 2 - 3x_1 - 2x_2)$. Nežinomųjų x_1 ir x_2 reikšmes randame iš lygybių

$$< \mathrm{ort}_L(\alpha), \alpha_1 >= 0, < \mathrm{ort}_L(\alpha), \alpha_2 >= 0 :$$

$$\begin{cases} -1 - x_1 - 2x_2 - 8 - 4x_1 - 10x_2 + 3 - x_1 + 3x_2 + 6 - 9x_1 - 6x_2 = 0, \\ -2 - 2x_1 - 4x_2 - 20 - 10x_1 - 25x_2 - 9 + 3x_1 - 9x_2 + 4 - 6x_1 - 4x_2 = 0; \end{cases} \sim$$

$$\sim \begin{cases} -15x_1-15x_2 = \quad 0, \\ -15x_1-42x_2-27=0; \end{cases} \sim \begin{cases} x_1 = \quad 1, \\ x_2 = -1. \end{cases}$$

Vadinasi,

$$\mathrm{pr}_L(\alpha) = \alpha_1 - \alpha_2 = (-1,-3,-4,1)$$
$$\mathrm{ort}_L(\alpha) = \alpha - \mathrm{pr}_L(\alpha) = (0,-1,1,1).$$

UŽDAVINIAI

7.1. Apibrėžkite skaliarinę daugybą:
1) antros eilės kvadratinių matricų su realiaisiais koeficientais erdvėje $R_{2\times 2}$;
2) tolydžių uždarame intervale $[a,b]$ funkcijų erdvėje $C[a,b]$;
3) polinomų erdvėje $R[t]$.

7.2. Jei $<\alpha,\beta>_1$ ir $<\alpha,\beta>_2$ yra Euklido erdvės skirtingos skaliarinės daugybos, tai skaliarine daugyba bus ir $a<\alpha,\beta>_1 + b<\alpha,\beta>_2$, kai a,b – neneigiamieji, kartu nelygūs nuliui skaičiai. Įrodykite.

7.3. Ar galima apibrėžti aritmetinėje erdvėje R^3 skaliarinę daugybą tokia lygybe: $\big(\alpha=(a_1,a_2,a_3), \beta=(b_1,b_2,b_3)\big)$

1) $<\alpha,\beta>= 2a_1b_1 + 3a_2b_2 + 2a_3b_3$;

2) $<\alpha,\beta>= 4a_1b_1 + 2a_1b_2 + 2a_2b_1 + 5a_2b_2 + a_3b_3$;

3) $<\alpha,\beta>= a_1b_1 + a_1b_2 + a_2b_1 + a_2b_2 + a_2b_3 + a_3b_2 + a_3b_3$;

4) $<\alpha,\beta>= 8a_1b_1 + a_1b_2 + a_2b_1 + 6a_2b_2 + 2a_2b_3 + 2a_3b_2 + 8a_3b_3$?

7.4. Apskaičiuokite kampo tarp aritmetinės erdvės R^3 vektorių α ir β didumą:
1) $\alpha=(2,-1,0,1)$, $\beta=(0,1,2,2)$;

2) $\alpha=(1,-1,-1,1)$, $\beta=(1,0,0,1)$.

7.5. Apskaičiuokite trikampio ABC vidaus kampų didumus, kai jo viršūnės yra taškuose $A(1,2,3)$, $B(5,5,3)$, $C(1,2,8)$.

7.6. Ortogonalizuokite aritmetinės erdvės R^n vektorių sistemą:

1) $\alpha_1=(1,2,1)$,
$\alpha_2=(-3,-4,-1)$,
$\alpha_3=(-4,-7,0)$;

2) $\alpha_1=(2,1,-3)$,
$\alpha_2=(5,3,-5)$,
$\alpha_3=(4,-4,6)$;

3) $\alpha_1=(1,-1,2,1)$,
$\alpha_2=(0,6,-1,1)$,
$\alpha_3=(7,10,5,0)$;

4) $\alpha_1=(2,2,1,-4)$,
$\alpha_2=(-4,-5,-1,14)$,
$\alpha_3=(-5,8,5,9)$;

5) $\alpha_1=(1,-3,4,2)$,
$\alpha_2=(5,-1,5,1)$,
$\alpha_3=(-5,-13,5,3)$,
$\alpha_4=(6,8,-8,10)$;

6) $\alpha_1=(2,1,3,2)$,
$\alpha_2=(1,1,7,6)$,
$\alpha_3=(-13,-6,-2,1)$,
$\alpha_4=(2,-9,-5,1)$.

7.7. Ortogonalizavimo procesu sudarykite aritmetinės erdvės R^n vektorių $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ tiesinio apvalko ortogonaliąją bazę:

1) $\alpha_1 = (2, 3, -4)$,
$\alpha_2 = (-3, -1, 5)$,
$\alpha_3 = (8, -13, 16)$;

2) $\alpha_1 = (1, -3, 5)$,
$\alpha_2 = (-1, -7, 3)$,
$\alpha_3 = (-10, -10, 24)$;

3) $\alpha_1 = (1, 2, 3, -1)$,
$\alpha_2 = (0, -6, -5, 3)$,
$\alpha_3 = (3, 0, 4, 0)$,
$\alpha_4 = (-1, 10, 7, -5)$;

4) $\alpha_1 = (3, -1, 4, 2)$,
$\alpha_2 = (2, -6, 5, -1)$,
$\alpha_3 = (8, 4, 1, 3)$,
$\alpha_4 = (1, 1, -6, -4)$;

5) $\alpha_1 = (3, 5, 2, -7)$,
$\alpha_2 = (1, 6, 13, -4)$,
$\alpha_3 = (5, 4, -9, -10)$,
$\alpha_4 = (11, 1, -42, -19)$;

6) $\alpha_1 = (4, -1, 3, 5)$,
$\alpha_2 = (9, -7, 7, 13)$,
$\alpha_3 = (-23, 7, 4, -3)$,
$\alpha_4 = (22, -2, -5, 0)$.

7.8. Papildykite vektorių sistemą $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ iki aritmetinės erdvės R^n ortonormuotosios bazės:

1) $\alpha_1 = \frac{1}{3}(1, -2, 2)$,
$\alpha_2 = \frac{1}{3}(-2, 1, 2)$;

2) $\alpha_1 = \frac{1}{3\sqrt{3}}(1, -1, 5)$,
$\alpha_2 = \frac{1}{\sqrt{14}}(-2, 3, 1)$;

3) $\alpha_1 = \frac{1}{3}(0, -1, 2, 2)$,
$\alpha_2 = \frac{1}{3\sqrt{3}}(3, 4, 1, 1)$;

4) $\alpha_1 = \frac{1}{5\sqrt{2}}(3, 4, -3, 4)$,
$\alpha_2 = \frac{1}{5\sqrt{2}}(4, 3, 4, -3)$;

5) $\alpha_1 = \frac{1}{3\sqrt{2}}(2, 1, 3, -2)$,
$\alpha_2 = \frac{1}{2\sqrt{3}}(1, 1, 1, 3)$;

6) $\alpha_1 = \frac{1}{6}(5, 3, 1, -1)$,
$\alpha_2 = \frac{1}{6}(1, 1, -5, 3)$.

7.9. Įrodykite tokias Euklido erdvės poerdvio ortogonaliojo papildinio savybes:

1) $(L^{\perp})^{\perp} = L$;
2) jei $L_1 \subset L_2$, tai $L_2^{\perp} \subset L_1^{\perp}$;
3) $(L_1 + L_2)^{\perp} = L_1^{\perp} \cap L_2^{\perp}$;
4) $L_1 \cap L_2)^{\perp} = L_1^{\perp} + L_2^{\perp}$;
5) $E_n^{\perp} = \{\theta\}$, $\{\theta\}^{\perp} = E_n$ ($\{\theta\}$ – nulinis poerdvis);
6) $E_n = L_1 \oplus L_2$, $E_n = L_1^{\perp} \oplus L_2^{\perp}$.

7.10 Raskite aritmetinės erdvės R^4 vektorių $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ tiesinio apvalko ortogonaliojo papildinio bazę:

1) $\alpha_1 = (4, 1, 2, -3)$,
$\alpha_2 = (2, -2, 3, 5)$;

2) $\alpha_1 = (1, 4, 5, -2)$,
$\alpha_2 = (2, 7, 1, 3)$;

3) $\alpha_1 = (1, 3, -5, 7)$,
$\alpha_2 = (2, 5, 3, 4)$,
$\alpha_3 = (3, 7, 2, 0)$;

4) $\alpha_1 = (2, 2, -5, 3)$,
$\alpha_2 = (3, 4, 1, -2)$,
$\alpha_3 = (5, 8, 13, -12)$.

7.11. Apskaičiuokite aritmetinės erdvės R^4 vektoriaus α projekciją ir statmenį į vektorių sistemos $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ tiesinį apvalką $L = L(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$:

1) $\alpha_1 = (1, -1, 2, 3)$,
$\alpha_2 = (-1, 3, 1, 5)$,
$\alpha = (2, -3, 3, -3)$;

2) $\alpha_1 = (4, 5, -1, 3)$,
$\alpha_2 = (-1, 2, 7, 4)$,
$\alpha = (7, 4, 14, 13)$;

3) $\alpha_1 = (3, 4, 5, -2)$,
$\alpha_2 = (-1, 1, 3, 3)$,
$\alpha_3 = (2, 1, -5, 1)$,
$\alpha = (-14, 17, 9, -5)$;

4) $\alpha_1 = (1, -1, 3, -1)$,
$\alpha_2 = (-1, 2, 1, 5)$,
$\alpha_3 = (2, -1, 2, 4)$,
$\alpha = (-20, -19, 6, 3)$.

ATSAKYMAI

7.3. 1) Taip; 2) taip; 3) ne; 4) taip.

7.4. 1) $\varphi = \arccos \frac{\sqrt{6}}{18}$; 2) $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

7.5. $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{4}$.

7.6. 1) $\beta_1 = (1, 2, 1)$, $\beta_2 = (-1, 0, 1)$, $\beta_3 = (1, -1, 1)$;

2) $\beta_1 = (2, 1, -3)$, $\beta_2 = (1, 1, 1)$, $\beta_3 = (4, -5, 1)$;

3) $\beta_1 = (1, -1, 2, 1)$, $\beta_2 = (1, 5, 1, 2)$, $\beta_3 = (4, 1, 1, -5)$;

4) $\beta_1 = (2, 2, 1, -4)$, $\beta_2 = (2, 1, 2, 2)$, $\beta_3 = (-7, 8, 2, 1)$;

5) $\beta_1 = (1, -3, 4, 2)$, $\beta_2 = (4, 2, 1, -1)$,
$\beta_3 = (1, -3, -1, -3)$, $\beta_4 = (5, -3, -7, 7)$;

6) $\beta_1 = (2, 1, 3, 2)$, $\beta_2 = (-3, -1, 1, 2)$,
$\beta_3 = (0, -1, 1, -1)$, $\beta_4 = (4, -7, -3, 4)$.

7.7. 1) pvz., $\beta_1 = (2, 3, -4)$, $\beta_2 = (-1, 2, 1)$, $\beta_3 = (11, 2, 7)$;

2) pvz., $\beta_1 = (1, -3, 5)$, $\beta_2 = (1, 2, 1)$, $\beta_3 = (-13, 4, 5)$;

3) pvz., $\beta_1 = (1, 2, 3, -1)$, $\beta_2 = (2, -2, 1, 1)$;

4) pvz., $\beta_1 = (3, -1, 4, 2)$, $\beta_2 = (1, 5, -1, 3)$, $\beta_3 = (-2, 0, 1, 1)$;

5) pvz., $\beta_1 = (3, 5, 2, -7)$, $\beta_2 = (-2, 1, 11, 3)$;

6) pvz., $\beta_1 = (4, -1, 3, 5)$, $\beta_2 = (3, -4, -2, -2)$, $\beta_3 = (-6, -7, 4, 1)$.

7.8. 1) $\beta_1 = \frac{1}{3}(1, -2, 2)$, $\beta_2 = \frac{1}{3}(-2, 1, 2)$, $\beta_3 = \frac{1}{3}(2, 2, 1)$;

2) $\beta_1 = \frac{1}{3\sqrt{3}}(1, -1, 5)$, $\beta_2 = \frac{1}{\sqrt{14}}(-2, 3, 1)$, $\beta_3 = \frac{1}{3\sqrt{42}}(-16, -11, 1)$;

3) $\beta_1 = \frac{1}{3}(0, -1, 2, 2)$, $\beta_2 = \frac{1}{3\sqrt{3}}(3, 4, 1, 1)$,
$\beta_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 0, 1, -1)$; $\beta_4 = \frac{1}{3\sqrt{6}}(-6, 4, 1, 1)$;

4) $\beta_1 = \frac{1}{5\sqrt{2}}(3, 4, -3, 4)$, $\beta_2 = \frac{1}{5\sqrt{2}}(4, 3, 4, -3)$,
$\beta_3 = \frac{1}{10}(1, 1, -7, -7)$; $\beta_4 = \frac{1}{10}(7, -7, -1, 1)$;

5) $\beta_1 = \frac{1}{3\sqrt{2}}(2,1,3,-2)$, $\beta_2 = \frac{1}{2\sqrt{3}}(1,1,1,3)$,
$\beta_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(-2,1,1,0)$; $\beta_4 = \frac{1}{6}(-1,-5,3,1)$;

6) $\beta_1 = \frac{1}{6}(5,3,1,-1)$, $\beta_2 = \frac{1}{6}(1,1,-5,3)$,
$\beta_3 = \frac{1}{6}(-3,5,1,1)$; $\beta_4 = \frac{1}{6}(1,-1,3,5)$.

7.10. 1) $\beta_1 = (-7,8,10,0)$, $\beta_2 = (1,26,0,10)$;

2) $\beta_1 = (31,-9,1,0)$, $\beta_2 = (-26,7,0,1)$;

3) $\beta = (-241,103,1,-9)$;

4) $\beta_1 = (22,-17,2,0)$, $\beta_2 = (-16,13,0,2)$.

7.11. 1) $\mathrm{pr}_L(\alpha) = (2,-4,1,-2)$, $\mathrm{ort}_L(\alpha) = (0,1,2,-1)$;

2) $\mathrm{pr}_L(\alpha) = (2,9,13,11)$, $\mathrm{ort}_L(\alpha) = (5,-5,1,2)$;

3) $\mathrm{pr}_L(\alpha) = (0,4,13,0)$, $\mathrm{ort}_L(\alpha) = (-14,13,-4,-5)$;

4) $\mathrm{pr}_L(\alpha) = (-1,1,5,-1)$, $\mathrm{ort}_L(\alpha) = (-19,-20,1,4)$.