## 6. KVADRATINĖS FORMOS

$n$ kintamųjų polinomas virš kūno $K$

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$$

vadinamas kintamųjų $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *kvadratine forma virš kūno* $K$. Koeficientų matrica $A = (a_{ij})$ vadinama *kvadratinės formos matrica.*

*Kvadratinės formos* $f$ *rangu* vadinamas jos matricos rangas ir žymimas $r(f)$.

Pažymėję kintamųjų eilutę $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ raide $X$, kvadratinę formą $f$ galime užrašyti taip: $f = XAX^t$.

Kintamųjų $x_1, x_2, \ldots, x_n$ keitinį kintamaisiais $y_1, y_2, \ldots, y_n$ pagal formules

$$\begin{aligned}
x_1 &= c_{11}y_1 + c_{12}y_2 + \ldots + c_{1n}y_n, \\
x_2 &= c_{21}y_1 + c_{22}y_2 + \ldots + c_{2n}y_n, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
x_n &= c_{n1}y_n + c_{n2}y_n + \ldots + c_{nn}y_n
\end{aligned}$$

vadiname *tiesiniu kintamųjų keitiniu virš kūno* $K$. Matrica $C = (c_{ij})$ vadinama *kintamųjų keitinio matrica.*

Tiesinis kintamųjų keitinys vadinamas *neišsigimusiuoju*, kai jo matrica yra neišsigimusi.

Sakome, kad kvadratinė forma $f(x_1, x_2 \ldots, x_n)$ yra *kongruenti* kvadratinei formai $g(y_1, y_2, \ldots, y_n)$, kai neišsigimusiu tiesiniu kintamųjų keitiniu iš formos $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ galima gauti formą $g(y_1, y_2, \ldots, y_n)$.

Kvadratinė forma vadinama *kanonine*, kai jos koeficientai prie skirtingų kintamųjų sandaugų lygūs nuliui.

Kanoninė kvadratinė forma, kongruenti kvadratinei formai, vadinama pastarosios formos *kanonine išraiška.*

**1 teorema.** *Kieviena kvadratinė forma virš nelygios dviem charakteristikos kūno turi kanoninę išraišką.*

**Išvada.** *Jei $A$ yra bet kokia simetrinė matrica su elementais iš nelygios dviem charakteristikos kūno, tai galima rasti tokią neišsigimusią kvadratinę matricą $C$ su elementais iš to paties kūno, kad sandauga $CAC^t$ būtų diagonalinė matrica.*

Kvadratinė forma su kompleksiniais koeficientais vadinama *kompleksine*, o su realiaisiais koeficientais – *realiąja.*

*Kanoninė kompleksinė forma vadinama normaliąja*, kai jos nenuliniai koeficientai prie kintamųjų kvadratų lygūs 1.

**2 teorema.** *Kiekviena kompleksinė kvadratinė forma yra kongruenti tam tikrai normaliajai kvadratinei formai.*

**Išvada.** *Dvi $n$ kintamųjų kompleksinės kvadratinės formos yra kongruenčios tada ir tik tada, kai jų rangai vienodi.*

*Kanoninė realioji kvadratinė forma vadinama normaliąja*, kai jos nenuliniai koeficientai prie kintamųjų kvadratų lygūs.

**3 teorema.** *Kiekviena realioji kvadratinė forma yra kongruenti tam tikrai normaliajai kvadratinei formai.*

**4 teorema.** *Realiosios kvadratinės formos normaliosios išraiškos teigiamų kvadratų skaičius nustatomas vienareikšmiškai.*

Realiosisos kvadratinės formos normaliosios išraiškos teigiamų kvadratų skaičius vadinamas jos teigiamuoju indeksu, neigiamų kvadratų skaičius – neigiamuoju indeksu, o teigiamojo ir neigiamojo indeksų skirtumas – tos *kvadratinės formos signatūra.*

**5 teorema.** *Dvi realiosios $n$ kintamųjų kvadratinės formos kongruenčios tada ir tik tada, kai jos yra to paties rango ir vienodų signatūrų.*

Realioji kvadratinė forma vadinama *teigiamai apibrėžtąja*, kai su kiekvienu nenuliniu kintamųjų realiųjų reikšmių rinkiniu tos formos reikšmė yra teigiama.

**6 teorema.** *Realioji kvadratinė forma yra teigiamai apibrėžta tada ir tik tada, kai jos teigiamasis indeksas lygus kintamųjų skaičiui.*

$k$-osios eilės kvadratinės formos minorus, sudarytus iš $k$ pirmųjų eilučių ir $k$ pirmųjų stulpelių ($k = \overline{1, n}$) sankirtos elementų, vadiname tos matricos pagrindiniais minorais.

**7 teorema.** *Realioji kvadratinė forma yra teigiamai apibrėžta tada ir tik tada, kai visi jos matricos pagrindiniai minorai yra teigiami.*

## PAVYZDŽIAI

1. Apskaičiuosime kvadratinės formos

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 2x_1x_2 + 6x_1x_3 - 4x_2^2 - 8x_2x_3 + 5x_3^2$$

rangą.

Užrašome kvadratinės formos $f$ matricą

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & -4 & -4 \\ 3 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

ir randame jos rangą:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & -4 & -4 \\ 3 & -4 & 5 \end{pmatrix} \begin{matrix} {}^{+}\ {}^{-3} \\ \downarrow\ \ \\ \ \ \downarrow \end{matrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -1 \\ 0 & -1 & -4 \end{pmatrix} \updownarrow \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -4 \\ 0 & -5 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ {}^{-5} \\ \downarrow \end{matrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Taigi $r(f) = r(A) = 3$.

2. Užrašysime tiesinį kintamųjų keitinį, kuriuo forma

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - x_2^2 + 6x_3^2$$

pakeičiama kanonine išraiška.

Sugrupuojame narius su $x_1$ ir papildome juos iki kintamųjų algebrinės sumos pilnojo kvadrato:

$$\begin{aligned}
&f(x_1, x_2, x_3) = (x_1^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3) - x_2^2 + 6x_3^2 = \\
&= (x_1^2 - 2 \cdot x_1 \cdot x_2 + 2 \cdot x_1 \cdot 2x_3 + x_2^2 + (2x_3)^2 - 2 \cdot x_2 \cdot 2x_3) - \\
&- x_2^2 - (2x_3)^2 + 2 \cdot x_2 \cdot 2x_3 - x_2^2 + 6x_3^2 = \\
&= (x_1 - x_2 + 2x_3)^2 - 2x_2^2 + 4x_2x_3 + 2x_3^2.
\end{aligned}$$

Tą patį atliekame su kintamuoju $x_2$:

$$\begin{aligned}
&f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2 + 2x_3)^2 - 2(x_2^2 - 2 \cdot x_2 \cdot x_3 + x_3^2 - x_3^2) + \\
&+ 2x_3^2 = (x_1 - x_2 + 2x_3)^2 - 2(x_2 - x_3)^2 + 4x_3^2.
\end{aligned}$$

Pažymėję

$$\begin{aligned}
y_1 &= x_1 - x_2 + 2x_3, \\
y_2 &= \phantom{x_1 -{}} x_2 - \phantom{2}x_3, \\
y_3 &= \phantom{x_1 - x_2 + 2} x_3,
\end{aligned}$$

gauname kvadratinės formos $f$ kanoninę išraišką

$$f^*(y_1, y_2, y_3) = y_1^2 - 2y_2^2 + 4y_3^2.$$

Iš aukščiau parašytų formulių apskaičiuojame $x_1$, $x_2$, $x_3$:

$$\begin{aligned}
x_3 &= y_3, \\
x_2 &= y_2 + y_3, \\
x_1 &= y_1 + y_2 - y_3.
\end{aligned}$$

Tai ir yra ieškomasis tiesinis kintamųjų keitinys.

3. Įrodysime, kad realiosios kvadratinės formos

$$f(x_1, x_2, x_3) = 4x_1^2 - 4x_1x_2 + 12x_1x_3 - 3x_2^2 - 2x_2x_3 + 8x_3^2$$

ir

$$g(y_1, y_2, y_3) = y_1^2 + 4y_1y_2 - 4y_1y_3 + 3y_2^2 - 12y_2y_3$$

yra kongruenčios ir rasime tiesinį kintamųjų keitinį, kuriuo forma $f$ keičiama forma $g$.

Apskaičiuojame formos $f$ normaliąją išraišką:

$$\begin{aligned}
&f(x_1, x_2, x_3) = 4x_1^2 - 4x_1x_2 + 12x_1x_3 - 3x_2^2 + 8x_3^2 - 2x_2x_3 = \\
&= \big((2x_1)^2 - 2 \cdot 2x_1 \cdot x_2 + 2 \cdot 2x_1 \cdot 3x_3 + x_2^2 + (3x_3)^2 - 2 \cdot x_2 \cdot 3x_3\big) - \\
&- x_2^2 - 9x_3^2 + 6x_2x_3 - 3x_2^2 + 8x_3^2 - 2x_2x_3 = (2x_1 - x_2 + 3x_3)^2 - \\
&- 4x_2^2 + 4x_2x_3 - x_3^2 = (2x_1 - x_2 + 3x_3)^2 - (2x_2 - x_3)^2.
\end{aligned}$$

Pažymėję

$$\begin{aligned} z_1 &= 2x_1 - x_2 + 3x_3, \\ z_2 &= \quad\;\; 2x_2 - x_3, \\ z_3 &= \qquad\qquad x_3, \end{aligned}$$

gauname formos $f$ normaliąją išraišką

$$f^*(z_1, z_2, z_3) = z_1^2 - z_2^2.$$

Po to apskaičiuojame formos $g$ normaliąją išraišką:

$$\begin{aligned} &g(y_1, y_2, y_3) = y_1^2 + 4y_1y_2 - 4y_1y_3 + 3y_2^2 - 12y_2y_3 = \\ &= (y_1^2 + 2 \cdot y_1 \cdot 2y_2 - 2 \cdot y_1 \cdot 2y_3 + (2y_2)^2 + (2y_3)^2 - 2 \cdot 2y_2 \cdot 2y_3) - \\ &- 4y_2^2 - 4y_3^2 + 8y_2y_3 + 3y_2^2 - 12y_2y_3 = (y_1 + 2y_2 - 2y_3)^2 - \\ &- y_2^2 - 4y_2y_3 - 4y_3^2 = (y_1 + 2y_2 - 2y_3)^2 - (y_2 + 2y_3)^2. \end{aligned}$$

Pažymėję

$$\begin{aligned} z_1 &= y_1 + 2y_2 - 2y_3, \\ z_2 &= \quad\;\; y_2 + 2y_3, \\ z_3 &= \qquad\quad\; y_3, \end{aligned}$$

gauname

$$g^*(z_1, z_2, z_3) = z_1^2 - z_2^2.$$

Kadangi formų $f$ ir $g$ rangai ir signatūros sutampa, jos yra ekvivalenčios. Iš pirmųjų keitinio formulių išsireiškiame $x_1$, $x_2$, $x_3$ kintamaisiais $z_1$, $z_2$, $z_3$:

$$\begin{aligned} x_3 &= z_3, \\ x_2 &= \frac{1}{2}(z_2 + z_3), \\ x_1 &= \frac{1}{4}(2z_1 + z_2 - 5z_3). \end{aligned}$$

Į šias formules įrašę $z_1$, $z_2$, $z_3$ išraiškas kintamaisiais $y_1$, $y_2$, $y_3$, gausime tiesinį kintamųjų keitinį, kuriuo forma $f$ keičiama forma $g$:

$$\begin{aligned} x_3 &= y_3, \\ x_2 &= \frac{1}{2}y_2 + \frac{3}{2}y_3, \\ x_1 &= \frac{1}{2}y_1 + \frac{5}{4}y_2 - \frac{7}{4}y_3. \end{aligned}$$

4. Išsiaiškinsime, su kuriomis parametro $\lambda$ reikšmėmis kvadratinė forma

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 13x_2^2 + \lambda x_3^2 - 6x_1x_2 + 4x_1x_3 - 16x_2x_3$$

yra teigiamai apibrėžta.

*1 būdas.* Parašome formos $f$ kanoninę išraišką:

$$\begin{aligned}
f(x_1,x_2,x_3) &= (x_1^2 - 2\cdot x_1\cdot 3x_2 + 2\cdot x_1\cdot 2x_3 + (3x_2)^2 + (2x_3)^2 - \\
&- 2\cdot 3x_2\cdot 2x_3) - 9x_2^2 - 4x_3^2 + 12x_2x_3 + 13x_2^2 + \lambda x_3^2 - 16x_2x_3 = \\
&= (x_1 - 3x_2 + 2x_3)^2 + 4x_2^2 - 4x_2x_3 + (\lambda-4)x_3^2 = \\
&= (x_1 - 3x_2 + 2x_3)^2 + (2x_2 - x_3)^2 + (\lambda-5)x_3^2.
\end{aligned}$$

Kad forma $f$ būtų teigiamai apibrėžta, būtina ir pakankama sąlyga yra $\lambda - 5 > 0$, t. y. $\lambda > 5$.

*2 būdas.* Užrašome kvadratinės formos $f$ matricą $A$ ir apskaičiuojame jos visus pagrindinius minorus:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -3 & 13 & -8 \\ 2 & -8 & \lambda \end{pmatrix},$$

$$M_1 = 1 > 0, \quad M_2 = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 13 \end{vmatrix} = 4 > 0,$$

$$M_3 = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -3 & 13 & -8 \\ 2 & -8 & \lambda \end{vmatrix} = 4(\lambda-5) > 0.$$

Iš pastarosios nelygybės gauname $\lambda > 5$.

## UŽDAVINIAI

6.1. Apskaičiuokite kvadratinės formos $f$ rangą:

1) $f(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 - x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3 - 2x_2x_3$;

2) $f(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 + 5x_2^2 + 2x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$;

3) $f(x_1,x_2,x_3,x_4) = 4x_1^2 + 2x_2^2 + 4x_3^2 + x_4^2 - 4x_1x_2 +$
$+4x_1x_4 - 4x_2x_3 - 2x_2x_4$.

6.2. Raskite kvadratinių formų kanonines išraiškas ir užrašykite tiesinius kintamųjų keitinius, kuriuos atlikus, gautos tos išraiškos:

1) $f(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 + 5x_2^2 - 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + 10x_2x_3$;

2) $f(x_1,x_2,x_3) = 8x_1^2 - x_2^2 + 15x_3^2 - 8x_1x_2 + 24x_1x_3 - 6x_2x_3$;

3) $f(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 + 9x_2^2 + 4x_3^2 + 6x_1x_2 - 4x_1x_3 - 12x_2x_3$;

4) $f(x_1,x_2,x_3) = \frac{1}{2}x_1^2 - x_1x_2 - 2x_1x_3 - x_2x_3$;

5) $f(x_1,x_2,x_3,x_4) = 4x_1^2 + 7x_2^2 - 10x_3^2 - 15x_4^2 + 12x_1x_2 -$
$-8x_1x_3 + 4x_1x_4 - 16x_2x_3 + 14x_2x_4 - 8x_3x_4$;

6) $f(x_1,x_2,x_3,x_4) = -2x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_4^2 +$
$+4x_1x_3 + 4x_2x_3 - 2x_2x_4 + 2x_3x_4$;

7) $f(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_1x_3 + x_2x_4$;

8) $f(x_1,x_2,x_3) = x_1x_2 + x_2x_3$;

9) $f(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4$;

10) $f(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 + 7x_2^2 - 12x_3^2 + 6x_1x_2 - 2x_1x_3 + 6x_2x_3$.

6.3. Raskite kvadratinių formų normaliąsias išraiškas ir užrašykite tiesinius kintamųjų keitinius, kuriuos atlikus, gautos tos išraiškos:

1) $f(x_1,x_2,x_3) = 2x_1^2 + x_2^2 + 4x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_2x_3$;

2) $f(x_1,x_2,x_3) = 4x_1^2 + 5x_2^2 + 14x_3^2 + 8x_1x_2 - 8x_1x_3$;

3) $f(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 + 7x_2^2 - x_3^2 - 6x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$;

4) $f(x_1,x_2,x_3) = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 3x_3^2 - 2\sqrt{10}x_1x_2 + 2\sqrt{6}x_1x_3 - 2\sqrt{15}x_2x_3$;

5) $f(x_1,x_2,x_3,x_4) = 2x_1^2 + 3x_2^2 + 10x_3^2 + 4x_4^2 - 4x_1x_2 +$
$+ 4x_1x_3 - 4x_1x_4 - 10x_2x_3 + 6x_2x_4 - 6x_3x_4$;

6) $f(x_1,x_2,x_3,x_4) = 3x_1^2 + 2x_2^2 - 6x_3^2 - 6x_4^2 - 6x_1x_2 -$
$- 6x_1x_3 + 2x_2x_3 + 2x_2x_4 - 6x_3x_4$;

7) $f(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_1^2 + 15x_2^2 - 8x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_1x_4 - 10x_2x_3 + 10x_2x_4$;

8) $f(x_1,x_2,x_3) = x_1x_2 + 2x_1x_3 - 4x_2x_3$;

9) $f(x_1,x_2,x_3,x_4) = -4x_1x_2 + x_2x_3 + 2x_2x_4$;

10) $f(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_1x_4$.

6.4. Ar kongruenčios šios kvadratinės formos:

1) $f(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 - 2x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$,
$g(y_1,y_2,y_3) = y_1^2 + 5y_2^2 + y_3^2 + 4y_1y_2 - 4y_1y_3 - 10y_2y_3$;

2) $f(x_1,x_2,x_3) = 4x_1^2 + 5x_2^2 + 13x_3^2 - 4x_1x_2 + 8x_1x_3 - 16x_2x_3$,
$g(y_1,y_2,y_3) = y_1^2 + 13y_2^2 + 2y_3^2 + 6y_1y_2 - 2y_1y_3 - 2y_2y_3$;

3) $f(x_1,x_2,x_3) = 2x_1^2 + 3x_2^2 - x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3 + 6x_2x_3$,
$g(y_1,y_2,y_3) = y_1^2 + 8y_2^2 - 6y_3^2 + 6y_1y_2 + 4y_1y_3 + 18y_2y_3$;

4) $f(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 - 2x_2x_3$,
$g(y_1,y_2,y_3) = y_1^2 + 4y_2y_3$?

6.5. Užrašykite tiesinį kintamųjų keitinį, kurį atlikus, iš kvadratinės formos $f$ gaunama kongruenti kvadratinė forma $g$:

1) $f(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 + 5x_2^2 + 14x_3^2 - 2x_1x_2 - 4x_1x_3 + 8x_2x_3$,
$g(y_1,y_2,y_3) = 4y_1^2 + 5y_2^2 + 19y_3^2 + 4y_1y_2 + 12y_1y_3 - 6y_2y_3$;

2) $f(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 + 3x_2^2 + 4x_3^2 - 4x_1x_2 - 6x_1x_3 + 16x_2x_3$,
$g(y_1,y_2,y_3) = y_1^2 - 3y_2^2 - y_3^2 - 2y_1y_2 - 2y_1y_3 + 6y_2y_3$;

3) $f(x_1,x_2,x_3) = 4x_1^2 + 3x_2^2 - 15x_3^2 - 8x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$,
$g(y_1,y_2,y_3) = y_1^2 + 3y_2^2 - 7y_3^2 + 4y_1y_2 + 6y_1y_3 + 4y_2y_3$;

4) $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2-3x_2^2-x_3^2-2x_1x_2+4x_2x_3$,
$g(y_1,y_2,y_3)=4y_1^2+2y_2^2+16y_3^2-4y_1y_2-28y_1y_3+10y_2y_3$.

6.6. Su kuriomis parametro $\lambda$ reikšmėmis šios kvadratinės formos yra teigiamai apibrėžtos:

1) $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+\lambda x_3^2-2x_1x_2-2x_1x_3+6x_2x_3$;

2) $f(x_1,x_2,x_3)=\lambda x_1^2+x_2^2+2x_3^2-2x_1x_2-2x_2x_3$;

3) $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+\lambda x_2^2+2x_3^2-4x_1x_2-2x_1x_3$;

4) $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2\lambda^2x_2^2+6x_3^2+2\lambda x_1x_2+2x_1x_3+2\lambda x_2x_3$;

5) $f(x_1,x_2,x_3)=-2x_2^2+x_3^2-6\lambda x_1x_2-2\lambda x_1x_3+2x_2x_3$;

6) $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+(\lambda-1)^2x_3^2-2x_1x_2-2\lambda x_1x_3+2(\lambda-2)x_2x_3$?

## ATSAKYMAI

6.1. 1) $r(f)=3$; 2) $r(f)=2$; 3) $r(f)=2$.

6.2. 1) $f^*(y_1,y_2,y_3)=y_1^2+y_2^2-10y_3^2$,
$x_1=y_1+2y_2-5y_3,\ x_2=y_2-3y_3,\ x_3=y_3$;

2) $f^*(y_1,y_2,y_3)=2y_1^2-3y_2^2$,
$x_1=\frac{1}{2}y_1+\frac{1}{2}y_2-y_3,\ x_2=y_2+y_3,\ x_3=y_3$;

3) $f^*(y_1,y_2,y_3)=y_1^2$,
$x_1=y_1-3y_2+2y_3,\ x_2=y_2,\ x_3=y_3$;

4) $f^*(y_1,y_2,y_3)=\frac{1}{2}y_1^2-\frac{1}{2}y_2^2+\frac{5}{2}y_3^2$,
$x_1=y_1+y_2-y_3,\ x_2=y_2-3y_3,\ x_3=y_3$;

5) $f^*(y_1,y_2,y_3,y_4)=y_1^2-2y_2^2-3y_3^2-5y_4^2$,
$x_1=\frac{1}{4}(2y_1-6y_2+5y_3-19y_4),\ x_2=\frac{1}{2}(2y_2-y_3+5y_4),\ x_3=\frac{1}{2}(y_3-y_4),\ x_4=y_4$;

6) $f^*(y_1,y_2,y_3,y_4)=y_2^2-2y_3^2+3y_4^2$,
$x_1=y_1,\ x_2=-3y_1+y_2+3y_3+y_4,\ x_3=y_1-y_3,\ x_4=-y_1+y_3+y_4$;

7) $f^*(y_1,y_2,y_3,y_4)=y_1^2+y_2^2-y_3^2-y_4^2$,
$x_1=y_1-y_3,\ x_2=y_2-y_4,\ x_3=y_1+y_3,\ x_4=y_2+y_4$;

8) $f^*(y_1,y_2,y_3)=y_1^2-y_2^2$,
$x_1=y_1-y_2-y_3,\ x_2=y_1+y_2,\ x_3=y_3$;

9) $f^*(z_1,z_2,z_3,z_4)=z_1^2-z_2^2+z_3^2-z_4^2$,
$x_1=z_1-z_2-z_3-z_4,\ x_2=2z_2+2z_3,\ x_3=z_3-z_4$,
$x_4=z_1-z_2-z_3+z_4$;

10) $f^*(y_1,y_2,y_3)=y_1^2-2y_2^2+5y_3^2$,
$x_1=y_1-3y_2-8y_3,\ x_2=y_2+3y_3,\ x_3=y_3$.

6.3. 1) $f^*(y_1, y_2, y_3) = y_1^2 - y_2^2 + y_3^2$,

$x_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}y_1 + y_2,\ x_2 = y_2 + \frac{\sqrt{3}}{3}y_3,\ x_3 = \frac{\sqrt{3}}{3}y_3$;

2) $f^*(y_1, y_2, y_3) = y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$,

$x_1 = \frac{1}{2}y_1 - y_2 + \frac{5\sqrt{6}}{6}y_3,\ x_2 = y_2 - \frac{2\sqrt{6}}{3}y_3,\ x_3 = \frac{\sqrt{6}}{6}y_3$;

3) $f^*(y_1, y_2, y_3) = y_1^2 - y_2^2$,

$x_1 = y_1 + \frac{3\sqrt{2}}{2}y_2 + 2y_3,\ x_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}y_2 + y_3,\ x_3 = y_3$;

4) $f^*(y_1, y_2, y_3) = y_1^2$,

$x_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}y_1 + \frac{\sqrt{10}}{2}y_2 - \frac{\sqrt{6}}{2}y_3,\ x_2 = y_2,\ x_3 = y_3$;

5) $f^*(y_1, y_2, y_3, y_4) = y_1^2 + y_2^2 - y_3^2 + y_4^2$,

$x_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}y_1 + y_2 + 2y_3 + \frac{4\sqrt{5}}{5}y_4,\ x_2 = y_2 + 3y_3 + \sqrt{5}y_4$,

$x_3 = y_3 + \frac{2\sqrt{5}}{5}y_4,\ x_4 = \frac{\sqrt{5}}{5}y_4$;

6) $f^*(y_1, y_2, y_3, y_4) = y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$,

$x_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}y_1 + y_2 - \frac{\sqrt{5}}{5}y_3 + 2y_4,\ x_2 = y_2 - \frac{2\sqrt{5}}{5}y_3 + 3y_4,\ x_3 = \frac{\sqrt{5}}{5}y_3 - y_4,\ x_4 = y_4$;

7) $f^*(y_1, y_2, y_3, y_4) = y_1^2 - y_2^2$,

$x_1 = y_1 + 4y_2 - 5y_3 + 5y_4,\ x_2 = y_2 - y_3 + y_4,\ x_3 = y_3,\ x_4 = y_4$;

8) $f^*(z_1, z_2, z_3) = z_1^2 - z_2^2 + z_3^2$,

$x_1 = z_1 - z_2 + \sqrt{2}z_3,\ x_2 = z_1 + z_2 - \frac{\sqrt{2}}{2}z_3,\ x_3 = \frac{\sqrt{2}}{4}z_3$;

9) $f^*(z_1, z_2, z_3, z_4) = -z_1^2 + z_2^2 - z_3^2 + z_4^2$,

$x_1 = \frac{1}{2}z_1 + \frac{1}{2}z_2 - \frac{1}{4}z_3 + \frac{1}{4}z_4,\ x_2 = \frac{1}{2}z_1 - \frac{1}{2}z_2,\ x_3 = -z_3 + z_4,\ x_4 = z_3 + z_4$.

10) $f^*(y_1, y_2, y_3, y_4) = y_1^2 - y_4^2$,

$x_1 = y_1 - y_4,\ x_2 = y_2,\ x_3 = y_3,\ x_4 = y_1 + y_4$.

6.4. 1) Taip; 2) taip; 3) ne; 4) taip.

6.5. 1) $x_1 = 2y_1 + 2y_2 + 2y_3,\ x_2 = y_2 - \frac{5}{3}y_3,\ x_3 = \frac{1}{3}y_3$;

2) $x_1 = y_1 + 3y_2 + 4y_3,\ x_2 = 2y_2 + y_3,\ x_3 = y_3$;

3) $x_1 = \frac{1}{2}y_1 + 2y_2 + 9y_3,\ x_2 = y_2 + 8y_3,\ x_3 = y_3$;

4) $x_1 = 2y_1 - y_2 - y_3,\ x_2 = 2y_1 - 3y_3,\ x_3 = 4y_1 - 5y_3$.

6.6. 1) $\lambda > 5$; 2) $\lambda > 2$; 3) $\lambda > 8$; 4) $\lambda \in R \setminus \{0\}$; 5) $\emptyset$; 6) $\lambda < -\frac{3}{2}$.