3. VEKTORINĖS ERDVĖS BAZĖ

Vektorinė erdvė vadinama n-mate, kai joje galima parinkti tiesiškai nepriklausomų n vektorių sistemą, o bet kuri kita sistema, sudaryta iš didesnio tos erdvės vektorių skaičiaus, yra tiesiškai priklausoma.

Vektorinės erdvės baze vadinama tos erdvės tiesiškai nepriklausomų vektorių sistema, kurios vektorių tiesine kombinacija galima išreikšti bet kurį erdvės vektorių.

1 teorema. *Bet kokią n-matės vektorinės erdvės tiesiškai nepriklausomų vektorių sistemą galima papildyti iki tos erdvės bazės.*

2 teorema. *Jei $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ yra vektorinės erdvės bazė, tai vektorių sistemos*

$$\begin{aligned} &\gamma_1 = c_{11}\alpha_1 + c_{12}\alpha_2 + \ldots + c_{1n}\alpha_n, \\ &\gamma_2 = c_{21}\alpha_1 + c_{22}\alpha_2 + \ldots + c_{2n}\alpha_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\gamma_m = c_{m1}\alpha_1 + c_{m2}\alpha_2 + \ldots + c_{mn}\alpha_n, \end{aligned}$$

rangas lygus tų vektorių koordinačių matricos

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix}$$

rangui.

Išvada. *n-matės vektorinės erdvės n vektorių sistema yra tiesiškai priklausoma tada ir tik tada, kai tų vektorių koordinačių matricos determinantas lygus nuliui.*

Sakykime, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ ir $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ yra dvi vektorinės erdvės bazės. Išreiškiame vienos bazės vektorius kitos bazės vektorių tiesine kombinacija:

$$\beta_i = t_{i1}\alpha_1 + t_{i2}\alpha_2 + \ldots + t_{in}\alpha_n \qquad (i = \overline{1, n}\,).$$

Iš šių lygybių koeficientų sudaryta matrica $T = (t_{ij})$ vadinama *bazės $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ keitimo baze $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ matrica.*

3 teorema. *n-matės vektorinės erdvės bet kurio vektoriaus koordinačių eilutė senojoje bazėje lygi to vektoriaus koordinačių eilutės naujojoje bazėje ir bazės keitimo matricos sandaugai.*

Išvada. *Vektoriaus koordinačių eilutė naujojoje bazėje lygi to vektoriaus koordinačių eilutei senojoje bazėje, padaugintai iš bazės keitimo matricai atvirkštinės matricos.*

PAVYZDŽIAI

1. Patikrinsime, ar vektoriai $\alpha_1 = (1, -1, 3)$, $\alpha_2 = (2, 3, -5)$, $\alpha_3 = (4, 1, 1)$ sudaro aritmetinės erdvės bazę.

Sudarome ir apskaičiuojame vektorių koordinačių determinantą:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & -5 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix}^{-2\;\;-4} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & -11 \\ 0 & 5 & -11 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & -11 \\ 5 & -11 \end{vmatrix} = 0.$$

Vadinasi, nurodytoji vektorių sistema bazės nesudaro.

2. Rasime vektoriaus $\alpha = (3, -6, 9, -3)$ koordinates aritmetinės erdvės R^4 bazėje $\varepsilon_1 = (1, -1, 2, -1)$, $\varepsilon_2 = (1, 2, 4, -1)$, $\varepsilon_3 = (2, 1, 3, 2)$, $\varepsilon_4 = (2, -2, 3, 1)$.

Sudarome lygtį

$$x_1\varepsilon_1 + x_2\varepsilon_2 + x_3\varepsilon_3 + x_4\varepsilon_4 = \alpha.$$

Įrašę į šią lygtį vektorių ε_1, ε_2, ε_3, ε_4, α koordinates, gauname

$$x_1(1, -1, 2, -1) + x_2(1, 2, 4, -1) + x_3(2, 1, 3, 2) + x_4(2, -2, 3, 1) = (3, -6, 9, -3).$$

Kairiojoje lygties pusėje atliekame veiksmus su vektoriais:

$$\begin{aligned} &(x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4, -x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4, 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4, \\ &-x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4) = (3, -6, 9, -3). \end{aligned}$$

Iš čia gauname keturių tiesinių lygčių su keturiais nežinomaisiais sistemą

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 3, \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = -6, \\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 9, \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = -3. \end{cases}$$

Sprendžiame šią sistemą Gauso būdu:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 & -2 & -6 \\ 2 & 4 & 3 & 3 & 9 \\ -1 & -1 & 2 & 1 & -3 \end{array}\right)^{+\;\;-2\;\;+} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 3 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & 0 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ :3 \\ \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & 0 \end{array}\right)^{-2} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & 0 \end{array}\right)_{3} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & -5 & 0 & 15 \end{array}\right) \sim \begin{cases} x_1 = -1, \\ x_2 = 2, \\ x_3 = -3, \\ x_4 = 4. \end{cases}$$

Taigi vektoriaus α koordinačių eilutė bazėje $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ yra $[-1, 2, -3, 4]$.

3. Rasime vektorių sistemos rangą:

$\alpha_1 = (1, -1, 2, 3), \qquad \alpha_2 = (2, 1, 3, 4),$

$\alpha_3 = (-3, 2, -1, -1), \quad \alpha_4 = (-1, 2, 2, -2).$

Sudarome sistemos vektorių koordinačių matricą ir apskaičiuojame jos rangą:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ -3 & 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} {\scriptstyle -2\;\; 3\;\; +} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 5 & 8 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 5 & 8 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & 5 & 8 \\ 0 & 3 & -1 & -2 \end{pmatrix} {\scriptstyle +\;\; -3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 9 & 9 \\ 0 & 0 & -13 & -5 \end{pmatrix} {\scriptstyle :9} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -13 & -5 \end{pmatrix} {\scriptstyle 13} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} {\scriptstyle :8} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vadinasi, matricos, o tuo pačiu ir nurodytosios vektorių sistemos rangas $r = 4$.

4. Rasime aritmetinės erdvės R^3 bazės $\varepsilon_1 = (2, 4, 1)$, $\varepsilon_2 = (-1, 1, 3)$, $\varepsilon_3 = (2, -1, 2)$ keitimo baze $\varepsilon_1' = (3, 3, -2)$, $\varepsilon_2' = (5, 8, 7)$, $\varepsilon_3' = (-1, -3, 12)$ matricą T.

Antrajame pavyzdyje nurodytu būdu surandame vektorių ε_1', ε_2', ε_3' koordinates bazėje $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$. Visų trijų lygčių sistemų sprendimą galime sujungti į vieną, nes nežinomųjų koeficientai yra tie patys, o skiriasi tik laisvieji nariai:

$$\left(\begin{array}{ccc|c|c|c} 2 & -1 & 2 & 3 & 5 & -1 \\ 4 & 1 & -1 & 3 & 8 & -3 \\ 1 & 3 & 2 & -2 & 7 & 12 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c|c|c} 1 & 3 & 2 & -2 & 7 & 12 \\ 4 & 1 & -1 & 3 & 8 & -3 \\ 2 & -1 & 2 & 3 & 5 & -1 \end{array}\right) {\scriptstyle -4\;\; -2} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c|c|c} 1 & 3 & 2 & -2 & 7 & 12 \\ 0 & -11 & -9 & 11 & -20 & -51 \\ 0 & -7 & -2 & 7 & -9 & -25 \end{array}\right) {\scriptstyle -5} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c|c|c} 1 & 3 & 2 & -2 & 7 & 12 \\ 0 & 24 & 1 & -24 & 25 & 74 \\ 0 & -7 & -2 & 7 & -9 & -25 \end{array}\right) {\scriptstyle 2} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c|c|c} 1 & 3 & 2 & -2 & 7 & 12 \\ 0 & 24 & 1 & -24 & 25 & 74 \\ 0 & 41 & 0 & -41 & 41 & 123 \end{array}\right).$$

Dabar galime užrašyti vektorių ε_1', ε_2', ε_3' koordinačių eilutes: $[1,-1,0]$, $[2,1,1]$, $[-1,3,2]$. Vadinasi, bazės keitimo matrica yra

$$T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

UŽDAVINIAI

3.1. Kuri iš nurodytųjų vektorių sistemų sudaro aritmetinės erdvės R^4 bazę:

1) $\alpha_1 = (1,-1,2,1)$,
$\alpha_2 = (2,3,1,4)$,
$\alpha_3 = (5,-1,-1,2)$,
$\alpha_4 = (3,2,2,1)$;

2) $\alpha_1 = (2,0,1,3)$,
$\alpha_2 = (3,-1,1,2)$,
$\alpha_3 = (1,-1,3,-2)$,
$\alpha_4 = (2,-2,3,-3)$;

3) $\alpha_1 = (1,2,1,3)$,
$\alpha_2 = (1,-1,3,1)$,
$\alpha_3 = (3,-2,2,1)$,
$\alpha_4 = (-1,3,2,3)$;

4) $\alpha_1 = (3,1,0,1)$,
$\alpha_2 = (-1,2,1,3)$,
$\alpha_3 = (-2,1,-2,3)$,
$\alpha_4 = (3,-2,2,1)$?

3.2. Kuri iš nurodytųjų vektorių sistemų sudaro antros eilės matricų su realiaisiais koeficientais erdvės $R_{2\times 2}$ bazę:

1) $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $\quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$,

$A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$, $\quad A_4 = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$;

2) $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $\quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$,

$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\quad A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$;

3) $A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $\quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,

$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\quad A_4 = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$;

4) $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\quad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$,

$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\quad A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$?

3.3. Įrodykite, kad aritmetinės erdvės R^4 vektoriai $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ sudaro bazę ir raskite vektoriaus α koordinates toje bazėje:

1) $\varepsilon_1 = (3, 5, 1, 2)$,
$\varepsilon_2 = (-1, 2, 2, 3)$,
$\varepsilon_3 = (2, 1, 3, 4)$,
$\varepsilon_4 = (-2, -3, 1, -5)$,
$\alpha = (-2, 3, 1, -4)$,

2) $\varepsilon_1 = (2, 1, 1, 4)$,
$\varepsilon_2 = (-1, 1, 2, 2)$,
$\varepsilon_3 = (3, -1, 5, -1)$,
$\varepsilon_4 = (2, 1, -3, 1)$,
$\alpha = (7, -2, 6, 2)$;

3) $\varepsilon_1 = (1, 0, 3, 1)$,
$\varepsilon_2 = (-2, 1, -1, 2)$,
$\varepsilon_3 = (2, 2, 1, 3)$,
$\varepsilon_4 = (-1, -2, 1, -2)$,
$\alpha = (-2, -2, 1, -3)$,

4) $\varepsilon_1 = (4, 1, -2, 3)$,
$\varepsilon_2 = (-1, 2, -2, 4)$,
$\varepsilon_3 = (5, 1, -1, 3)$,
$\varepsilon_4 = (-2, -1, 3, -2)$,
$\alpha = (-8, 2, -1, 5)$;

5) $\varepsilon_1 = (1, 1, 2, 7)$,
$\varepsilon_2 = (2, 1, -1, 5)$,
$\varepsilon_3 = (-3, 1, 4, -12)$,
$\varepsilon_4 = (-1, 3, -2, -5)$,
$\alpha = (-5, 10, -5, -9)$,

6) $\varepsilon_1 = (2, 5, -3, 7)$,
$\varepsilon_2 = (-1, -3, 4, -3)$,
$\varepsilon_3 = (1, -7, -8, -3)$,
$\varepsilon_4 = (-4, 4, -9, 3)$,
$\alpha = (3, -6, 9, 8)$.

3.4. Ne aukštesnio kaip 5-ojo laipsnio polinomų erdvėje $R_5[t]$ raskite polinomo $f(t) = t^5 - 2t^4 + t^3 + 2t^2 - t - 1$ koordinates bazėse:

1) $1, t, t^2, t^3, t^4, t^5$;

2) $1 + t^2, t + t^2, t^2, t^3 + t^2, t^4 + t^2, t^5 + t^2$;

3) $2, 2 + t, 2 + t^2, 2 + t^3, 2 + t^4, 2 + t^5$;

4) $1 + t + t^2, 2t + t^2, t + 2t^2, t + t^2 + t^3, t + t^2 + t^4, t + t^2 + t^5$.

3.5. Raskite aritmetinės erdvės R^n vektorių sistemos $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ rangą:

1) $\alpha_1 = (1, -1, 2, 1)$,
$\alpha_2 = (3, 1, -1, 2)$,
$\alpha_3 = (1, 3, -5, 0)$;

2) $\alpha_1 = (2, 1, 1, -1)$,
$\alpha_2 = (2, 2, 3, 4)$,
$\alpha_3 = (-1, -2, -1, -3)$,
$\alpha_4 = (-1, -1, 1, 2)$;

3) $\alpha_1 = (1, -1, 2, 1, 3)$,
$\alpha_2 = (-1, 1, 2, 4, 1)$,
$\alpha_3 = (-2, 3, 1, 3, 1)$,
$\alpha_4 = (4, 5, 1, 7, 2)$,
$\alpha_5 = (-6, -2, 0, -4, -1)$;

4) $\alpha_1 = (1, 2, -1, 2, 3)$,
$\alpha_2 = (4, 3, 1, 1, 4)$,
$\alpha_3 = (8, 6, 2, 2, 8)$,
$\alpha_4 = (3, 1, 2, -1, 1)$,
$\alpha_5 = (5, 5, 0, 3, 7)$;

5) $\alpha_1 = (1, 2, 1, -3)$,
$\alpha_2 = (-1, 11, -7, 6)$,
$\alpha_3 = (-2, 5, -3, 1)$,
$\alpha_4 = (-1, 16, -3, -7)$,
$\alpha_5 = (3, 1, -1, 4)$;

6) $\alpha_1 = (-2, -2, -3, 4)$,
$\alpha_2 = (1, -1, 2, 4)$,
$\alpha_3 = (2, 1, -2, 1)$,
$\alpha_4 = (-3, 2, 1, 3)$,
$\alpha_5 = (-1, 1, 4, 1)$.

3.6. Raskite antros eilės matricų su realiaisiais koeficientais erdvės $R_{2\times 2}$ vektorių sistemos rangą:

1) $A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 0 & 13 \end{pmatrix}$;

2) $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$,

$A_3 = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$, $A_4 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$;

3) $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,

$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$;

4) $A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}$,

$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$, $A_4 = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ -17 & 14 \end{pmatrix}$.

3.7. Raskite aritmetinės erdvės R^n bazės $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ keitimo baze $\varepsilon'_1, \varepsilon'_2, \ldots, \varepsilon'_n$ matricą:

1) $\varepsilon_1 = (1, 2, 1)$, $\varepsilon'_1 = (3, -1, -1)$,
$\varepsilon_2 = (-2, 3, 2)$, $\varepsilon'_2 = (0, -1, -4)$,
$\varepsilon_3 = (3, 2, -1)$, $\varepsilon'_3 = (5, 5, -3)$;

2) $\varepsilon_1 = (2, 2, -3)$, $\varepsilon'_1 = (0, 1, 0)$,
$\varepsilon_2 = (1, 1, -2)$, $\varepsilon'_2 = (3, 1, 2)$,
$\varepsilon_3 = (-3, -2, 1)$, $\varepsilon'_3 = (-1, 1, -4)$;

3) $\varepsilon_1 = (1, -1, 0, 2)$, $\varepsilon'_1 = (3, -3, 3, 1)$,
$\varepsilon_2 = (2, 2, 1, 1)$, $\varepsilon'_2 = (7, -2, 11, -3)$,
$\varepsilon_3 = (-3, 4, 1, -5)$, $\varepsilon'_3 = (6, 1, 4, 0)$,
$\varepsilon_4 = (2, -2, 3, -1)$, $\varepsilon'_4 = (2, 4, 12, -12)$;

4) $\varepsilon_1 = (2,1,-1,3)$, $\quad\varepsilon_1' = (-5,1,1,-1)$,
$\varepsilon_2 = (0,2,2,1)$, $\quad\varepsilon_2' = (0,16,16,0)$,
$\varepsilon_3 = (-4,-1,1,-2)$, $\quad\varepsilon_3' = (-5,-3,1,-2)$,
$\varepsilon_4 = (1,4,2,1)$, $\quad\varepsilon_4' = (13,14,4,14)$.

3.8. Žinodami aritmetinės erdvės R^n vektoriaus α koordinates bazėje $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$, apskaičiuokite jo koordinates bazėje $\varepsilon_1', \varepsilon_2\prime, \varepsilon_3'$:

1) $[\alpha] = (1,2,-1)$, $\quad\begin{cases} \varepsilon_1' = 2\varepsilon_1 - \varepsilon_2 + 2\varepsilon_3, \\ \varepsilon_2' = \varepsilon_1 + \varepsilon_3, \\ \varepsilon_3' = \varepsilon_1 - 2\varepsilon_2 + 2\varepsilon_3; \end{cases}$

2) $[\alpha] = (3,2,4)$, $\quad\begin{cases} \varepsilon_1' = \varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 + \varepsilon_3, \\ \varepsilon_2' = \varepsilon_1 + 3\varepsilon_2 + 2\varepsilon_3, \\ \varepsilon_3' = 2\varepsilon_1 + 5\varepsilon_2 + 2\varepsilon_3; \end{cases}$

3) $[\alpha] = (2,-1,0,1)$, $\quad\begin{cases} \varepsilon_1' = 3\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 - \varepsilon_3 - \varepsilon_4, \\ \varepsilon_2' = 2\varepsilon_1 - \varepsilon_2 + 3\varepsilon_3 + 4\varepsilon_4, \\ \varepsilon_3' = 3\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_3 - \varepsilon_4, \\ \varepsilon_4' = 4\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_3 - \varepsilon_4; \end{cases}$

4) $[\alpha] = (1,-1,2,-1)$, $\quad\begin{cases} \varepsilon_1' = 4\varepsilon_1 - \varepsilon_2 + 2\varepsilon_3 + 3\varepsilon_4, \\ \varepsilon_2' = 2\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + 2\varepsilon_4, \\ \varepsilon_3' = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + 2\varepsilon_3 + \varepsilon_4, \\ \varepsilon_4' = 3\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 + 2\varepsilon_3 + 3\varepsilon_4. \end{cases}$

ATSAKYMAI

3.1. 1) Sudaro; 2) ne; 3) ne; 4) sudaro.

3.2. 1) Sudaro; 2) ne; 3) sudaro; 4) sudaro.

3.3. 1) $[1,1,-1,1]$; 2) $[2,-2,1,-1]$; 3) $[2,0,-3,-2]$;
4) $[5,2,-4,3]$; 5) $[2,-3,-1,4]$; 6) $[5,8,1,0]$.

3.4. 1) $[-1,-1,2,1,-2,1]$; 2) $[-1,-1,4,1,-2,1]$;
3) $[-\frac{3}{2},-1,2,1,-2,1]$; 4) $[-1,-1,2,1,-2,1]$.

3.5. 1) $r=2$; 2) $r=3$; 3) $r=4$;
4) $r=2$; 5) $r=3$; 6) $r=4$.

3.6. 1) $r=2$; 2) $r=3$; 3) $r=3$; 4) $r=2$.

3.7. 1) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -4 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 5 & -7 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 4 & -3 & 2 \end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ -3 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ -3 & 5 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

3.8. 1) $[\alpha]_1 = (2,-1,-2)$; 2) $[\alpha]_1 = (12,1,-5)$;
3) $[\alpha]_1 = (-3,1,15,-9)$; 4) $[\alpha]_1 = (2,-20,-3,12]$.