2. MATRICOS RANGAS

Matricos rangu vadinamas jos eilučių sistemos rangas.

1 teorema. *Matricos rangas lygus jos nelygių nuliui minorų aukščiausiai eilei.*

Matricos rango skaičiavimo t a i s y k l ė: rangą skaičiuojame, nuosekliai didindami minoro eilę. Radę nelygų nuliui r-osios eilės minorą M, tikriname tik $r+1$-osios eilės minorus, aprėpiančius minorą M. Jei jie visi lygūs nuliui, tai matricos rangas lygus r.

Matricos eilučių ir stulpelių elementariuosius pertvarkius vadiname tos matricos *elementariaisiais pertvarkiais.*

2 teorema. *Atlikus matricos elementarųjį pertvarkį, gaunama to paties rango matrica.*

Diagonalinės matricos rangas yra lygus jos įstrižainės nelygių nuliui elementų skaičiui.

3 teorema. *Iš bet kurios matricos elementariaisiais pertvarkiais galima gauti diagonalinę matricą.*

Matrica, gauta iš vienetinės matricos, atlikus vieną elementarųjį pertvarkį, vadinama *elementariąja matrica.*

4 teorema. *Norint atlikti matricos eilučių (stulpelių) elementarųjį pertvarkį, pakanka tą matricą padauginti iš kairės (dešinės) iš matricos, gautos pritaikius tą elementarųjį pertvarkį vienetinei matricai.*

PAVYZDŽIAI

1. Apskaičiuosime matricos A rangą aprėpiančiųjų minorų būdu:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & -4 & -1 \\ 1 & -2 & 2 & 8 \end{pmatrix}.$$

Matricos A nelygus nuliui 1-osios eilės minoras yra, pavyzdžiui, $M_1 = 1$, o jį aprėpiantis nenulinis 2-osios eilės minoras yra, pavyzdžiui,

$$M_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -1.$$

Skaičiuojame minorą M_2 aprėpiančius minorus:

$$M_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -4 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} \overset{2}{\downarrow} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0;$$

$$M_3' = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & -1 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = 0.$$

Iš rango skaičiavimo taisyklės išplaukia $r(A) = 2$.

2. Apskaičiuosime matricos A rangą elementariųjų pertvarkių būdu:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 3 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Elementariaisiais pertvarkiais matricą A keičiame diagonaline matrica:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 3 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & -9 & 3 & -2 & -7 \\ 0 & 6 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & -11 & 7 & -5 & -6 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & 3 & -2 & -7 \\ 0 & 6 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & -11 & 7 & -5 & -6 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & -9 & -7 \\ 0 & 1 & 2 & 6 & 5 \\ 0 & -5 & 7 & -11 & -6 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 6 & 5 \\ 0 & -2 & 3 & -9 & -7 \\ 0 & -5 & 7 & -11 & -6 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 7 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 17 & 19 & 19 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 17 & 19 & 19 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -21 & 19 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -21 & 82 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 82 & 0 \end{pmatrix}.$$

Taigi $r(A) = 4$.

3. Rasime matricas P ir Q, tenkinančias lygybę $PAQ = D$ (D – diagonalinė matrica), kai

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & -2 & 3 \\ -2 & 3 & -3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Pirmiausia elementariųjų pertvarkių būdu matricą A keičiame diagonaline matrica, pažymėdami visus atliekamus veiksmus:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & -2 & 3 \\ -2 & 3 & -3 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & 7 & -3 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & 7 & -3 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 7 & -3 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 7 & -3 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 0 & -5 & -22 \\ 0 & 0 & -15 & -66 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & -22 \\ 0 & 0 & -15 & -66 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & -22 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = D.$$

Pažymėsime simboliu $P\big((i) + a(j)\big)$ matricą, gautą iš vienetinės matricos, pridėjus prie jos i-osios eilutės j-ąją eilutę, padaugintą iš skaičiaus a, o $Q\big((i) + a(j)\big)$ – matricą, gautą analogišku stulpelių pertvarkiu.

Surašome visus eilučių ir stulpelių elementariuosius pertvarkius:

$$P_1 = P\big((2) - 2(1)\big), \quad P_2 = P\big((3) + 2(1)\big), \quad P_3 = \big((4) + 2(1)\big),$$
$$P_4 = P\big((3) + (2)\big), \quad P_5 = P\big((2) + (3)\big), \quad P_6 = P\big((3) - 3(2)\big),$$
$$P_7 = P\big((4) - 7(2)\big), \quad P_8 = P\big((4) - 3(3)\big);$$
$$Q_1 = Q\big((2) - 2(1)\big), \quad Q_2 = Q\big((3) - (1)\big), \quad Q_3 = Q\big((4) + (1)\big),$$
$$Q_4 = Q\big((3) - 2(2)\big), \quad Q_5 = \big((4) - 9(2)\big), \quad Q_6 = Q\big((4) - \tfrac{22}{5}(3)\big).$$

Užrašome matricas P ir Q, tenkinančias lygybę $PAQ = D$:

$$P = P_8P_7P_6P_5P_4P_3P_2P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 1 & 0 \\ 6 & -5 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$Q = Q_1Q_2Q_3Q_4Q_5Q_6 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & \frac{29}{5} \\ 0 & 1 & -2 & -\frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{22}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Apskaičiavę PAQ, įsitikiname, kad $PAQ = D$.

UŽDAVINIAI

2.1. Apskaičiuokite matricos A rangą aprėpiančiųjų minorų būdu:

1) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \\ 4 & -1 & -5 \end{pmatrix}$; 2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$;

3) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \\ 5 & -2 & 3 & 11 \end{pmatrix}$; 4) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

2.2. Apskaičiuokite matricos A rangą elementariųjų pertvarkių būdu:

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -5 & 4 \end{pmatrix}$; 2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 1 & -4 \end{pmatrix}$;

3) $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 6 & 7 \end{pmatrix}$; 4) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ -5 & 1 & 3 & 4 & 7 \end{pmatrix}$;

5) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$; 6) $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$;

7) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 & 5 \\ -1 & -2 & 1 & 3 & -2 \\ 7 & 8 & 3 & -11 & 16 \\ 4 & 5 & 1 & -7 & 9 \\ -1 & 1 & -4 & -2 & -3 \end{pmatrix}$;

8) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & -2 & 4 & 5 \\ -1 & 3 & 7 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 3 & 3 \\ 5 & 7 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

2.3. Įrodykite, kad matricų sumos rangas ne didesnis už tų matricų rangų sumą.

2.4. Raskite matricas P ir Q, tenkinančias lygybę $PAQ = D$ (D – diagonalinė matrica), kai:

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$; 2) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$;

3) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & 1 & -2 \\ -1 & 4 & 1 & -1 \\ 5 & -3 & 2 & -4 \end{pmatrix}$; 4) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ -3 & 4 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

ATSAKYMAI

2.1. 1) $r = 2$; 2) $r = 3$; 3) $r = 2$; 4) $r = 3$.

2.2. 1) $r = 3$; 2) $r = 2$; 3) $r = 2$; 4) $r = 4$;
5) $r = 3$; 6) $r = 3$; 7) $r = 2$; 8) $r = 5$.

2.4. 1) $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -\frac{7}{5} \\ 0 & 1 & \frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

2) $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \\ 8 & -5 & 1 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -9 \\ 0 & 1 & 14 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

3) $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 0 & -2 \\ -20 & -3 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -13 & -\frac{7}{30} \\ 0 & 1 & -11 & -\frac{1}{30} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{41}{30} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

4) $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -3 & 0 \\ -3 & -3 & 25 & -7 \\ 5 & 6 & -52 & 15 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 6 & -385 \\ 0 & 1 & 4 & -256 \\ 0 & 0 & 1 & -65 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.