10. GRUPIŲ TEORIJOS ELEMENTAI

Multiplikacinės *grupės G kairiuoju (dešiniuoju) sluoksniu* pagal pogrupį H vadinama aibė

$$gH = \{gh \mid h \in H\} \;\; (Hg = \{hg \mid h \in H\}).$$

Grupės G pogrupis H vadinamas jos normaliuoju dalikliu, kai tos grupės kairiųjų sluoksnių pagal pogrupį H aibė sutampa su dešiniųjų sluoksnių pagal tą pogrupį aibe.

Normaliojo daliklio požymiai:

1 teorema. *Multiplikacinės grupės G pogrupis H yra normalusis daliklis tada ir tik tada, kai*

$$gH = Hg \;\; (\forall g \in G).$$

2 teorema. *Multiplikacinės grupės G pogrupis H yra normalusis daliklis tada ir tik tada, kai tam pogrupiui priklauso jo elementams jungtiniai elementai.*

Multiplikacinės *grupės G homomorfrizmu* multiplikacinėjė grupėje G' vadinamas atvaizdis: $\varphi : G \to G'$, kai su kiekviena grupės G elementų pora a, b yra teisinga lygybė

$$\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b).$$

3 teorema (pagrindinė homomorfizmų teorema).

1. *Jei φ yra grupės G homomorfizmas grupėje G', tai to homomorfizmo branduolys* $\operatorname{Ker}\varphi$ *yra grupės G normalusis daliklis ir faktorgrupė $G/_{\operatorname{Ker}\varphi}$ izomorfiška vaizdui* $\operatorname{Im}\varphi$.
2. *Jei H yra grupės G normalusis daliklis, tai egzistuoja surjekcinis homomorfizmas $\varphi : G \to G/_H$, kurio branduolys* $\operatorname{Ker}\varphi$ *sutampa su pogrupiu H.*

Multiplikacinė grupė G vadinama savo pogrupių A ir B *tiesiogine sandauga*, kai:
1) grupė G lygi pogrupių A ir B sandaugai;
2) pogrupiai A ir B yra grupės G normalieji dalikliai;
3) sankirtai $A \cap B$ priklauso tik grupės G vienetinis elementas.

Tiesioginės sandaugos požymis:
4 teorema. *Multiplikacinė grupė G yra savo pogrupių A ir B tiesioginė sandauga tada ir tik tada, kai kiekvieną jos elementą g galima vienareikšmiškai išreikšti sandauga $g = ab$ $(a \in A, b \in B)$ ir $xy = yx$ $\quad (\forall x \in A, \forall y \in B)$.*

Baigtinių Abelio grupių struktūra:
5 teorema. 1) *Kiekvieną baigtinę multiplikacinę Abelio grupę galima išreikšti primariųjų grupių tiesiogine sandauga. Dvi tos grupės išraiškos gali skirtis tik tiesioginių dauginamųjų tvarka*;
2) *baigtinė primarioji Abelio grupė yra jos primariųjų ciklinių pogrupių tiesioginė sandauga*;

3) *jei baigtinę primariąją Abelio grupę galima dvejopai išreikšti primariųjų ciklinių pogrupių tiesiogine sandauga, tai tiesioginių dauginamųjų skaičius kiekvienoje išraiškoje yra tas pats, o dauginamuosius galima taip sutvarkyti, kad pirmosios išraiškos bet kurio dauginamojo eilė būtų lygi antrosios išraiškos atitinkamo dauginamojo eilei.*

Sakome, kad multiplikacinė grupė G veikia aibę A, kai yra apibrėžtas atvaizdis $G \times A \to A \quad \big((g,a) \to ga\big)$, turintis savybes:
1) $ea = a \quad (\forall a \in A)$;
2) $(gh)a = g(ha) \quad (\forall g, h \in G, \forall a \in A)$.
Aibė $Ga = \{ga \,|\, g \in G\}$ yra vadinama G-orbita, o aibė $St(a) = \{g \in G \,|\, ga = a\}$ – elemento a stabilizatoriumi.
Išraiška $[x, y] = xyx^{-1}y^{-1}$ yra vadinama grupės G elementų x ir y *komutatoriumi.*
Grupės G *komutantu* vadinamas pogrupis $[G, G]$, generuotas visų tos grupės komutatorių.

6 teorema. *Grupės G pogrupis H, kuriam priklauso komutantas $[G, G]$, yra tos grupės normalusis daliklis. Be to, faktorgrupė $G/[G, G]$ komutatyvi ir komutantas $[G, G]$ yra poaibis bet kurio normaliojo daliklio H, su kuriuo faktorgrupė G/H komutatyvi.*
Grupė G vadinama *išsprendžiamąja grupe*, kai komutantų seka

$$G \supsetneq [G, G] = G^{(1)} \supsetneq [G^{(1)}, G^{(1)}] = G^{(2)} \supsetneq \ldots \supsetneq [G^{(m-1)}, G^{(m-1)}] = G^{(m)} \supsetneq \ldots$$

yra baigtinė.

PAVYZDŽIAI

1. Įrodysime, kad specialioji tiesinė grupė

$$SL(2, Q) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \,|\, ad - bc = 1, a, b, c, d \in Q \right\}$$

yra tiesinės grupės

$$GL(2, Q) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \,|\, ad - bc \neq 0, a, b, c, d \in Q \right\}$$

normalusis daliklis ir sudarysime grupės $GL(2, Q)$ faktorgrupę pagal pogrupį $SL(2, Q)$.

Parodysime, kad su kiekvienu pogrupio $SL(2, Q)$ elementu

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

visi jo jungtiniai $TAT^{-1} \in SL(2, Q)$ (čia $T = \begin{pmatrix} x & y \\ u & v \end{pmatrix}$ - bet kuris grupės $GL(2, Q)$ elementas). Iš tikrųjų, matricos TAT^{-1} elementai yra racionalieji skaičiai ir jos determinantas $|TAT^{-1}| = |T||A||T^{-1}| = |T||T^{-1}| = 1$. Todėl iš normaliojo daliklio požymio išplaukia, kad pogrupis $SL(2, Q)$ yra grupės $GL(2, Q)$ normalusis daliklis.

Sudarysime grupės $GL(2,Q)$ faktorgrupę pagal pogrupį $SL(2,Q)$.

Dvi grupės $GL(2,Q)$ matricos T_1 ir T_2 priklauso vienam sluoksniui, kai $T_1^{-1}T_2 \in SL(2,Q)$. Kadangi $|T_1^{-1}T_2| = 1$, išplaukia, kad matricų T_1 ir T_2 determinantai yra lygūs.

Dvi matricos T_1 ir T_2 su lygiais determinantais priklauso vienam sluoksniui, nes $|T_1^{-1}T_2| = 1$. Taigi vienam sluoksniui ir tik jam priklauso matricos su lygiais determinantais. Todėl

$$GL(2,Q)/_{SL(2,Q)} = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} SL(2,Q) \mid a \in Q^* \right\}.$$

2. Įrodysime, kad faktorgrupė $GL(2,Q)/_{SL(2,Q)}$ yra izomorfoška multiplikacinei racionaliųjų skaičių grupei Q^*, pasinaudoję pagrindine grupių homomorfizmų teorema.

Apibrėžiame grupės $GL(2,Q)$ atvaizdį grupėje Q^* tokiu būdu:

$$\varphi(T) = |T| \quad \big(\forall T \in GL(2,Q)\big).$$

Šis atvaizdis yra surjekcinis homomorfizmas. Iš tikrųjų:

1) $\varphi(T_1T_2) = |T_1T_2| = |T_1||T_2| = \varphi(T_1)\varphi(T_2)$ $\big(\forall T_1, T_2 \in GL(2,Q)\big)$;

2) su kiekvienu $a \in Q^*$ jo pirmvaizdis yra, pavyzdžiui, matrica $T = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, nes $\varphi(T) = |T| = a$.

Iš pagrindinės homomorfizmų teoremos išplaukia, kad faktorgrupė $GL(2,Q)/_{\operatorname{Ker}\varphi}$ yra izomorfiška Q^*. Įrodysime, kad branduolys $\operatorname{Ker}\varphi$ sutampa su pogrupiu $SL(2,Q)$.

Tarkime, $T \in \operatorname{Ker}\varphi$. Iš branduolio apibrėžimo išplaukia lygybė $\varphi(T) = 1$. Bet $\varphi(T) = |T|$. Vadinasi, $|T| = 1$ ir $T \in SL(2,Q)$.

Tarkime, $T \in SL(2,Q)$. Tada $|T| = 1$, ir iš čia išplaukia $\varphi(T) = |T| = 1$. Vadinasi, $T \in \operatorname{Ker}\varphi$.

Taigi $\operatorname{Ker}\varphi = SL(2,Q)$ ir faktorgrupė $GL(2,Q)/_{SL(2,Q)}$ yra izomorfiška racionaliųjų skaičių multiplikacinei grupei Q^*.

3. Išreikšime 3150-osios eilės adicinę ciklinę grupę $< a >$ jos ciklinių pogrupių tiesiogine suma.

Užrašome skaičiaus 3150 kanoninį skaidinį – $3150 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7$. Pažymėję simboliu A_p p-primariąją grupę, iš struktūrinės baigtinių Abelio grupių teoremos turime $< a >= A_2 \oplus A_3 \oplus A_5 \oplus A_7$. Kadangi ciklinės grupės pogrupiai yra cikliniai, p-primariosios grupės A_p yra ciklinės. Vadinasi, jos yra neskaidžios.

Pogrupį A_2 generuoja 2-osios eilės elementas $1575a$, A_3 – 9-osios eilės elementas $350a$, A_5 – 25-osios eilės elementas $126a$, A_7 – 7-osios eilės elementas $450a$. Taigi

$$< a >=< 1575a > \oplus < 350a > \oplus < 126a > \oplus < 450a > .$$

4. Užrašysime visas neizomorfiškas 675-osios eilės Abelio grupes.

Kadangi $675 = 3^3 \cdot 5^2$, nurodytosios eilės Abelio grupę išreiškiame p-primariųjų grupių tiesiogine suma $A = A_3 \oplus A_5$.

Taikydami struktūrinės Abelio grupių teoremos 3)-iąją dalį, užrašome visas neizomorfiškas 27-osios eilės 3-primariąsias grupes A_3 bei 25-osios eilės 5-primariąsias grupes A_5:

$$Z_{27},\ Z_9 \oplus Z_3,\ Z_3 \oplus Z_3 \oplus Z_3;$$
$$Z_{25},\ Z_5 \oplus Z_5.$$

(čia Z_n yra n-osios eilės neskaidi ciklinė grupė).

Vadinasi, visos galimos 675-osios eilės neizomorfiškos Abelio grupės yra

$$Z_{27} \oplus Z_{25},\ Z_{27} \oplus Z_5 \oplus Z_5,\ Z_9 \oplus Z_3 \oplus Z_{25},\ Z_9 \oplus Z_3 \oplus Z_5 \oplus Z_5,$$
$$Z_3 \oplus Z_3 \oplus Z_3 \oplus Z_{25},\ Z_3 \oplus Z_3 \oplus Z_3 \oplus Z_5 \oplus Z_5.$$

UŽDAVINIAI

10.1. Įrodykite, kad begalinė ciklinė grupė izomorfiška sveikųjų skaičių adicinei grupei.

10.2. Tarkime, φ yra grupių G ir G' izomorfizmas ir $\varphi(g) = g'$. Įrodykite, kad g ir g' yra tos pačios eilės elementai.

10.3. Raskite visas neizomorfiškas antrosios ir trečiosios eilės grupes.

10.4. Pateikite dviejų neizomorfiškų tos pačios eilės grupių pavyzdžius.

10.5. Įrodykite, kad realiųjų skaičių adicinė grupė izomorfiška teigiamų realiųjų skaičių multiplikacinei grupei.

10.6. Įrodykite, kad ciklinių grupių Z_m ir Z_n tiesioginė sandauga izomorfiška grupei Z_{mn} tada ir tik tada, kai skaičiai m ir n yra tarpusavy pirminiai.

10.7. Tarkime, natūralusis skaičius m yra natūraliojo skaičiaus n daliklis. Pateikite pavyzdį n-osios eilės grupės, turinčios pogrupį, izomorfišką nurodytai m-osios eilės grupei.

10.8. Raskite visas neizomorfiškas ketvirtosios, šeštosios, aštuntosios eilių grupes.

10.9. Įrodykite, kad indekso 2 pogrupis yra normalusis daliklis toje grupėje.

10.10. Įrodykite, kad grupės normaliųjų daliklių sankirta yra normalusis daliklis.

10.11. Aibė $Z(G)$ grupės G elementų, komutuojančių su visais tos grupės elementais, vadinama grupės centru. Įrodykite, kad centras yra tos grupės normalusis daliklis.

10.12. Tarkime, pogrupis H_i yra grupės G_i normalusis daliklis ($i = 1, 2$). Įrodykite, kad pogrupis $H_1 \times H_2$ yra grupės $G_1 \times G_2$ normalusis daliklis.

10.13. Raskite visus grupės $Z_2 \times Z_2$ normaliuosius daliklius.

10.14. Įrodykite, kad grupės komutantas yra normalusis daliklis.

10.15. Įrodykite, kad grupės G komutantas yra vienetinis pogrupis tada ir tik tada, kai grupė G komutatyvi.

10.16. Įrodykite, kad grupės G faktorgrupė pagal komutantą yra komutatyvi.

10.17. Raskite visus simetrinių grupių S_3 ir S_4 normaliuosius daliklius.

10.18. Jei dviejų grupės G kairiųjų sluoksnių pagal pogrupį H sandauga yra kairysis sluoksnis, tai pogrupis H yra grupės G normalusis daliklis. Įrodykite.

10.19. Įrodykite, kad kompleksinių skaičių multiplikacinė grupė yra izomorfiška neišsigimusių realiųjų matricų $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ multiplikacinei grupei.

10.20. Įrodykite, kad racionaliųjų skaičių adicinė grupė neturi tikrinių baigtinio indekso pogrupių.

10.21. Įrodykite, kad baigtinio skaičiaus baigtinio indekso pogrupių sankirta yra baigtinio indekso pogrupis.

10.22. Jei A ir B yra multiplikacinės grupės G normalieji dalikliai, tai AB yra taip pat tos grupės normalusis daliklis. Įrodykite.

10.23. Jei A yra grupės B normalusis daliklis, o B yra grupės C normalusis daliklis, tai ar būtinai A yra grupės C normalusis daliklis?

10.24. Įrodykite, kad jungtinių elementų eilės sutampa.

10.25. Jei H yra multiplikacinės grupės G baigtinio indekso pogrupis, tai sankirta $A = \bigcap\limits_{g \in G} gHg^{-1}$ yra baigtinio indekso normalusis daliklis. Įrodykite.

10.26. Aibė $C_H(A) = \{g \in H \mid aga^{-1} = g \ \forall a \in A\}$ vadinama aibės A centralizatoriumi multiplikacinės grupės G pogrupyje H. Įrodykite, kad normaliojo daliklio centralizatorius yra normalusis daliklis pogrupyje H.

10.27. Įrodykite, kad baigtinio normaliojo daliklio H centralizatorius grupėje G yra baigtinio indekso pogrupis toje grupėje.

10.28. Įrodykite, kad multiplikacinės grupės G pogrupių A ir B sandauga AB yra tos grupės pogrupis tada ir tik tada, kai $AB = BA$.

10.29. Įrodykite, kad simetrinė grupė S_3 yra izomorfiška savo vidinių automorfizmų grupei.

10.30. Jei H yra multiplikacinės kompleksinių skaičių grupės C^* pogrupis, sudarytas iš skaičių, kurių modulis lygus 1, tai faktorgrupė C^*/H yra izomorfiška teigiamų realiųjų skaičių multiplikacinei grupei. Įrodykite.

10.31. Nurodykite pavyzdį dviejų neizomorfiškų grupių, turinčių izomorfiškus nornaliuosius daliklius ir izomorfiškas faktorgrupes pagal tuos normaliuosius daliklius.

10.32. Nurodykite pavyzdį grupės, turinčios izomorfiškus normaliuosius daliklius ir neizomorfiškas faktorgrupes pagal tuos normaliuosius daliklius.

10.33. Nurodykite pavyzdį grupės, turinčios neizomorfiškus normaliuosius daliklius ir izomorfiškas faktorgrupes pagal tuos normaliuosius daliklius.

10.34. Įrodykite, kad simetrinės grupės S_3 ir S_4 yra išsprendžiamos.

10.35. Jei grupė G nekomutatyvi ir neturi tikrinių normaliųjų pogrupių, tai G – neišsprendžiamoji grupė. Įrodykite.

10.36. Įrodykite, kad išsprendžiamosios grupės pogrupis yra išsprendžiamas.

10.37. Tarkime, φ yra grupės G surjekcinis homomorfizmas grupėje G'. Jei grupė G išsprendžiama, tai ir jos homomorfinis vaizdas yra išsprendžiama grupė. Įrodykite.

10.38. Nurodykite pavyzdį neišsprendžiamosios grupės, kurios homomorfinis vaizdas yra išsprendžiamoji grupė.

10.39. Jei H yra išsprendžiamosios grupės normalusis daliklis, tai faktorgrupė $G/_H$ yra išsprendžiama. Įrodykite.

10.40. Jei grupės H ir $G/_H$ yra išsprendžiamos, tai ir grupė G yra išsprendžiama. Įrodykite.

10.41. Išsprendžiamų grupių A ir B Dekarto sandauga $A \times B$ yra išsprendžiama grupė. Įrodykite.

10.42. Įrodykite, kad kompleksinių skaičių adicinė grupė C yra tiesioginė suma realiųjų skaičių pogrupio R ir grynai menamųjų skaičių pogrupio iR.

10.43. Įrodykite, kad racionaliųjų skaičių adicinė grupė Q negali būti užrašyta tikrinių pogrupių tiesiogine suma.

10.44. Įrodykite, kad sveikųjų skaičių adicinė grupė Z negali būti užrašyta tikrinių pogrupių tiesiogine suma.

10.45. Įrodykite, kad grupių A ir B tiesioginės sandaugos centras $Z(A \otimes B)$ yra lygus tų grupių centrų tiesioginei sandaugai $Z(A) \otimes Z(B)$.

10.46. n-osios eilės ciklinę adicinę grupę $< a >$ užrašykite jos ciklinių pogrupių tiesiogine suma, kai:
1) $n = 18$; 2) $n = 54$; 3) $n = 64$; 4) $n = 216$.

10.47. Užrašykite visas neizomorfiškas n-osios eilės Abelio grupes, kai
1) $n = 48$; 2) $n = 64$; 3) $n = 1000$; 4) $n = 24500$.

ATSAKYMAI

10.3. $\{Z_2\}$, $\{Z_3\}$.

10.4. Pvz., $\{Z_4\}$, $\{Z_2 \times Z_2\}$.

10.7. Pvz., jei $|H| = m$ ir $n = mk$, tai $G = H \times Z_k$.

10.8. 1) Z_4, $Z_2 \times Z_2$; 2) Z_6 ir trikampio simetrijų grupė;
3) Z_8, $Z_4 \times Z_2$, $Z_2 \times Z_2 \times Z_2$, kvadrato simetrijų grupė, kvaternijonų grupė.

10.13. Jei $Z_2 \times Z_2 = \{e_1, a\} \times \{e_2, b\}$, tai normalieji dalikliai yra šie:
i) $\{(e_1, e_2), (a, e_2)\}$; ii) $\{(e_1, e_2), (e_1, b)\}$; iii) $\{(e_1, e_2), (a, b)\}$.

10.17. 1) $\{(1)\}$, $\{(1), (123), (132)\}$, S_3;
2) $\{(1)\}$, alternatyvioji grupė A_4, $\{(1), (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$, S_4.

10.23. Nebūtinai.

10.31. Pvz., Z_4, $Z_2 \times Z_2$.

10.32. Pvz., $Z_4 \times Z_2$.

10.33. Pvz., $Z_4 \times Z_2$.

10.46. 1) $< 2a > \oplus < 9a >$; 2) $< 2a > \oplus < 27a >$;
3) $< a >$; 4) $< 8a > \oplus < 27a >$.

10.47. 1) $Z_3 \oplus Z_{16}$, $Z_3 \oplus Z_8 \oplus Z_2$, $Z_3 \oplus Z_4 \oplus Z_4$,
$Z_3 \oplus Z_4 \oplus Z_2 \oplus Z_2$, $Z_3 \oplus Z_2 \oplus Z_2 \oplus Z_2 \oplus Z_2$;

2) Z_{64}, $Z_{32} \oplus Z_2$, $Z_{16} \oplus Z_4$, $Z_{16} \oplus Z_2 \oplus Z_2$, $Z_8 \oplus Z_8$, $Z_8 \oplus Z_4 \oplus Z_2$, $Z_8 \oplus Z_2 \oplus Z_2 \oplus Z_2$, $Z_4 \oplus Z_4 \oplus Z_4$, $Z_4 \oplus Z_4 \oplus Z_2 \oplus Z_2$, $Z_4 \oplus Z_2 \oplus Z_2 \oplus Z_2 \oplus Z_2$, $Z_2 \oplus Z_2 \oplus Z_2 \oplus Z_2 \oplus Z_2 \oplus Z_2$;

3) $Z_8 \oplus Z_{125}$, $Z_8 \oplus Z_{25} \oplus Z_5$, $Z_8 \oplus Z_5 \oplus Z_5 \oplus Z_5$, $Z_4 \oplus Z_2 \oplus Z_{125}$, $Z_4 \oplus Z_2 \oplus Z_{25} \oplus Z_5$, $Z_4 \oplus Z_2 \oplus Z_5 \oplus Z_5 \oplus Z_5$, $Z_2 \oplus Z_2 \oplus Z_2 \oplus Z_{125}$, $Z_2 \oplus Z_2 \oplus Z_2 \oplus Z_{25} \oplus Z_5$, $Z_2 \oplus Z_2 \oplus Z_2 \oplus Z_5 \oplus Z_5 \oplus Z_5$;

4) $Z_4 \oplus Z_{125} \oplus Z_{49}$, $Z_4 \oplus Z_{125} \oplus Z_7 \oplus Z_7$, $Z_4 \oplus Z_{25} \oplus Z_5 \oplus Z_{49}$, $Z_4 \oplus Z_{25} \oplus Z_5 \oplus Z_7 \oplus Z_7$, $Z_4 \oplus Z_5 \oplus Z_5 \oplus Z_5 \oplus Z_{49}$, $Z_4 \oplus Z_5 \oplus Z_5 \oplus Z_5 \oplus Z_7 \oplus Z_7$, $Z_2 \oplus Z_2 \oplus Z_{125} \oplus Z_{49}$, $Z_2 \oplus Z_2 \oplus Z_{125} \oplus Z_7 \oplus Z_7$, $Z_2 \oplus Z_2 \oplus Z_{25} \oplus Z_5 \oplus Z_{49}$, $Z_2 \oplus Z_2 \oplus Z_{25} \oplus Z_5 \oplus Z_7 \oplus Z_7$, $Z_2 \oplus Z_2 \oplus Z_5 \oplus Z_5 \oplus Z_5 \oplus Z_{49}$, $Z_2 \oplus Z_2 \oplus Z_5 \oplus Z_5 \oplus Z_5 \oplus Z_7 \oplus Z_7$.