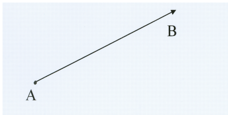
6. Vektoriai

Šiame ir kituose paragrafuose mūsų supratimui apie vektorius bus labiausiai priimtinas geometrinis vektoriaus atitikmuo – atkarpa, turinti kryptį. Geometriškai vektorių išreiškiame jo pradžios ir galo taškais, atkarpa, jungiančia tuos taškus, ir atkarpos gale krypties ženklu, rodančiu vektoriaus kryptį:



Šį vektorių žymėsime $\overrightarrow{AB}$, arba dažniausiai vektorius žymėsime graikiškomis raidėmis, o išskirtinais atvejais ir lotyniškomis (bet tokiu atveju su rodykle virš raidės). Vektoriaus α ilgį žymime $|\alpha|$.

6.1. Apibrėžimai.

1. Vektoriai vadinami *vienakrypčiais*, kai jie yra lygiagrečiose tiesėse arba vienoje tiesėje, ir yra vienodų krypčių.

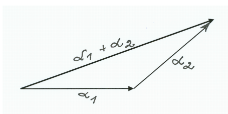
2. Vektoriai vadinami *priešingos krypties*, kai jie yra lygiagrečiose tiesėse arba vienoje tiesėje, ir yra priešingų krypčių.

3. Vektoriai vadinami *lygiais*, kai jie yra vienodo ilgio ir yra vienakrypčiai.

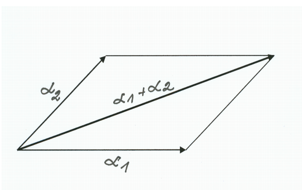
4. Vektorius vadinamas *nuliniu* ir žymimas O, kai jo pradžios ir galo taškai sutampa, o kryptis – neapibrėžta.

Pirmiausia apibrėšime vektorių sudėtį.

6.2. Apibrėžimas. *Vektorių α_1 ir α_2 suma vadinamas vektorius, žymimas $\alpha_1+\alpha_2$, jungiantis pirmojo vektoriaus pradžią su antrojo galu*:



P.S. Kai vektoriai α_1 ir α_2 nėra kolinearūs, sudėdami juos, galime naudoti vadinamąją „lygiagretainio taisyklę“:



– vektorių α_1 ir α_2 suma yra tų vektorių sudaryto lygiagretainio įstrižainė.

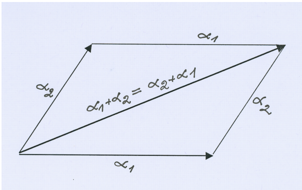
6.3. Vektorių sudėties savybės. Vektoriai sudėties atžvilgiu sudaro adicinę grupę.

Įrodymas.

i) Sudėtis – komutatyvi:

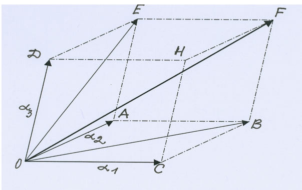
$$\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha_2 + \alpha_1.$$

Įrodymą pailiustruoja brėžinys:



ii) Sudėtis – asociatyvi.

Įrodymą pailiustruosime brėžiniu:



$$(\alpha_1 + \alpha_2) + \alpha_3 = (\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA}) + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OF}.$$

$$\alpha_1 + (\alpha_2 + \alpha_3) = \overrightarrow{OC} = (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD}) = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OF}.$$

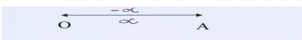
iii) Nulinis elementas – tai nulinis vektorius O:

$$\alpha + O = \alpha.$$

Įrodymas išplaukia iš vektorių sudėties apibrėžimo.

iv) Vektoriui α priešingas vektorius $-\alpha$.

Įrodymas vėlgi išplaukia iš sudėties apibrėžimo:



$\alpha = \overrightarrow{OA}$, $-\alpha = \overrightarrow{AO}$: $\alpha + (-\alpha) = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AO} = O$. $\triangle$

6.4. Apibrėžimas. Vektoriaus daugyba iš skaičiaus. Skaičiaus a ir vektoriaus α sandauga vadiname vektorių, žymimą $a\alpha$, kurio:

1) ilgis $||\alpha||$ lygus skaičiaus a modulio ir vektoriaus α ilgio sandaugai $|a| \cdot ||\alpha||$;

2) kryptis sutampa su vektoriaus α kryptimi, kai $a > 0$; priešinga vektoriaus α krypčiai, kai $a < o$ ir neapibrėžta, kai $a = 0$.

6.5. Vektoriaus daugybos iš skaičiaus savybės.

1) daugyba iš skaičiaus – asociatyvi:

$$(a \cdot b) \cdot \alpha = a(b\alpha).$$

Įrodymas. Pirmiausia įsitikiname, kad abiejų vektorių ilgiai sutampa:

$$||(ab)\alpha|| = |ab|||\alpha|| = |a||b|||\alpha|| = |a|||b\alpha|| = ||a(b\alpha)||.$$

Krypčių lygybei įrodyti tarkime, $a > 0$ ir $b > 0$. Kiti atvejai nagrinėjami analogiškai.

Kadangi $ab > 0$, vektoriaus $(ab)\alpha$ kryptis sutampa su vektoriaus α kryptimi.

Be to, vektorių $b\alpha$ ir $a(b\alpha)$ kryptys taip pat sutampa su vektoriaus α kryptimi, todėl vektorių $(ab)\alpha$ ir $a(b\alpha)$ kryptys sutampa. $\triangle$

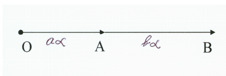
2) Skaičių sudėtis ir skaičiaus daugyba iš vektoriaus – distributyvi:

$$(a + b)\alpha = a\alpha + b\alpha.$$

Įrodymas. Tarkime, bent vienas iš skaičių a, b lygus nuliui, pavyzdžiui, a. Tuomet

$$(a + b)\alpha = (0 + b)\alpha = b\alpha = O + b\alpha = 0 \cdot \alpha + b\alpha = a\alpha + b\alpha.$$

Toliau laikysime, kad nė vienas iš skaičių a ir b nelygus nuliui. Tarkime, $a > 0$ ir $b > 0$. Atidėkime vektorių $b\alpha$ iš vektoriaus $a\alpha$ galo:



Tuomet

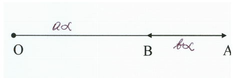
$$\begin{aligned}||(a + b)\alpha|| =& |a + b|||\alpha|| = (a + b)||\alpha|| = a||\alpha|| + b||\alpha|| = \\ =& ||a\alpha|| + ||b\alpha|| = OA + AB = OB = ||a\alpha + b\alpha||.\end{aligned}$$

Vektoriaus $(a + b)\alpha$ kryptis sutampa su vektoriaus α kryptimi. Vektorių $a\alpha$ ir $b\alpha$ kryptys taip pat sutampa su α kryptimi, vadinasi, ir jų sumos $a\alpha + b\alpha$ kryptis sutampa su α kryptimi, o tuo pačiu ir su $(a + b)\alpha$ kryptimi.

Atvejis, kai a ir b yra neigiami skaičiai, nagrinėjamas analogiškai.

Nagrinėkime atvejį, kai $a > 0$, $b < 0$ ir $a + b > 0$.

Vėlgi vektorių $b\alpha$ atidedame iš vektoriaus $a\alpha$ galo:



Įrodysime, kad vektorių $(a+b)\alpha$ ir $a\alpha + b\alpha$ ilgiai sutampa:

$$||(a+b)\alpha|| = |a+b|||\alpha|| = (a+b)||\alpha|| = a||\alpha|| + b||\alpha|| = |a|||\alpha|| - |b|||\alpha|| =$$
$$= ||a\alpha|| - ||b\alpha|| = OA - AB = OB = ||a\alpha + b\alpha||.$$

Vektoriaus $(a+b)\alpha$ kryptis sutampa su vektoriaus $a\alpha$ kryptimi, o vektorių sumos $a\alpha + b\alpha$ kryptis taip pat sutampa su α kryptimi, nes $a + b > 0$. Vadinasi nagrinėjamų vektorių kryptys sutampa ir jie yra lygūs:

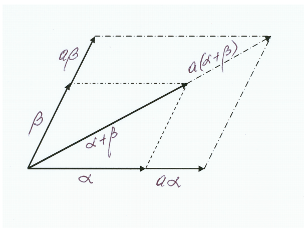
$$(a+b)\alpha = a\alpha + b\alpha.$$

Atvejis, $a > 0$, $b < 0$ ir $a + b < 0$ nagrinėjamas analogiškai. $\triangle$

3) Vektorių sudėtis ir daugyba skaičiaus iš vektoriaus yra distributyvi:

$$a(\alpha + \beta) = a\alpha + a\beta.$$

Tarkime, $a > 0$. Įrodymą iliustruoja brėžinys



6.6. Teorema. Vektorių kolinearumo kriterijus. *Du nenuliniai vektoriai α ir β yra kolinearūs tada ir tik tada, kai vieną jų galima tiesiškai išreikšti kitu: $\alpha = a\beta$.*

Įrodymas. Būtinumas. Tarkime, vektoriai α ir β yra kolinearūs. Pažymėkime jų ilgių santykį raide a: $\frac{||\alpha||}{||\beta||} = a$.

Įrodyme skirsime du atvejus: 1) α ir β yra vienodų krypčių; 2) α ir β – priešingų krypčių.

1) Įrodysime, kad $\alpha = a\beta$. Šių vektorių ilgiai yra lygūs. Iš tikrųjų,

$$||a\beta|| = |a|||\beta|| = a||\beta|| = ||\alpha||$$

(iš skaičiaus a parinkimo).

Kadangi $a > 0$, vektoriai α ir $a\beta$ yra vienodų krypčių. $\triangle$

2) Įrodysime, kad $\alpha = -a\beta$.

Įsitikiname šių vektorių ilgių lygybe:

$$||-a\beta|| = |-a|||\beta|| = a||\beta|| = ||\alpha||.$$

Kadangi $-a < 0$, vektoriai α ir $a\beta$ yra vienodų krypčių. $\triangle$

Pakankamumas. Teiginys išplaukia iš skaičiaus daugybos iš vektoriaus apibrėžimo. $\triangle$

6.7. Pavyzdžiai.

1. Vektorių α ir β sudarytas kampas lygus 60^0, be to, $||\alpha|| = 5$, $||\beta|| = 8$. Paskaičiuokite $||\alpha + \beta||$ ir $||\alpha - \beta||$.

Sprendimas. Turime lygybę

$$\begin{aligned} ||\alpha + \beta||^2 =&(\alpha + \beta) \cdot (\alpha + \beta) = ||\alpha||^2 + 2\alpha\beta + ||\beta||^2 = \\ =&5^2 + 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \cos 60^0 + 8^2 = 129. \end{aligned}$$

Vadinasi, $||\alpha + \beta|| = \sqrt{129}$.

Analogiškai skaičiuojame $||\alpha - \beta||$:

$$\begin{aligned} ||\alpha - \beta||^2 =&(\alpha - \beta) \cdot (\alpha - \beta) = ||\alpha||^2 - 2\alpha\beta + ||\beta||^2 = \\ =&5^2 - 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \cos 60^0 + 8^2 = 49. \end{aligned} \qquad \triangle$$

Taigi, $||\alpha - \beta|| = 7$.

2. Kokiai sąlygai esant vektorius $\alpha + \beta$ dalina pusiau kampą tarp vektorių α ir β?

Sprendimas. Kadangi vektorių α ir β sudaryto lygiagretainio įstrižainė pagal sąlygą turi būti pusiaukampine, lygiagretainis yra rombas. Vadinasi, $||\alpha|| = ||\beta||$. $\triangle$