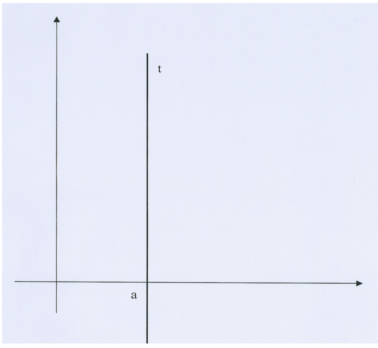
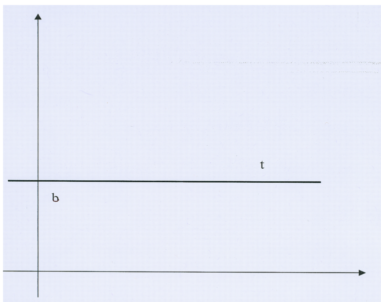
5. Tiesė plokštumoje

Užrašysime tiesės lygčių įvairias formas plokštumos Dekarto koordinačių ortogonalinėje sistemoje.

5.1. Tiesių, lygiagrečių koordinatinėms ašims, lygtys. Tarkime, tiesė t yra lygiagreti y ašiai ir kerta x ašį taške a:



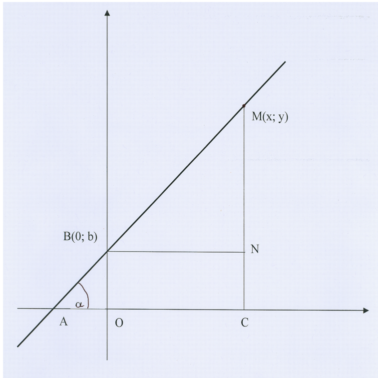
Tada tiesės t lygtis yra $x = a$, nes kiekvieno tiesės taško koordinatės šią lygtį tenkina. Tarkime, tiesė t yra lygiagreti x ašiai ir kerta y ašį taške b:



Tada tiesės t lygtis yra $y = b$. $\triangle$

5.2. Kryptinė tiesės lygtis. Tarkime, tiesė t ašyje atkerta atkarpą $OB = b$ ir su x

ašimi sudaro kampą α:



Pažymėkime M bet kurį fiksuotą tiesės t tašką su koordinatėmis $(x; y)$. Iš brėžinio matyti, kad $OC = BN = x$, $NM = MC - NC = y - b$, $\angle MBN = \alpha$. Vadinasi,

$$\frac{MN}{BN} = \operatorname{tg}\,\alpha = \frac{y-b}{x}.$$

Pažymėję $\operatorname{tg}\,\alpha = m$, gauname lygtį

$$\frac{y-b}{x} = m.$$

Iš čia išplaukia kryptinė tiesės lygtis

$$y = mx + b.$$

Skaičius m vadinamas tiesės t krypties koeficientu. $\triangle$

Matome, kad bet kurios tiesės lygtis yra reiškiama pirmojo laipsnio lygtimi. Įsitikinsime, kad ir kiekviena pirmojo laipsnio lygtis reiškia tiesę. Tarkime, $ax + by + c = 0$ – pirmojo laipsnio lygtis. Kad ši lygtis būtų pirmojo laipsnio, būtina sąlyga, kad bent vienas iš koeficientų prie nežinomųjų būtų nelygus nuliui.

Kai $b \neq 0$, lygtį galima užrašyti pavidalu

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}.$$

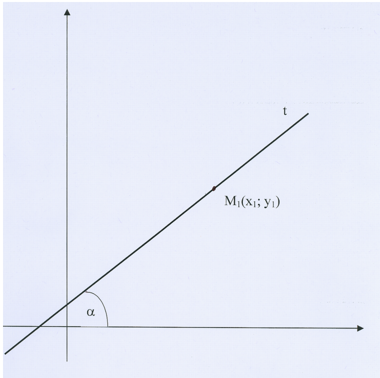
Matėme punkte 5.2, kad tokio tipo lygtis reiškia tiesę – ji kerta y ašį taške $-\frac{c}{b}$ ir jos krypties koeficientas lygus $-\frac{a}{b}$.

Kai $b = 0$, koeficientas a būtinai turi būti nelygus nuliui, ir tada lygtį galima užrašyti pavidalu

$$x = -\frac{c}{a}$$

Iš punkto 5.1 išplaukia, kad tokio tipo lygtis taip pat reiškia tiesę. Vadinasi, bet kuriuo atveju pirmojo laipsnio lygtis reiškia tiesę.

5.3. Tiesės, einančios per duotą tašką duota kryptimi, lygtis.



Tarkime, tiesė t eina per tašką $M(x_1; y_1)$ ir sudaro su x ašimi kampą α. Parašome šiai tiesei kryptinę lygties išraišką:

$$y = mx + b.$$

Čia $m = \operatorname{tg}\alpha$, o b – nežinomas dydis. Kadangi $M_1 \in t$, to taško koordinatės turi tenkinti tiesės lygtį:

$$y_1 = mx_1 + b.$$

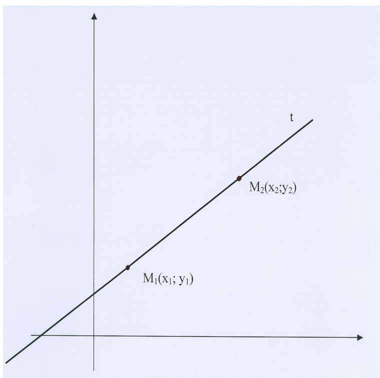
Iš čia galima išreikšti nežinomąjį b ir įstatyti į tiesės lygtį:

$$y = mx + y_1 - mx_1,$$

arba

$$y - y_1 = m(x - x_1). \quad \triangle$$

5.4. Tiesės, einančios per du duotus taškus, lygtis.



Tarkime, tiesė t eina per duotus taškus M_1 ir M_2. Parašykime šios tiesės lygties, einančios per tašką M_1 duota kryptimi, išraišką:

$$y - y_1 = m(x - x_1).$$

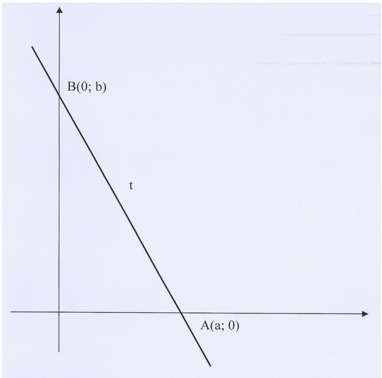
Čia m – nežinomasis krypties koeficientas. Kadangi taškas M_2 priklauso tiesei t, turime tapatybę

$$y_2 - y_1 = m(x_2 - x_1).$$

Iš čia gauname tiesės, einančios per du taškus, lygtį:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}. \quad \triangle$$

5.5. Ašinė tiesės lygtis.



Tarkime, duotos tiesės t susikirtimo su koordinačių ašimis – atkarpos a ir b. Galime parašyti tiesės t, einančios per taškus A ir B lygtį:

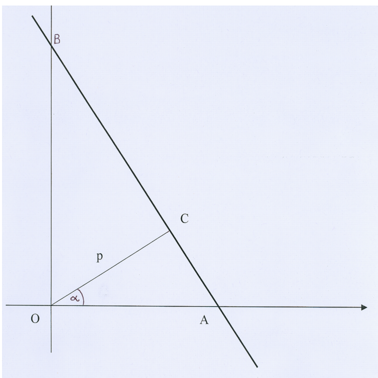
$$\frac{y - 0}{b - 0} = \frac{x - a}{0 - a}.$$

Pertvarkę lygtį, gauname

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1. \quad \triangle$$

5.6. Tiesės normalinė lygtis.

Užrašysime tiesės t, kai duotas kampas α, kurį sudaro statmuo, nuleistas iš koordinačių pradžios taško į tiesę, su x ašimi, ir to statmens ilgis p.



Pažymėkime OA ilgį a, o OB ilgį – b. Iš stačiojo trikampio OAC kraštinių ir kampų priklausomybės išplaukia lygybė

$$\frac{p}{a} = \cos\alpha.$$

Kampas COB lygus $\frac{\pi}{2} - \alpha$, todėl iš stačiojo trikampio OCB išplaukia lygybė

$$\frac{p}{b} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha.$$

Vadinasi,

$$a = \frac{p}{\cos\alpha} \quad \text{ir} \quad b = \frac{p}{\sin\alpha}.$$

Įstatę šias išraiškas į ašinę tiesės lygtį, turime lygybę

$$\frac{x}{\frac{p}{\cos\alpha}} + \frac{y}{\frac{p}{\sin\alpha}} = 1.$$

Iš čia gauname normalinę tiesės lygtį

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0. \quad \triangle$$

5.7. Bendrosios tiesės lygties suvedimas į normalinę.

Turime bendrąją tiesės lygtį

$$ax + by + c = 0.$$

Norėdami ją suvesti į normalinę, padauginkime abi tiesės lygties puses iš daugiklio M, kuriam nustatyti turėsime tris lygtis:

$$Ma = \cos\alpha,$$
$$Mb = \sin\alpha,$$
$$Mc = -p.$$

Pakėlę pirmųjų dviejų lygčių atitinkamas puses kvadratu ir sudėję, gausime lygybę

$$M^2\left(a^2 + b^2\right) = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha.$$

Iš čia paskaičiuojame M:

$$M = \pm\frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Skaičių M nustatome vienareikšmiškai, pasinaudodami trečiąja lygtimi: $Mc = -p$.

Kadangi $p > 0$, tai daugiklio M ženklas turi būti priešingas laisvojo nario c ženklui. $\triangle$

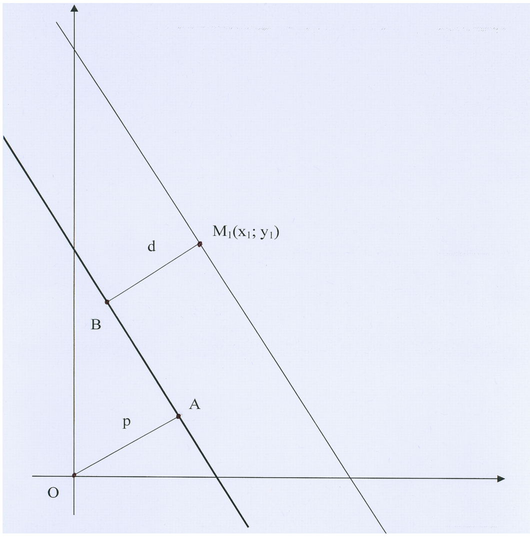
5.8. Taško atstumas iki tiesės.

Rasime taško $M_1(x_1; y_1)$ atstumą d iki tiesės t, duotos normaline lygtimi

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0.$$

Skirsime atvejus, kai taškas M_1 ir koordinačių pradžios taškas O yra skirtingose tiesės t pusėse ir vienoje tos tiesės pusėje.

1. Tarkime, M_1 ir O yra skirtingose tiesės t pusėse:



Išveskime per tašką M_1 tiesę, lygiagrečią duotai. Tuomet šios tiesės lygtis yra

$$x \cos\alpha + y \sin\alpha - p - d = 0.$$

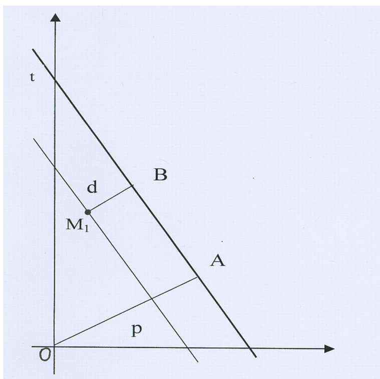
Kadangi taškas M_1 šiai tiesei priklauso, jo koordinatės lygtį paverčia tapatybe

$$x_1 \cos\alpha + y_1 \sin\alpha - p - d = 0.$$

Iš čia gauname atstumo d išraišką

$$d = x_1 \cos\alpha + y_1 \sin\alpha - p. \quad \triangle$$

2. Taškai M_1 ir O yra vienoje tiesės t pusėje.



Išvedę per tašką M_1 lygiagrečią tiesę duotai, užrašome jos lygtį:

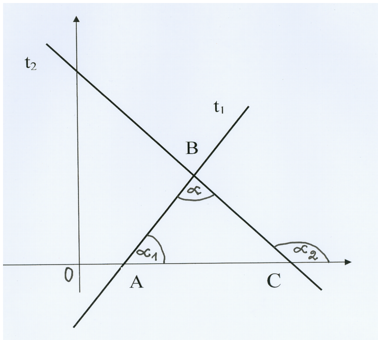
$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - p + d = 0.$$

Įstatę į šią lygtį taško M_1 koordinates, gauname atstumo d išraišką:

$$-d = x_1 \cos \alpha + y_1 \sin \alpha - p. \quad \triangle$$

P.S. Neigiama atstumo išraiška rodo, kad taškai M_1 ir O yra vienoje tiesės t pusėje, teigiama – skirtingose tiesės t pusėse.

5.9. Kampas tarp tiesių plokštumoje, statmenumo ir lygiagretumo sąlygos.



Tarkime, tiesių t_1 ir t_2 kryptinės lygtys yra

$$y = m_1 x_1 + b_1 \quad \text{ir} \quad y = m_2 x_2 + b_2,$$

tiesė t_1 sudaro su abscisių ašimi kampą α_1, t_2 – kampą α_2, o α yra kampas tarp šių tiesių. Iš trikampio priekampio savybės išplaukia lygybė

$$\alpha_2 = \alpha + \alpha_1.$$

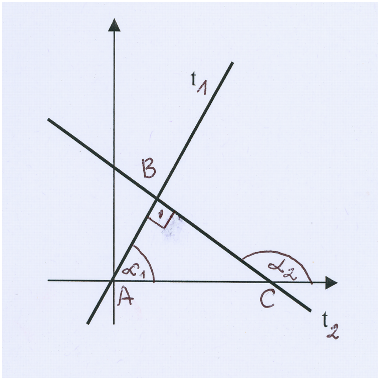
Iš čia gauname lygybę

$$\alpha = \alpha_1 - \alpha_2.$$

Tarę, kad $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$ galime paskaičiuoti kampo α tangentą:

$$\text{tg } \alpha = \text{tg } \big(\alpha_1 - \alpha_2\big) = \frac{\text{tg } \alpha_1 - \text{tg } \alpha_2}{1 + tg\alpha_1 \text{ tg } \alpha_2} = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}.$$

Panagrinėkime atvejį, kai tiesės t_1 ir t_2 yra statmenos:



Vėlgi iš trikampio priekampio savybės išplaukia lygybė

$$\alpha_2 = \frac{\pi}{2} + \alpha_1.$$

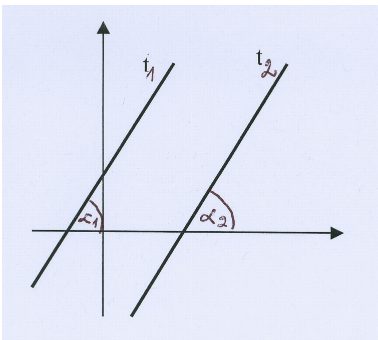
Iš čia išplaukia lygybė

$$m_2 = \text{tg } \alpha_2 = \text{tg } \left(\frac{\pi}{2} + \alpha_1\right) = -\frac{1}{\text{tg } \alpha_1} = -\frac{1}{m_1}.$$

Patogesnė forma užrašyti statmenumo ryšį tokia:

$$m_1 m_2 = -1.$$

Ištirkime atvejį, kai tiesės t_1 ir t_2 yra lygiagrečios:



Šiuo atveju $\alpha_1 = \alpha_2$ ir iš čia išplaukia lygiagretumo sąlyga:

$$m_1 = \text{tg } \alpha_1 = \text{tg } \alpha_2 = m_2. \quad \triangle$$

5.10. Pavyzdžiai.

1. Rasime taško $A(-6; 4)$ projekciją tiesėje $4x - 5y + 3 = 0$.

Pirmiausia parašysime tiesės, einančios per tašką A ir statmenos duotai tiesei, lygtį. Duotosios tiesės krypties koeficientas $k_1 = \frac{4}{5}$. Tarkime, ieškomos tiesės lygtis yra

$$y = kx + b.$$

Koeficientų k ir b radimui užrašome dvi lygtis:

$$\begin{cases} k \cdot \frac{4}{5} = -1 & \text{(statmenumo sąlyga)}, \\ 4 = -6k + b & \text{(taško } A \text{ priklausymo tiesei sąlyga)}. \end{cases}$$

Vadinasi,

$$k = -\frac{5}{4}, \quad b = -\frac{7}{2}.$$

Tiesės lygtis yra

$$y = -\frac{5}{4}x - \frac{7}{2},$$

arba

$$5x + 4y + 14 = 0.$$

Projekcijos koordinates rasime, spręsdami lygčių sistemą

$$\begin{cases} 4x - 5y + 3 = 0 \\ 5x + 4y + 14 = 0 \end{cases} \left| \begin{array}{r} 5 \\ -4 \end{array} \right| \begin{array}{l} 4 \\ 5. \end{array}$$

Padauginę pirmiausia pirmąją lygtį iš 5, antrąją – iš -4, ir sudėję, gauname lygtį

$$-41y = 41.$$

Padauginę pirmąją lygtį iš 4, antrąją – iš 5, ir sudėję, gauname lygtį

$$41x = -82.$$

Iš čia galime užrašyti projekcijos koordinates:

$$x = -2, y = -1. \quad \triangle$$

2. Užrašysime lengvai įsimenamą sąlygą, kada trys taškai $M_1(x_1; y_1)$, $M_2(x_2; y_2)$, $M_3(x_3; y_3)$ priklauso vienai tiesei.

Parašome tiesės, einančios per taškus M_1 ir M_2 lygtį:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}.$$

Taškas M_3 turi priklausyti šiai tiesei. Vadinasi,

$$\frac{y_3 - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_1},$$

arba

$$(y_3 - y_1)(x_2 - x_1) = (y_2 - y_1)(x_3 - x_1).$$

Šią sąlygą galima užrašyti determinanto pavidalu:

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Šį determinantą galima simetrizuoti, užrašius jį trečios eilės determinantu

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

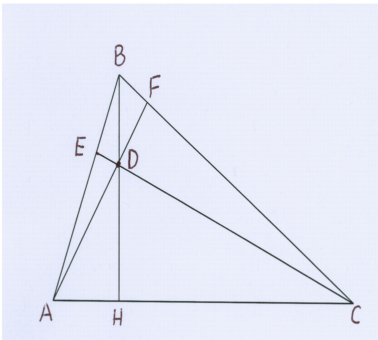
Iš tikrųjų,

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & 0 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}.$$

Taigi trijų taškų priklausimo vienai tiesei sąlyga yra

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0. \quad \triangle$$

3. Dviejų trikampio ABC viršūnių koordinatės yra $A(-10; 2)$, $B(6; 4)$, o aukštinių susikirtimo taško D koordinatės $(5; 2)$. Rasti viršūnės C koordinates.



Pirmiausia parašome aukštinių AF ir BH lygtis, taikydami tiesės lygties per du taškus formulę. Kadangi taškų A ir D ordinatės sutampa ir lygios 2, tiesės AF lygtis yra

$$y = 2.$$

Tiesės BH lygtis:

$$\frac{x - 6}{5 - 6} = \frac{y - 4}{2 - 4},$$

arba $y = 2x - 8$.

Trikampio kraštinė BC yra statmena tiesei AF, todėl ji yra lygiagreti ordinačių ašiai. Vadinasi, tiesės BC lygtis yra

$$x = 6,$$

nes taško B abscisė lygi 6. Parašysime tiesės AC lygtį. Kadangi taško A koordinatės yra žinomos, jos lygtis yra

$$y - 2 = k(x + 10).$$

Krypties koeficientą k nustatome iš tiesių BH ir AC statmenumo sąlygos:

$$k \cdot 2 = -1.$$

Taigi,

$$k = -\frac{1}{2}$$

ir tiesės AC lygtis yra

$$x + 2y + 6 = 0.$$

Taško C koordinates nustatome, spręsdami lygčių sistemą

$$\begin{cases} x = 6, \\ x + 2y + 6 = 0. \end{cases}$$

Taigi $x = 6$ ir $y = -6$. $\triangle$

4. Paskaičiuoti atstumą tarp lygiagrečių tiesių

$$24x - 10y + 39 = 0 \quad \text{ir} \quad 12x - 5y - 26 = 0.$$

Pasirenkame vienoje tiesių, pavyzdžiui, tiesėje, duota lygtimi $12x - 5y - 26 = 0$ tašką $A(3; 2)$. Pirmosios tiesės lygtį normalizuojame, padaugindami abi lygties puses iš normuojančio daugiklio$-\frac{1}{26}$:

$$24x{-}10y{+}39 = 0 \Big| \cdot \left(-\tfrac{1}{26}\right)$$

Gauname lygtį

$$-\frac{12}{13}x + \frac{5}{13}y - \frac{3}{2} = 0.$$

Įstatę į šią lygtį taško A koordinates, paskaičiuojame to taško, o tuo pačiu ir atstumą d tarp lygiagrečių tiesių:

$$d = \left| -\frac{12}{13} \cdot 3 + \frac{5}{13} \cdot 2 - \frac{3}{2} \right| = 3,5. \quad \triangle$$