1. Kompleksiniai skaičiai

1.1. Apibrėžimas. *Kompleksiniu skaičiumi vadiname skaičių pavidalo* $z = a + bi$, *čia* a *ir* b *– realieji skaičiai, o* i *– simbolis, vadinamas menamuoju vienetu, tenkinantis lygybę* $i^2 = -1$.

Skaičių a vadiname skaičiaus z *realiąja dalimi*, o b – *menamąja dalimi*. Kiekvieną realųjį skaičių a galima sutapatinti su kompleksiniu skaičiumi pavidalo $a + 0 \cdot i$. Ta prasme realiųjų skaičių aibę R laikome kompleksinių skaičių aibės C poaibiu.

1.2. Apibrėžimas. *Du kompleksiniai skaičiai* $z = a + bi$ *ir* $w = c + di$ *vadinami lygiais, kai jų realiosios ir menamosios dalys sutampa:* $a = c$ *ir* $b = d$.

1.3. Apibrėžimas. *Skaičių aibė* A *yra vadinama adicine grupe, kai joje yra apibrėžta algebrinė operacija – sudėtis, tenkinanti savybes:*

1) sudėtis asociatyvi:

$$(a + b) + c = a + (b + c) \quad \forall a, b, c \in A;$$

2) aibei A *priklauso nulis:*

$$0 + a = a \quad \forall a \in A;$$

3) su $\forall a \in A$ *aibei* A *priklauso priešingas skaičius* $-a$*:*

$$a + (-a) = 0.$$

1.4. Apibrėžimas. *Skaičių aibė* G *vadinama multiplikacine grupe, kai joje yra apibrėžta algebrinė operacija – daugyba, tenkinanti savybes*:

1) *daugyba asociatyvi*:

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) \quad \forall a, b, c, \in G;$$

2) *aibei* G *priklauso vienetas*:

$$1 \cdot a = a \quad \forall a \in G;$$

3) *su* $\forall a \in G$ *aibei* G *priklauso atvirkštinis skaičius* a^{-1}:

$$a \cdot a^{-1} = 1.$$

Apibrėžiame kompleksinių skaičių aibėje sudėtį ir daugybą taisyklėmis:

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

$$(a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

1.5. Teiginukas. *Kompleksinių skaičių aibė C sudėties atžvilgiu sudaro adicinę grupę, o nenulinių kompleksinių skaičių aibė C^* sandaugos atžvilgiu – multiplikacinę grupę.*

Įrodymas.

1) tikriname sudėties asociatyvumą:

$$\big((a+bi)+(c+di)\big)+(e+if)=\big(a+c+(b+d)i\big)+e+if=$$
$$=a+c+e+(b+d+f)i=a+bi+\big(c+e+(d+f)i\big)=$$
$$=(a+bi)+\big((c+di)+(e+fi)\big)$$

(įrodymui taikome realiųjų skaičių sudėties asociatyvumą).

2) egzistuoja nulinis skaičius: $0+0i$. Iš tikrųjų,

$$a+bi+0+0\cdot i+a+0+(b+0)i=a+bi.$$

3) skaičiui $a+bi$ priešingas skaičius $-(a+bi)$ lygus $-a+(-b)i$. Iš tikrųjų,

$$a+bi+(-a)+(-b)i=(a-a)+(b-b)i=0+0\cdot i=0.$$

Vadinasi, sudėties atžvilgiu kompleksinių skaičių aibė C sudaro adicinę grupę.

1) Tikriname sandaugos asociatyvumą:

$$\big((a+bi)(c+di)\big)(e+if)=\big(ac-bd+i(ad+bc)\big)(e+if)=$$
$$=eac-bde-adf-bcf+i(acf-bdf+ade+bce).$$

$$(a+bi)\big((c+di)(e+if)\big)=(a+bi)\big(ce-df+(cf+de)i\big)=$$
$$=ace-adf-bcf-bde+i(acf+ade+dce-bdf).$$

Iš šių lygybių išplaukia sandaugos asociatyvumas.

2) egzistuoja vienetinis skaičius: $1+0i$. Iš tikrųjų,

$$(a+bi)(1+0\cdot i)=a\cdot 1-b\cdot 0+(a\cdot 0+b\cdot 1)i=a+bi.$$

3) įsitikiname, kad skaičiui $a+bi\neq 0$ atvirkštiniu yra skaičius $\frac{a}{a^2+b^2}-\frac{b}{a^2+b^2}i$:

$$(a+bi)\cdot\Big(\frac{a}{a^2+b^2}-\frac{b}{a^2+b^2}i\Big)=$$
$$=\frac{a^2}{a^2+b^2}+\frac{b^2}{a^2+b^2}+\Big(\frac{ab}{a^2+b^2}-\frac{ab}{a^2+b^2}\Big)i=1+0\cdot 1=1.$$

Taigi nenuliniai kompleksiniai skaičiai sandaugos atžvilgiu sudaro multiplikacinę grupę. $\triangle$

1.6. Apibrėžimas. *Skaičiui $z=a+bi$ jungtiniu skaičiumi vadiname skaičių $\overline{z}=a-bi$, o skaičiaus z moduliu – skaičių $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$.*

1.7. Modulio savybės:

1) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$.

2) $|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$.

Įrodymas. 1) Tarkime, $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$. Tuomet

$$|z_1 \cdot z_2|^2 = \big|(a+bi)(c+di)\big|^2 = \big|ac - bd + i(ad+bc)\big|^2 =$$
$$= (ac-bd)^2 + (ad+bc)^2 = a^2c^2 + b^2d^2 + a^2d^2 + b^2c^2.$$

Be to,

$$|z_1|^2 \cdot |z_2|^2 = |a+bi|^2|c+di|^2 = (a^2+b^2)(c^2+d^2) = a^2c^2 + b^2d^2 + a^2d^2 + b^2c^2.$$

Iš čia išplaukia 1)-osios savybės įrodymas.

2) Kai bent vienas iš skaičių lygus 0, tarkime, z_1, gausime lygybę:

$$|z_1 + z_2| = |0 + z_2| = |z_2| = |0| + |z_2| = |z_1 + |z_2|.$$

Įrodysime nelygybę skaičiams $z_1 \neq 0$ ir $z_2 = 1$. Turime

$$|z_1 + 1|^2 = |a + bi + 1|^2 = (a+1)^2 + b^2 = a^2 + 2a + 1 + b^2 \leqslant$$
$$\leqslant a^2 + b^2 + 2\sqrt{a^2+b^2} + 1 = \Big(\sqrt{a^2+b^2} + 1\Big)^2 = \big(|z_1| + 1\big)^2.$$

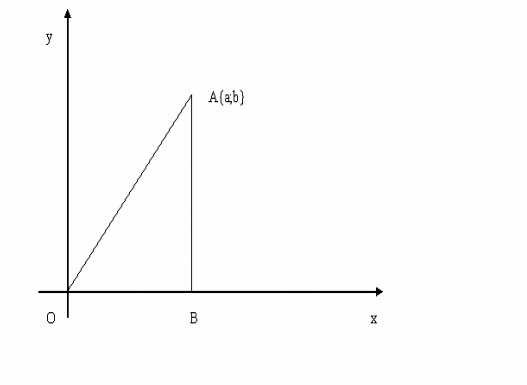
Vadinasi,

$$|z_1 + 1| \leqslant |z_1| + 1.$$

Todėl

$$|z_1 + z_2| = \Big|z_2\big(\frac{z_1}{z_2} + 1\big)\Big| = |z_2|\Big|\frac{z_1}{z_2} + 1\Big| \leqslant |z_2|\Big(\Big|\frac{z_1}{z_2}\Big| + 1\Big) =$$
$$= |z_2| \cdot \frac{|z_1|}{|z_2|} + |z_2| = |z_1| + |z_2|. \quad \triangle$$

Kiekvieną kompleksinį skaičių $z = a + bi$ galima pavaizduoti plokštumoje tašku su koordinatėmis $(a; b)$. Tuo pačiu turėsime kompleksinių skaičių geometrinę interpretaciją.



Skaičiaus z modulis $|z|$ įgauna geometrinę prasmę – tai yra atitinkamo plokštumos taško atstumas iki koordinačių pradžios. Suteikime kompleksiniams skaičiams trigonometrinę interpretaciją. Pažymėję atstumą OA raide r ir kampą tarp abscisių ašies ir kraštinės OA raide φ, galime užrašyti lygybes

$$\frac{a}{r} = \cos\varphi, \quad \frac{b}{r} = \sin\varphi.$$

Tuomet $z = a + bi = r\cos\varphi + ir\sin\varphi = r(cos\varphi + i\sin\varphi)$.

1.8 Apibrėžimas. *Skaičiaus $z = a + bi$ trigonometrine išraiška vadinamas skaičius $r(cos\varphi + i\sin\varphi)$. Skaičius φ vadinamas skaičiaus z argumentu ir žymimas $arg\, z$.*

1.9. Naudingos savybės.

1) *Dviejų kompleksinių skaičių sandaugos modulis lygus tų skaičių modulių sandaugai, o sandaugos argumentas – tų skaičių argumentų sumai.*

2) *Padalinus vieną kompleksinį skaičių iš kito, dalmens modulis lygus tų skaičių modulių dalmeniui, o dalmens argumentas – tų skaičių argumentų skirtumui.*

Įrodymas. 1) Tarkime, $z_1 = r(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ ir $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$. Tuomet

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) \cdot r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = \\ &= r_1 r_2\big(\cos\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2 - \sin\varphi_1 \cdot \sin\varphi_2 + i(\cos\varphi_1 \sin\varphi_2 + \cos\varphi_2 \sin\varphi_1)\big) = \\ &= r_1 r_2\big(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)\big). \quad \triangle \end{aligned}$$

2) Padalinkime z_1 iš z_2:

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1}{\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2} \cdot \frac{\cos\varphi_2 - \sin\varphi_2}{\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2} = \\ &= \frac{r_1}{r_2}\big(\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 + \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 + i(\cos\varphi_1 \sin\varphi_2 - \cos\varphi_2 \sin\varphi_1)\big) = \\ &= \frac{r_1}{r_2}\big(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\big). \quad \triangle \end{aligned}$$

1.10. Išvada (Muavro formulė). *Keliant kompleksinį skaičių natūraliuoju laipsniu, tuo laipsniu keliamas jo modulis, o argumentas tuo laipsniu dauginamas.*

Įrodymas. $n - 1$-ą kartą pritaikome daugybos taisyklę. $\triangle$

1.11. Apibrėžimas. *n-tojo laipsnio šaknimi iš kompleksinio skaičiaus z, žymimą $\sqrt[n]{z}$, vadiname skaičių w, kurio n-asis laipsnis yra lygus z.*

1.12. Teiginys. *Natūraliojo laipsnio n šaknis iš trigonometrinės išraiškos nenulinio kompleksinio skaičiaus $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ turi n skirtingų reikšmių*

$$w_k = \sqrt[n]{r}\Big(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\Big), \quad k = \overline{0, n-1}.$$

Įrodymas. Tarkime, $w = \sqrt[n]{z}$ ir skaičiaus w trigonometrinė išraiška yra $w = R(\cos\psi + i\sin\psi)$. Iš šaknies apibrėžimo turime lygtį nežinomųjų R ir ψ atžvilgiu:

$$\Big(R(\cos\psi + i\sin\psi)\Big)^n = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Pritaikę kairiajai pusei Muavro formulę ir sulyginę abiejų lygties pusių realiąsias ir menamąsias dalis, gauname lygčių sistemą

$$\begin{cases} R^n \cos n\psi = r\cos\varphi, \\ R^n \sin n\psi = r\sin\varphi. \end{cases}$$

Pakėlę abiejų lygčių atitinkamas puses kvadratu ir sudėję, gausime lygtį

$$R^{2n}\big(\cos^2 n\psi + \sin^2 n\psi\big) = r^2\big(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\big).$$

Iš čia

$$R = \sqrt[n]{r}.$$

Įrašę šią R reikšmę į pradinę lygčių sistemą ir abiejų lygčių atitinkamas puses padalinę iš r, turime

$$\begin{cases} \cos n\psi = \cos\varphi, \\ \sin n\psi = \sin\varphi. \end{cases}$$

Pirmosios lygties abi puses padauginę iš $\cos\varphi$, o antrosios – iš $\sin\varphi$, ir sudėję, gauname lygtį

$$\cos n\psi\cos\varphi + \sin n\psi\sin\varphi = 1.$$

Iš čia

$$\cos(n\psi - \varphi) = 1$$

arba

$$n\psi - \varphi = 2\pi k, \quad k \in Z.$$

Todėl

$$\psi = \frac{\varphi + 2\pi k}{n}, \quad k \in Z.$$

Pažymėkime

$$w_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right).$$

Įsitikinsime, kad egzistuoja lygiai n skirtingų w_k reikšmių.

1. Įrodysime, kai k perbėga visus skaičius nuo 0 iki $n-1$, visos reikšmės w_k yra skirtingos. Tarkime priešingai, i ir j yra fiksuoti skirtingi skaičiai tarp 0 ir $n-1$ (apibrėžtumo dėlei galime laikyti, kad $i > j$), o $w_i = w_j$. Iš čia

$$\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi i}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi j}{n}\right) = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi j}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi j}{n}\right).$$

Padalinę iš $\sqrt[n]{r}$ ir sulyginę realiąsias ir menamąsias dalis, gauname

$$\begin{cases} \cos\dfrac{\varphi + 2\pi i}{n} = \cos\dfrac{\varphi + 2\pi j}{n}, \\ \sin\dfrac{\varphi + 2\pi i}{n} = \sin\dfrac{\varphi + 2\pi j}{n}. \end{cases}$$

Padauginę pirmosios tapatybės abi puses iš $\cos\frac{\varphi+2\pi j}{n}$, o antrosios – iš $\sin\frac{\varphi+2\pi j}{n}$, ir sudėję, gauname

$$\cos\frac{\varphi+2\pi i}{n}\cdot\cos\frac{\varphi+2\pi j}{n}+\sin\frac{\varphi+2\pi i}{n}\cdot\sin\frac{\varphi+2\pi j}{n}=1.$$

Iš čia

$$\cos\Big(\frac{\varphi+2\pi i}{n}-\frac{\varphi+2\pi j}{n}\Big)=1.$$

Arba

$$\cos\frac{2\pi(i-j)}{n}=1.$$

Vadinasi,

$$\frac{2\pi(i-j)}{n}=2\pi k,\quad k\in Z.$$

Padalinę abi lygybės puses iš 2π, turime lygybę

$$\frac{i-j}{n}=k.$$

Iš čia išplaukia, kad skaičius $i-j$ dalosi iš n, bet $0<i-j<n$. Vadinasi, gavome prieštarą mūsų prielaidai, kad w_i ir w_j yra lygūs skaičiai.

2. Parodysime, kad daugiau skirtingų skaičių w_k nėra. Tarkime, m yra bet kuris sveikasis skaičius. Įrodysime, kad skaičius w_m sutampa su vienu iš skaičių w_k, kai $k=\overline{0,n-1}$. Padaliname m iš skaičiaus n su liekana – $m=nq+k$, $0\leqslant k\leqslant n-1$. Pertvarkome skaičiaus w_m išraišką –

$$\begin{aligned}
w_m &= \sqrt[n]{r}\Bigg(cos\frac{\varphi+2\pi m}{n}+i\sin\frac{\varphi+2\pi m}{n}\Bigg)=\\
&= \sqrt[n]{r}\Bigg(cos\frac{\varphi+2\pi(nq+k)}{n}+i\sin\frac{\varphi+2\pi(nq+k)}{n}\Bigg)=\\
&= \sqrt[n]{r}\Bigg(cos\Big(\frac{\varphi+2\pi k}{n}+2\pi q\Big)+i\sin\Big(\frac{\varphi+2\pi k}{n}+2\pi q\Big)\Bigg)=\\
&= \sqrt[n]{r}\Bigg(cos\frac{\varphi+2\pi k}{n}+i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\Bigg)=w_k.\quad\triangle
\end{aligned}$$

Panagrinėkime n-tojo laipsnio vienetų šaknų aibę

$$G=\Big\{\varepsilon_k=\cos\frac{2\pi k}{n}+i\sin\frac{2\pi k}{n},\quad k=\overline{0,n-1}\,\Big\}.$$

1.13. Teiginukas. *Galioja tapatybė*

$$\varepsilon_k\cdot\varepsilon_l=\begin{cases}\varepsilon_{k+l}, & \text{kai } k+l<n\\ \varepsilon_{k+l-n}, & \text{kai } k+l\geqslant n.\end{cases}$$

Įrodymas. Pertvarkome sandaugą $\varepsilon_k\cdot\varepsilon_l$:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_k\cdot\varepsilon_l &= \Big(\cos\frac{2\pi k}{n}+i\sin\frac{2\pi k}{n}\Big)\Big(\cos\frac{2\pi l}{n}+i\sin\frac{2\pi l}{n}\Big)=\\
&=\cos\frac{2\pi(k+l)}{n}+i\sin\frac{2\pi(k+l)}{n}.
\end{aligned}$$

Kai $k+l < n$, paskutinioji išraiška lygi ε_{k+l}. Tarkime, $k+l \geqslant n$. Kadangi $0 \leqslant k,\ l \leqslant n-1$, tai $k+l \leqslant 2n-2$. Vadinasi, $0 \leqslant k+l-n \leqslant n-1$. Iš 1.12 Teiginio įrodymo išplaukia, kad sandauga $\varepsilon_k \cdot \varepsilon_l = \varepsilon_{k+l-n}$. $\triangle$.

1.14. Išvada. *Vieneto šaknų aibė G sudaro multiplikacinę grupę.*

Įrodymas. Iš 1.13 teiginuko išplaukia, kad šioje aibėje yra apibrėžta daugybos operacija.

1) operacija asociatyvi (nes kompleksinių skaičių daugyba yra asociatyvi);

2) aibei G priklauso vienetas – iš tikrųjų, $\varepsilon_0 = \cos 0 + i \sin 0 = 1$;

3) skaičiui ε_k atvirkštiniu skaičiumi yra ε_{n-k}:

$$\varepsilon_k \cdot \varepsilon_{n-k} = \varepsilon_{n-n} = \varepsilon_0 = 1 \quad \text{(iš 1.13 teiginuko)} \ \triangle.$$

1.15. Apibrėžimas. *Primityviąja n-tojo laipsnio vieneto šaknimi vadinama šaknis ε, kurios visi laipsniai $\varepsilon^1, \varepsilon^2, ..., \varepsilon^n$ išsemia n-tojo laipsnio vienetų šaknų aibę.*

1.16. Teoremėlė. *Su kiekvienu natūraliuoju skaičiumi n egzistuoja to laipsnio primityviosios vieneto šaknys.*

Įrodymas. Iš tikrųjų, įrodymas išplaukia iš tapatybės:

$$\varepsilon_1^k = \Big(\cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n} \Big)^k = \varepsilon_k, \quad (k = \overline{1, n-1}\,)$$

ir $\varepsilon_1^n = \varepsilon_0$. $\triangle$

P.S. Grupės, kuriose kurio nors elemento laipsniai išsemia visą grupę, vadinamos *ciklinėmis*, o atitinkami elementai – *grupės sudaromosiomis.*

Duotu atveju elementas ε_1 yra grupės sudaromoji (ir ne tik jis – bet kokia šaknis ε_k, kai $(k, n) = 1$, yra taip pat sudaromoji).

1.17. Pavyzdžiai.

1. Parašysime kompleksinio skaičiaus $z = 1 - \sqrt{3}i$ trigonometrinę išraišką:

$$\sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2.$$

Vadinasi,

$$z = 1 - \sqrt{3}i = 2\Big(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i\Big) = 2\Big(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} \Big). \ \triangle$$

2. Pakelsime kompleksinį skaičių $z = 1 + \sqrt{3}i$ 200-uoju laipsniu.

Pirmiausia užrašome skaičiaus z trigonometrinę išraišką:

$$z = 1 + \sqrt{3}i = 2\Big(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i\Big) = 2\Big(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \Big).$$

Keldami laipsniu, taikome Muavro formulę:

$$z^{200} = 2^{200}\Big(\cos\frac{200\pi}{3} + i\sin\frac{200\pi}{3}\Big) = 2^{200}\Big(\big(\cos 66\pi + \frac{2\pi}{3}\big) + i\sin\big(66\pi + \frac{2\pi}{3}\big)\Big) =$$

$$= 2^{200}\Big(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\Big) = 2^{200}\Big(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\Big) = 2^{199}\big(-1 + i\sqrt{3}\big). \quad \triangle$$

3. Ištrauksime iš skaičiaus $z = 1 + i$ kubinę šaknį. Skaičiaus z trigonometrinė išraiška yra:

$$z = 1 + i = \sqrt{2}\Big(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\Big) = \sqrt{2}\Big(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\Big).$$

Vadinasi,

$$\sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{4} + 2\pi k}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{4} + 2\pi k}{3}\right), \quad k = 0, 1, 2.$$

1) Tarkime, $k = 0$. Tuomet

$$\sqrt[3]{z} = \sqrt[6]{2}\Big(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\Big).$$

Kadangi

$$\cos\frac{\pi}{12} = \cos\Big(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\Big) = \cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4},$$

ir

$$\sin\frac{\pi}{12} = \sin\Big(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\Big) = \sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4},$$

tai

$$\sqrt[3]{z} = \sqrt[6]{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4} + i\Big(\frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4}\Big)\right) = \frac{1}{4}\sqrt[6]{2}\big(\sqrt{2} + \sqrt{6} + i(\sqrt{6} - \sqrt{2})\big).$$

2) Tarkime, $k = 1$. Tuomet

$$\sqrt[3]{z} = \sqrt[6]{2}\left(\cos\Big(\frac{\pi}{12} + \frac{2\pi}{3}\Big) + i\sin\Big(\frac{\pi}{12} + \frac{2\pi}{3}\Big)\right) =$$

$$= \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right) = \sqrt[6]{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt[6]{2}\big(-\sqrt{2} + i\sqrt{2}\big).$$

3) Tarkime, $k = 2$. Tuomet

$$\sqrt[3]{z} = \sqrt[6]{2}\left(\cos\Big(\frac{\pi}{12} + \frac{4\pi}{3}\Big) + i\sin\Big(\frac{\pi}{12} + \frac{4\pi}{3}\Big)\right) =$$

$$= \sqrt[6]{2}\left(-\frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} - i\Big(\frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4}\Big)\right) = \frac{1}{4}\sqrt[6]{2}\big(\sqrt{2} - \sqrt{6} - i(\sqrt{6} + \sqrt{2})\big). \quad \triangle$$

4. Ištrauksime 8-ojo laipsnio vieneto šaknį:

$$\sqrt[8]{1} = \sqrt[8]{\cos 0 + i\sin 0} = \varepsilon_k = \cos\frac{2\pi k}{8} + i\sin\frac{2\pi k}{8}, \quad k = \overline{0,7}.$$

Paskaičiuosime visas 8-ojo laipsnio vieneto šaknų reikšmes:

1) $\varepsilon_0 = \cos 0 + \sin 0 = 1;$

2) $\varepsilon_1 = \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2};$

3) $\varepsilon_2 = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = i;$

4) $\varepsilon_3 = \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2};$

5) $\varepsilon_4 = \cos \pi + i \sin \pi = -1;$

6) $\varepsilon_5 = \cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2};$

7) $\varepsilon_6 = \cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} = -i;$

8) $\varepsilon_7 = \cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2};$ $\triangle$