

III. Dinaminės sistemos

3.1 Diskrečiosios dinaminės sistemos

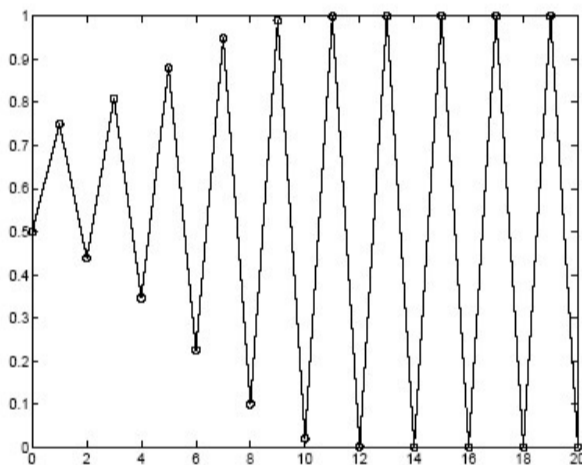
Apibrėžimas Tarkime, kad (X, ρ) yra metrinė erdvė, o $f : X \rightarrow X$ – transformacija. Tada dinamine sistema vadinsime porą $\{X; f\}$. Seką $\{f^n(x), n \in \mathcal{N}\}$ vadinsime taško $x \in X$ orbita.

Tašką $z \in X$ vadinsime transformacijos nejudamu tašku, jei $f(z) = z$.

Sakykime, kad (X, f) – dinaminė sistema. Sakysime, kad erdvės taškas x yra periodinis, transformacijos f atžvilgiu, jeigu egzistuoja natūralusis skaičius n toks, kad $f^n(x) = x$. Mažiausią natūralųjį skaičių n , kuriam teisinga lygybė $f^n(x) = x$, vadinsime taško periodu. Periodinio taško orbitą vadinsime transformacijos f ciklu tame taške. Minimalus ciklo periodas yra skirtingų taškų skaičius, kuris priklauso šiam periodui. Ciklo elementų skaičių vadinsime šio ciklo eile. Beje, jei x yra periodinis taškas, kurio periodas n , tai šio taško ciklo taškai sudaro tokią aibę:

$$\{x, f(x), f^2(x), \dots, f^{n-1}(x)\}.$$

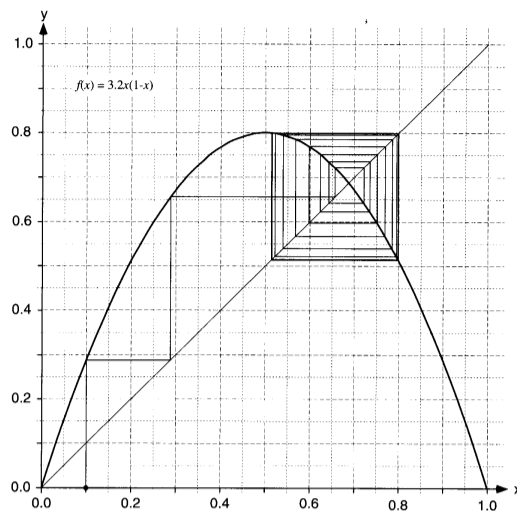
Taško a orbitą vadinsime periodine, jeigu egzistuoja teigiamas skaičius p toks, kad $f^{n+p}(a) = f^n(a)$, $\forall n \in \mathcal{N}$. Patį mažiausią teigiamą skaičių $p \in \mathcal{N}$, tenkinantį šį saryšį, vadiname taško periodu. Tuo tarpu, jei seka $\{f^n(x)\}$ tampa periodine, tik tada, kai $n > n_0$, tai sakysime, kad seka beveik periodinė. 1 pav. yra pateikiama beveik periodinio taško orbitos grafinė realizacija.



1 pav.

Nurodysime algoritmą, kuriuo naudodamiesi galėsime grafiškai vaizduoti taškų orbitas. Tarkime, kad duota dinaminė sistema $\{\mathcal{R}; f(x)\}$. Ieškosime taško $x_0 \in \mathcal{R}$ orbitos, $\{x_n = f^n(x_0), n = 1, \dots\}$. Paprastumo dėlei tarkime, kad $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$. Nubrėžkime kvadrata $\{(x, y); 0 \leq x, y \leq 1\}$, funkcijos $y = f(x)$ grafiką, bei tiesę $y = x$. Fiksavę plokštumos tašką (x_0, x_0) , sujunkime jį atkarpa su tašku $(x_0, x_1 = f(x_0))$. Toliau elgsimės analogiškai. Sujungsime pastarąjį tašką su tašku (x_1, x_1) , o paskutinįjį su tašku $(x_1, x_2 = f(x_1))$ ir taip toliau. Atlikę šią konstrukciją, gauname tiesės taškų seką $\{(x_n, y_n)\}$, kuri

konverguoja į nejudamą transformacijos tašką. 2 pav. pateikiamas grafinės iteracijos pavyzdys.



2 pav.

Chaotinė dinamika paprastai atsiranda netiesinėse dinaminėse sistemose, t.y. dinaminėse sistemose, kurios apibrėžiamos ne tiesine transformacija.

Tarkime, kad G_f yra transformacijos f grafikas. Jeigu taškas x_f yra nejudamas, dinaminės sistemos (X, f) taškas, tai $(x_f, x_f) \in G_f$.

Tarkime, kad x_f yra dinaminės sistemos (X, f) *nejudamas taškas*.

Apibrėžimas Tašką x_f vadinsime *pritraukiančiu dinaminės sistemos tašku*, jeigu egzistuoja $\epsilon > 0$ toks, kad transformacija f rutulį $B(x_f, \epsilon)$ atvaizduoja į jį patį ir f yra suspaudžiantis atvaizdis šiame rutulyje

$$B(x_f, \epsilon) = \{y \in X; \rho(x_f, y) \leq \epsilon\}.$$

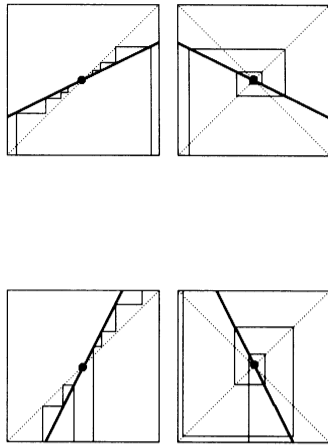
Kitaip tariant, nejudamas taškas yra pritraukiantis, jei egzistuoja šio taško aplinka, kurios taškų iteracinės sekos konverguoja prie šio nejudamo taško.

Apibrėžimas Nejudamą tašką x_f vadinsime *atstumiančiu*, dinaminės sistemos tašku, jeigu egzistuoja $\epsilon > 0$ ir $c > 1$ tokie, kad

$$\rho(f(x_f), f(y)) \geq c\rho(x_f, y), \quad y \in B(x_f, \epsilon).$$

Kitaip tariant, taškas yra atstumiantis, jei galima nurodyti pakankamai mažą aplinką, kurioje visos taškų orbitos tolsta nuo šio taško.

Kaip būtų galima geometriškai atskirti ar nejudamas taškas yra atstumiantis ar pritraukiantis? Pasirodo, kad jei taške x_f , transformacijos grafiko liestinės krypties koeficiento absoliuti reikšmė yra didesnė už 1, tai šis nejudamas taškas yra atstumiantis, o jei absoliuti reikšmė mažesnė už vienetą, tai pritraukiantis. 3 pav. yra pavaizduoti keli dinaminės sistemos grafinės iteracijos nariai, kai iteruojami taškai "netoli" pritraukiančiojo (viršutinėje 3 pav. dalyje) ir atstumiančiojo taškų (apatinėje 3 pav. dalyje).



3 pav.

Taigi, taškas x_f yra pritraukiantis nejudamas taškas, jei $|f'(x_f)| < 1$ ir taškas x_f yra atstumiantis, jei $|f'(x_f)| > 1$. Beje, atstumiantys nejudami taškai dažnai dar vadinami nestabiliais fiksuotais taškais. Nejudamas taškas vadinamas neutraliu, jei $|f'(x_f)| = 1$.

Transformacijos $y = f(x)$ pritraukiantį nejudamą tašką x_f vadinsime *superpritraukiančiu* arba *superstabiliu*, jeigu $f'(x_f) = 0$.

Pritraukiantieji ir atstumiantieji dinaminės sistemos taškai (realiųjų skaičių aibėje) yra skirstomi į klases priklausomai nuo to, ar grafinė iteracija yra "laiptuota" ar "spiralinė". Pastarosios galimybės taip pat vaizduojamos 3 pav.. Pasirodo, kad iteracija yra "laiptuota", jeigu krypties koeficientas yra teigiamas $f'(x_f) > 0$, ir "spiralinė," jeigu neigiamas ($f'(x_f) < 0$).

Tarkime, kad taškas x_f yra n -os eilės periodinis transformacijos taškas. Tada šis taškas yra transformacijos f^n nejudamas taškas. Sakysime, kad n -os eilės periodo ciklas yra pritraukiantis transformacijos f ciklas, jeigu cikle yra transformacijos f n -os eilės pritraukiančių, periodinių taškų. n -os eilės periodinis taškas yra *atstumiantysis*, jeigu jis yra nejudamas, atstumiantysis, transformacijos f^n taškas. Kitaip tariant, ciklas yra pritraukiantis (atstumiantis), jeigu egzistuoja bent vienas taškas

$$z \in \{x_f, f(x_f), f^2(x_f) \dots f^{n-1}(x_f)\}$$

toks, kad $f^n(z) = z$ ir $|(f^n)'(z)| < 1$, ($|(f^n)'(z)| > 1$).

Ir analogiškai, ciklas yra superpritraukiantis (atstumiantis), jei egzistuoja

$$z \in \{x_f, f(x_f), f^2(x_f) \dots f^{n-1}(x_f)\}$$

toks, kad $f'(z) = (f^n)'(z) = 0$.

Dinaminė sistema $\{[0, 1]; 2x(1 - x)\}$ turi pritraukiantį nejudamą tašką $x_f = 0.5$. Nesunku matyti, kad 0 taip pat nejudamas transformacijos taškas. Panagrinėkime nulio

aplinką. Iš pradžių pastebėkime, kad jeigu $x \rightarrow 0$ tai dydis $1 - x \rightarrow 1$. Taigi, kai $x \rightarrow 0$, tai $f(x) \sim 2x$. Kadangi visiems $x > 0$ turime

$$\rho(2x, 0) = 2\rho(x, 0) > \rho(x, 0)$$

tai nulis yra atstumiantis nejudamas taškas. Pavyzdžiui, paimkime $\epsilon = 0.1$. Tada

$$\rho(0, f(x)) = 1.8\rho(0, x),$$

bet kokiam $x \in B_\epsilon(0)$.

Panagrinėkime transformaciją $f : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$, $f(x) = x^2 - 1$. Ši transformacija turi du nejudamus taškus: $x = (1 \pm \sqrt{5})/2$. Abu šie taškai yra atstumiantys (kodėl?). Atkreipime skaitytojo dėmesį į dar vieną faktorių, kuris svarbus nagrinėjant dinamines sistemas- kiekvienas transformacijos $f^2(x)$ nejudamas taškas tuo pačiu yra funkcijos $y = f(x)$ antrojo periodiškumo nejudamas taškas. Nagrinėjamos funkcijos antroji iteracija yra lygi $f(x) = x^4 - 2x^2$. Šios funkcijos nejudami taškai yra keturi- du funkcijos $f(x)$ jau minėti nejudami taškai ir taškai $0, -1, -$ pastarieji yra funkcijos $f(x)$ antrojo periodiškumo taškai.

Nagrinėtoji antrojo laipsnio transformacija yra transformacijos $f_c(x) = x^2 + c$ atskiras atvejis, čia x ir c gali būti ir kompleksiniai skaičiai. Pastaroji transformacija nagrinėjama labai plačiai, kadangi šios transformacijos elgsena panaši į vienos klasės (šią klasę apibrėšime žemiau), transformacijų elgesi.

Panagrinėkime šią transformaciją plačiau, laikydami, kad $f : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$. Ieškodami transformacijos nejudamų taškų sprendžiame lygtį: $x^2 + c = x$. Gauname, kad nejudami taškai priklauso nuo transformacijos parametro c :

$$\xi = \frac{1 + \sqrt{1 - 4c}}{2}, \quad \eta = \frac{1 - \sqrt{1 - 4c}}{2}.$$

Taigi, šie nejudami taškai bus realūs skaičiai, jei $1 - 4c \geq 0$. Nesunku matyti, kad jei $c \leq 0.25$, tai $-\xi < \eta < \xi$. Be to $f(-\xi) = \xi$. Pastebėsime, kad tuo tarpu, kai $|x| > \xi$, tai šių taškų orbitos yra neaprežtos. Tad natūralu, kad ateityje laikysime, jog $c \leq 0.25$ ir $|x| \leq \xi$. Esant šioms sąlygoms gauname, kad $f(x) \leq \xi$ ir jeigu $-2 \leq c$, tai $-\xi \leq f(x)$.

Tarkime, kad I koks nors uždaras intervalas $I \subset [-\xi, \xi]$. Tuo atveju, kai $x_0 \in I$, tai $f(x_0) \in I$ ir visa šio taško orbita priklauso aibei I . Jeigu $c < -2$ ir $x_0 \in I$, tai galimi du atvejai: arba šio taško orbita pasilieka intervale I arba yra neaprežta.

Pasirodo, kad tuo atveju, kai $-3/4 < c < 1/4$, nejudamas taškas x_0 yra pritraukiantis, kadangi

$$|f'_c(x_0)| < 1$$

ir visos taškų, kurie priklauso aibei I , orbitos konverguoja prie x_0 . Tuo tarpu, jei c mažėja ir tampa mažesnė už $-3/4$, tai atitinkamai dydis $|f(x_0)|$ didėja ir tampa didesnis už 1 , taigi, šis taškas yra atstumiantis. Tuo tarpu funkcija $f^2(x)$ generuoja porą papildomų pritraukiančių nejudamų taškų, kurie yra pradinės funkcijos antrojo periodiškumo taškai. Taigi, jei parametras c pereina reikšmę $-3/4$, tai sakysime, kad transformacija patiria *periodo padvigubėjimą (bifurkaciją)*. Kita bifurkacija pasirodo, kai $c = -5/4$. Kai c reikšmės

tampa mažesnės negu minėtasis skaičius, tai orbitos turinčios ketvirtojo periodiškumo ciklus yra pritraukiančios. Mažėjant c reikšmei paeiliui ima rasti 8-ojo, 16-ojo ir t.t. 2^n -ojo periodas pritraukiantys ciklai. Dvigubinant periodą mes pereiname į chaotinę būseną, t.y. iteruojant vieną tašką, jo orbita "aplanko" visus aibės I taškus.

Tada, kai $c = -2$, tai transformacijos nejudamas taškas yra 2. Be to, bet kokio taško $x \in I \in [-2, 2]$ orbitai priklauso intervalas I , o grafiko taškai užpildo visą kvadratą $I \times I$. Kitaip tariant, neegzistuoja mažesnio kvadrato, kurio kraštinės būtų lygiagrečios koordinatėms ašims ir kurio poaibis būtų iteruojamo taško orbita. Pastebėkime, kad iteracinės sekos nario $f^n(x) = y$ grafikas lygiai 2^n kartų kerta tiesę $y = x$ kvadrato $I \times I$. Kiekvienas susikirtimo taškas nurodo funkcijos $y = f^n(x)$ nejudamą tašką, o tuo pačiu ir pradinės funkcijos periodinį, n -ojo periodiškumo tašką. Taigi, galime daryti išvadą, kad jei $c = -2$ tai egzistuoja funkcijos f orbitos, kurių periodiškumas yra 2, 3, 4, ...

Panagrinėkime, orbitų diagramas, kurias galime modeliuoti naudodami kompiuterinę grafiką. Šias diagramas sudarome tokiu būdu: Oy ašyje atidedame parametro c reikšmę, o horizontalioje tiesėje $y = c$ žymime transformacijos $x^2 + c$ taškus, pritraukiančius periodines orbitas. Apsiribokime intervalu $(-2, 0.25)$. Pasirenkame tašką $x_0 = 0$, kurį iteruosime.

Nagrinėsime transformaciją, apibrėžtą (2) formule. Pažymėkime:

$$r(c) = \max\{|c|, 2\}, \quad D_c = \{z; \lim_{n \rightarrow \infty} \overline{|f^n(z)|} = \infty\}$$

Teisinga tokia

1 Teorema Kompleksinės plokštumos taškai, turintys savybę:

$$|z| \geq r(c)$$

priklauso aibei D_c .

⊖ Remdamiesi teoremos prielaidomis, gauname, kad $|z| > |c|$ ir $|z| > 2$. Vadinasi, egzistuoja $\epsilon > 0$ toks, kad $|z| = 2 + \epsilon$. Tada

$$|z^2| \leq |z^2 + c| + |c|.$$

Be to,

$$|z^2 + c| \geq |z^2| - |c| \geq (1 + \epsilon)|z|.$$

Naudodamiesi šiomis nelygybėmis gauname, kad

$$|z_1| \geq (1 + \epsilon)|z_0|.$$

Taigi, bet kokiam $k \in \mathcal{N}$ turime, kad

$$|z_k| \geq (1 + \epsilon)^k |z_0|.$$

Iš paskutiniosios nelygybės išplaukia, kad taško orbita yra aprėžta.

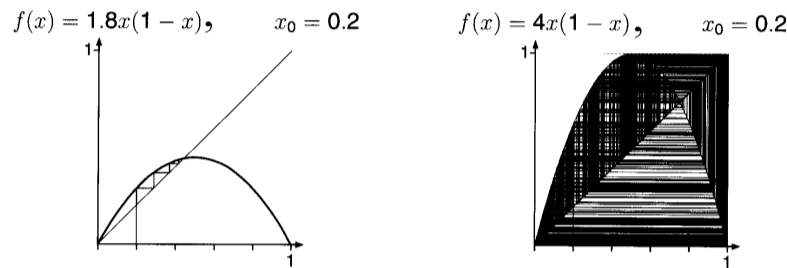
⊕

Naudodamiesi paskutiniąja teorema galime tvirtinti, kad norint nustatyti konvergavimo aibę, mums pakanka pradinius iteracinės sekos elementus rinkti iš aibės

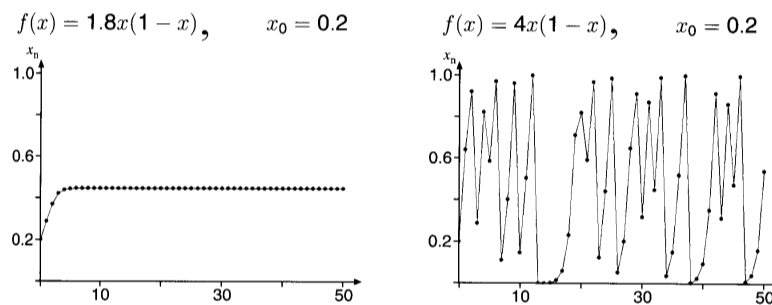
$$Q_c = \{z_0; |z_0| \leq r(c)\}.$$

Pratęskime algoritmo analizę. Skačiuojame funkcijos $f(x) = x^2 + c$ orbitą taške $x = 0$. Praktiškai pakanka suskačiuoti 200 orbitos taškus. Paprastai pirmieji 50 atmetami. Likę 150 taškų sudaro orbitos aproksimaciją. Kiekvienam $n = 51, 52, \dots, 200$, diagramoje atidedame tašką (x_n, c) . Pakankamai reprezentatyvi diagrama bus gauta, jei parametro kitimo srityje šį parametą keisime žingsniu 0,00625. Žinoma, norint pasiekti geresnį tikslumą, reiktų skačiuoti ilgesnes orbitas, o parametą c keisti mažesniu žingsniu.

Žemiau pateiktuose 4 pav. ir 5 pav. yra iliustruojama dinaminės sistemos, skirtingoms parametro c reikšmėms, taškų orbitų grafinės realizacijos.



4 pav.



5 pav.

3.2 Freigenbaumo universalumo principas

Neprognozuojamumo principas mus lygi kiekviename žingsnyje. Procesai, kurie prasideda "tvarkingai", bėgant laikui dažnai tampa neprognozuojamais, chaotiškais. Freigenbaumas nagrinėjo dinaminę sistemą $y = cx(1-x)$ ir stebėjo sistemos taškų elgesį intervaluose tarp gretimų bifurkacijos taškų. Pastebėsime, kad šios dinaminės sistemos orbitų diagrama labai panaši į jau nagrinėtos sistemos $y = x^2 + c$ diagramą. Pagrindinis Freigenbaumo studijos pasiekimas yra tai, kad jis nustatė sistemos universalumo principą. Jis aprašė mechanizmą, kaip gaunamas chaosas dvigubinant periodą tam tikros

klasės funkcijų pagrindu, sudarytomis dinaminėms sistemoms. Šios klasės funkcijos turi savybę: jos apibrėžtos intervale $(0, 1)$ ir įgyja maksimalią reikšmę taške $x_M \in (0, 1)$ su sąlyga, kad $f'(x_M) = 0$ ir be to šios funkcijos yra monotoniškos intervaluose $(0, x_M)$ ir $(x_M, 1)$, o Švarcianas (Švarco išvestinė)

$$Sf(x) = \frac{f'''(x)}{f''(x)} - \frac{3}{2} \left(\frac{f''(x)}{f'(x)} \right) < 0, \quad \forall x \in [0, 1].$$

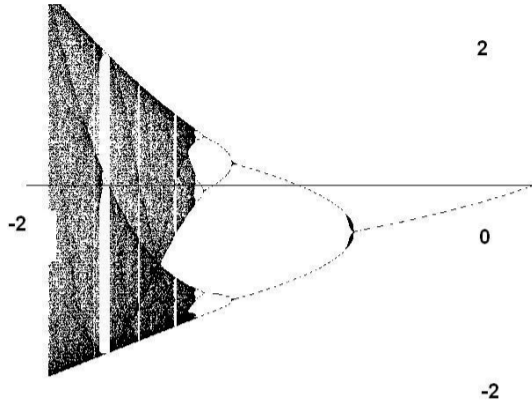
Grįžkime prie jau nagrinėtos funkcijos $f(x) = x^2 + c$. Pažymėkime šios funkcijos bifurkacijos taškus raidėmis c_i , $i = 1, \dots$. Kitaip tariant iteruojant šią funkciją, nurodytuose taškuose keičiasi 2^n periodo pritraukianti orbita į 2^{n+1} periodo pritraukiančią orbitą. Lentelėje pateikiame parametrų seką c_n ir šią seką atitinkančių dviejų gretimų intervalų santykį:

n	c_n	$(c_n - c_{n-1}) / (c_{n+1} - c_n)$
0	-0.75	4.2337382
1	-1.25	4.5515069
2	-1.36809893	4.6458074
3	-1.39404615	4.6458074
4	-1.39963123	4.6639381
5	-1.40082874	4.6681036
6	-1.40108527	4.6689669
7	-1.4011402146	4.6691474

Jau aukščiau esame pastebėję, kad tuo atveju, kai $c < 0.25$, tai ši transformacija neturi realių nejudamų taškų. Tada, kai $c \in (0.25, -0.75)$, tai egzistuoja pritraukianti 1-ojo periodo orbita. Jei $c \in (-0.75, -1.25)$, tai egzistuoja 2-ojo periodo pritraukianti orbita, kuri tampa 4-ojo periodo pritraukiančiu nejudamu tašku, kai c reikšmė tampa lygi skaičiui $-5/4$. Taigi, remdamiesi šiais samprotavimais gauname, kad $c_0 = -3/4$ ir $c_1 = -5/4$. Didėjant n bifurkacijos taškus nustatyti tampa vis sudėtingiau, todėl tam yra pasitelkiami kompiuteriai. Lentelėje pateikti skaičiai yra gauti pasitelkus dirbtinį intelektą. Beje, stebėdami paskutiniosios lentelės duomenis galime daryti prielaidą, kad seka c_n konverguoja. Įrodyta, kad ši seka turi ribą, kuri lygi:

$$c_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = -1.401155\dots$$

Konstanta c_∞ vadinama *Freigenbaumo tašku* arba dinaminės sistemos *chaoso tašku*. Freigenbaumo taškas priklauso ir nuo šį tašką generuojančios dinaminės sistemos. Intervale $(0.25, c_\infty)$ iteruojama dinaminė sistema, keičiant konstantą c , generuoja pritraukiančius taškus, kurie turi dvigubai didesnę periodiškumą negu prieš tai buvę taškai. Tuo tarpu, kai $c > c_\infty$, tai gauname visai kitokio pobūdžio taškų sritį, kuri vadinama *chaoso sritimi*. Diagramoje matyti šviesi sritis, kuri reprezentuoja taškų, turinčių trečiąją periodiškumą orbitas, kai $c = -1.7548777$. Žemiau pateiktoje diagramoje yra pateikiamos periodinių taškų orbitos, kai parametro reikšmės kinta nuo 0 iki -2 .



6 pav.

Pastebėsime, kad dydžius c_n galime rasti naudodami Niutono metodą lygčiai:

$$f_c^{2^{n-1}}(x_0) = x_0, \quad \text{kai } f_c(x) = x^2 + c, \text{ o}$$

x_0 yra funkcijos $f_c(x)$ kritinis taškas.

Pasirodo, kad seka

$$d_n = \frac{(c_n - c_{n-1})}{(c_{n+1} - c_n)}$$

turi ribą $d = 4.669162\dots$, kuri yra universali tam tikrai dinaminių sistemų klasei. Šis skaičius yra vadinamas *Freigenbaumo konstanta*. Konstanta d yra vadinama *chaoso konstanta*, kadangi jos pagalba galima suskaičiuoti ir chaoso skaičių, kuris kaip jau ir minėjome yra priklausomas nuo dinaminę sistemą apibrėžiančios transformacijos.

Pažymėkime

$$\lambda_n = c_n - c_{n-1}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Taigi, iš d apibrėžimo išplaukia, kad

$$d = \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} + o(1), \quad n \rightarrow \infty.$$

Tada,

$$\lambda_n = \frac{\lambda_1}{d^{n-1}} + o(1), \quad n \rightarrow \infty.$$

Iš pastarųjų ribinių sąryšių išplaukia, kad

$$\begin{aligned} c_n &= c_{n-1} + \frac{\lambda_1}{d^{n-1}} + o(1) = c_{n-2} + \left(\frac{1}{d^{n-2}} + \frac{1}{d^{n-1}}\right)\lambda_1 + o(1) = \dots, \\ &= c_0 + \left(\frac{1}{d} + \dots + \frac{1}{d^{n-1}}\right)\lambda_1 + o(1), \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Gauname, kad

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = c_0 + \frac{d\lambda_1}{d-1}.$$

Taigi gauname, kad intervalo (c_0, c_∞) ilgis apytiksliai lygus

$$\frac{d\lambda_1}{d-1}.$$

Norint teoriškai nustatyti bifurkacinius taškus, konkrečiai dinaminei sistemai, tenka gana kruopščiai analizuoti Frengenbaumo konstantą, apibrėžtą dviejų sekų santykiu. Kiek vėliau buvo pasiūlytas kitas, paprastesnis šių taškų nustatymo metodas.

Pasirodo, kad tarp bet kokių dviejų gretimų bifurkacijos taškų c_n ir c_{n+1} egzistuoja taškas c_n^* , kuriuo apibrėžta dinaminė sistema turi 2^n periodo pritraukiančią orbitą. Šiai parametro reikšmei transformacija $f_{c^*}(x)$ kritiniame taške x_0 tenkina sąlygą: $f_{c^*}^n(x_0) = x_0$.

Turime, kad Freigenbaumo konstanta tenkina sąryšį:

$$d = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_n - c_{n-1}}{c_{n+1} - c_n}.$$

Tada,

$$d = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_n^* - c_{n-1}^*}{c_{n+1}^* - c_n^*}. \quad (1)$$

Pastebėsime, kad c_n galima rasti naudojant artutinius metodus, pavyzdžiui Niutono metodą. Priminsime, kad Niutono metodo esmė – sudaryti iteracinę formulę lygties $\phi(x) = 0$ šaknims rasti, kai pasirenkamas pirmas iteracinės sekos narys r_0 , o kiti sekos, aproksimuojančios šaknį nariai randami tokiu būdu:

$$r_n = r_{n-1} - \frac{\phi(r_{n-1})}{\phi'(r_{n-1})}.$$

Aišku, kad jei r_0 yra artimas lygties šakniai, tai seka r_n konverguoja prie šaknies r .

Detaliau panagrinėkime Niutono metodo taikymą apytikslei bifurkacinių taškų paieškai.

Taigi, taikome Niutono metodą funkcijai

$$\phi(c) = f_c^{2^{n-1}}(x_0) - x_0, \quad f_c(x) = x^2 + c,$$

čia x_0 yra funkcijos f_c kritinis taškas. Aišku, kad šiuo atveju taškas x_0 yra transformacijos $f_c - 2^{n-1}$ -ojo periodiškumo taškas. Funkcijos $\phi(c)$ reikšmė yra apskaičiuojama nagrinėjant seką $x_k = f_c(x_{k-1})$. Beje, išvestinė $\phi'(c)$ taip pat skaičiuojama iteruojant.

Tada $c_{k+1} = N(c_k)$, $N(c) = c - \frac{\phi(c)}{\phi'(c)}$, išvestinė skaičiuojama c atžvilgiu.

Taigi, šiuo atveju rekursyviai apibrėžiame funkciją $x_k(c)$:

$$x_0(c) = x_0, \quad x_1(c) = x_0^2 + c, \dots, x_{k+1}(c) = f_c(x_k),$$

be to

$$x'_k(c) = f'_c(x_{k-1}) = 2x_{k-1}x'_{k-1}(c) + 1,$$

čia išvestinė skaičiuojama kintamojo c atžvilgiu. Taigi, tegu $N = 2^{n-1}$. Tada

$$\phi(c) = x_N - x_0, \quad \phi'(c) = x'_N(c).$$

Be to kiekviename iteraciniame žingsnyje ϕ ir ϕ' skaičiuojame remdamiesi tokia iteracine schema:

$$x_{k+1} = x_k^2 + c, \quad x_0(c) = x_0;$$

$$x'_{k+1} = 2x_k x'_k(c) + 1, \quad x_0(c) = 0, \quad k = 0, \dots, N-1.$$

Naudodami Niutono metodą sekančiai c reikšmei mes iteratyviai skaičiuojame ϕ ir ϕ' .

Tarkime, kad tokiu būdu apskaičiuojame $c_1^*, \dots, c_n^* \dots$

Apibrėžkime dydį

$$d_n^* = c_{n-1}^* - \frac{c_{n-2}^*}{c_n^* - c_{n-1}^*}, \quad n \geq 3.$$

Tuo atveju, kai c_1^*, c_2^* yra žinomos, tai tada

$$c_n^* \approx c_{n-1}^* + \frac{c_{n-1}^* - c_{n-2}^*}{d_n^*}.$$

Tinkamą pradinę sekos c_n^* iteracinę reikšmę x_0 gausime paskutiniame sąryšyje, d_N pakeitę dydžiu d_n^* , tada

$$d_n^* = \frac{c_{n-1}^* - c_{n-2}^*}{c_n^* - c_{n-1}^*}, \quad n = 2, 3, \dots$$

Šiuo atveju kyla pradinių reikšmių problema, t.y. kai $n = 1, 2$, kuri išsprendžiama parinkus $d_1^* = d_2^* = 4$.

Pastebėsime, kad $c_\infty = -1.401155 \dots$

Reikia atsakyti dar į vieną klausimą: kada reikia nutraukti iteracinį procesą? Paprastai skaičiuojame tol, kol

$$\frac{x_n - x_{n-1}}{x_n} < \epsilon,$$

t.y. kol santykinė paklaida tampa mažesnė už kompiuterio nulį. (Kompiuterio nulis yra toks mažiausias teigiamas skaičius ϵ , kad $1 + \epsilon > 1$.)

Detaliau panagrinėkime logistinę transformaciją

$$f_c(x) = cx(1 - x).$$

Visų pirma pastebėsime, kad jei $x \notin [0, 1]$, tai

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_c^n(x) = \infty.$$

Kaip ir aukščiau nagrinėtu atveju, norint rasti transformacijos nejudamus taškus sprendžiame lygtį: $x = f_c(x)$. Išsprendę randame du nejudamus taškus: $x^* = 0$ ir $x_0 = \frac{c-1}{c}$. Pastebėsime, kad

$$f'_c(x) = c(1 - 2x).$$

Vadinasi, taškas x^* yra asimptotiškai stabilus, t.y. f' artėja prie nulio, kai $c \rightarrow -\infty$ ir nestabilus, kai $c \notin [0, 1]$. Tuo atveju, kai $c \in (1, 3)$, tai x^* yra nestabilus, o taškas x_0 yra asimptotiškai stabilus. Tada, kai $c = 3$, tai $f'_c(\frac{2}{3}) = -1$. Dar daugiau, $f_c^2(\frac{2}{3}) = \frac{2}{3}$, ir $(f_c)'_c(\frac{2}{3}) = 1$. Be to

$$\frac{\partial f_c^2}{\partial c}\left(\frac{2}{3}\right) = 0, \quad \frac{\partial^2 f_c^2}{\partial x^2}\left(\frac{2}{3}\right) = 0, \quad \frac{\partial^2 f_c^2}{\partial c \partial x}\left(\frac{2}{3}\right) = 2, \quad \frac{\partial^3 f_c^2}{\partial x^3}\left(\frac{2}{3}\right) = -108.$$

Taigi, parametro $c \geq 3$ reikšmei, taškas $x_2 = \frac{r-1}{r}$ tampa nestabiliu.

Sprendami lygtį

$$f_c^2(x) = x$$

be jau žinomų transformacijos nejudamų taškų x^*, x_0 randame dar du nejudamus taškus, kurie yra pradinės transformacijos antrojo periodiškumo taškai. T.y.

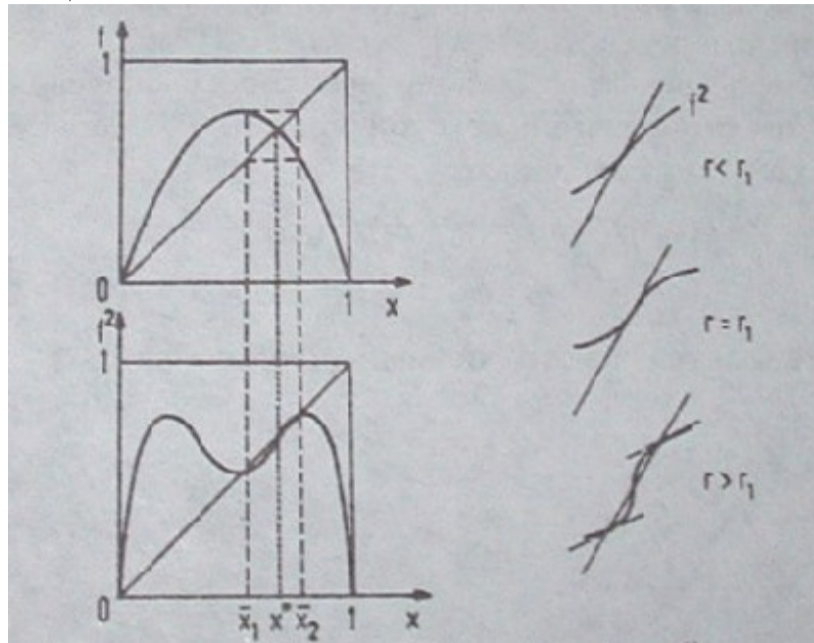
$$x_{1,2} = \frac{1}{2c}(c + 1 \pm \sqrt{c^2 - 2c - 3}), \quad c \geq 3.$$

Ciklo stabilumo sritį, tarp šių taškų, randame sprenddami nelygybę

$$\left| \frac{\partial f_c}{\partial x}(x_1) \cdot \frac{\partial f_c}{\partial x}(x_2) \right| < 1.$$

Iš paskutiniosios nelygybės išplaukia 2-os eilės ciklo asimptotinio stabilumo sritis: $3 < c < 1 + \sqrt{6}$. Jei $c > 1 + \sqrt{6}$, tai sistema yra neaprežta. Pastebėsime, kad transformacija f^2 turi tris ekstremumus x^*, x_1, x_2 , šiuose taškuose antroji iteracija lygi nuliui. Žemiau pateiktame pav. viršuje pateikiama pirmoji iteracija ir jos nejudamas taškas x^* , o apatiniame grafike

pateikiamas f^2 grafikas, bei nejudami taškai x^*, x_1, x_2 . Beje, taškai x_1 ir x_2 yra stabilūs antros iteracijos taškai, o x^* – nestabilus taškas.



5 pav.

Aišku, kad jei taškas x^* yra transformacijos nejudamas taškas, tai jis yra ir nejudamas taškas bet kokios eilės iteracinės sekos nariui. Ir analogiškai, jei taškas kokiai nors parametro reikšmei tampa nestabilus, tai jis yra nestabilus ir visoms aukštesnės eilės iteracijoms, kai parametro reikšmė fiksuota. Tai išplaukia iš to, kad nestabilaus taško atveju $|f'(x^*)| > 1$.

Pastebėsime, kad jei $r < 3$, tai x^* buvo stabilus transformacijos taškas, tuo tarpu kai $r > 3$, tai šis taškas tampa transformacijos f_r^2 (ir aukštesnės eilės iteraciniams nariams) nestabiliu tašku. Tuo tarpu transformacijos f_r^2 stabilūs nejudami taškai yra antrojo periodiškumo taškai, kurie kartais dar vadinami transformacijos f_r^2 atraktoriaus taškais. Suprantama, kad $f(x_1) = x_2$, $f(x_2) = x_1$. Jeigu toliau didinsime parametą r , tai rasime reikšmę r_2 tokią, kad jei $r > r_2$, tai tai transformacijos f_r^2 nejudami taškai x_1 ir x_2 taps nestabiliais taškais kartu, kadangi

$$(f_r^2)'(x_1) = (f_r^2)'(x_2).$$

Ir t.t.

Tarkime, kad $\{c_k, k \in \mathcal{N}\}$ yra bifurkacinių taškų seka. Ši seka yra tokia, kad 2^k taškų ciklas $\{x_{k,1}, \dots, x_{k,2^k}\}$ yra stabilus, jei parametras $c \in (c_k, c_{k+1})$. Taigi

$$f_c^{2^k}(x_{k,i}) = x_{k,i}.$$

Dar daugiau, visiems $i = 1, 2, \dots, 2^k$

$$\frac{\partial f_{c_k}^{2^k}}{\partial x}(x_{k,i}) = 1, \quad \frac{\partial f_{c_{k+1}}^{2^k}}{\partial x}(x_{k,i}) = -1.$$

Beje, $x_{k,i} = x_{k,i}(c)$.

Tuo atveju, kai $r_{n-1} < r < r_n$, tai egzistuoja transformacijos f_r , 2^{n-1} stabilus ciklas $x^*_0, x^*_1, \dots, x^*_{2^{n-1}-1}$, kuris charakterizuojamas tokiu būdu:

$$\begin{aligned} f_r(x^*_i) &= x^*_{i+1}, \quad f_r^{2^{n-1}}(x^*_i) = x^*_i, \\ (f_r^{2^{n-1}})'(x^*_0) &= \prod_i |(f_r(x^*_i))'| < 1. \end{aligned}$$

Tada, kai $r = r_n$, tai atvaizdis

$$f_r^{2^n} = f_r^{2^{n-1}} \circ f_r^{2^{n-1}}$$

”bifurkuoja”, t.y. kai $r > r_n$ atsiranda naujas dvigubai didesnis ciklas, kuris yra stabilus, o tuo tarpu buvusio ciklo taškai tampa nestabiliais, ir taip toliau.

Ciklą vadinsime superstabilium, jei šio ciklo išvestinės reikšmė pradiniam ciklo taške lygi nuliui. Kitaip tariant

$$(f_{R_n}^{2^n})'(x^*_0) = \prod_i f'_{R_n}(x^*_i) = 0.$$

Taigi, 2^n eilės superciklą charakterizuosime parametru R_n . Grįžkime prie logistinės transformacijos. Nesunku pastebėti, kad $x^*_0 = 0.5$ yra vienintelis taškas kuriame išvestinė lygi nuliui. Kitaip tariant R_n yra transformacijos parametro reikšmė, kuriam priklauso transformacijos lokalinio ekstremumo taškas (20 pav.). Simboliu d_n pažymėkime atstumą tarp ciklo taškų, x^*_0 ir $x_1 = f_{R_n}^{2^{n-1}}$ t.y

$$d_n = (f_{R_n}^{2^{n-1}})(x^*_0) - x^*_0.$$

Nagrinėjamu atveju turime, kad $x^*_0 = 0.5$. Atlikę koordinačių keitimą taip, kad koordinačių pradžios taškas sutaptų su x^*_0 gauname, kad

$$d_n = f_{R_n}^{2^{n-1}}(0).$$

Beje, nagrinėjant transformaciją $f_c(x) = x^2 + c$ to daryti nereikėtų, kadangi šiuo atveju ekstremumo taškas yra koordinačių pradžios taške.

Pastebėję, kad

$$\frac{d_n}{d_{n+1}} = -\alpha + o(1),$$

kai $n \rightarrow \infty$ gauname, kad

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (-\alpha)^n d_{n+1} = d_1$$

arba

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (-\alpha)^n f_{R_{n+1}}^{2^n}(0) = d_1.$$

Natūraliai kyla klausimas- ar galima apibendrinti paskutiniąją lygybę - t.y. gal galima rasti funkciją $g_1(x)$ tenkinančią sąryšį

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (-\alpha)^n f_{R_{n+1}}^{2^n} \left(\frac{x}{(-\alpha)^n} \right) = g_1(x),$$

kuri būtų universali visoms, tam tikros klasės, funkcijoms?

Apibrėžkime funkcijų šeimą tokiu būdu:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (-\alpha)^n f_{R_{n+i}}^{2^n} \left(\frac{x}{(-\alpha)^n} \right) =: g_i(x), \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

Visos šios funkcijos susietos "dvigubavimo" operatoriumi T tokiu būdu:

$$g_{i-1}(x) = (-\alpha)g_i \left(g_i \left(\frac{x}{(-\alpha)} \right) \right) \equiv Tg_i(x), \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

Tai išplaukia iš tokių sąryšių:

$$\begin{aligned} g_{i-1}(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} (-\alpha)^n f_{R_{n+i-1}}^{2^n} \left(\frac{x}{(-\alpha)^n} \right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (-\alpha)(-\alpha)^{n-1} f_{R_{n-1+i}}^{2^{n-1+1}} \left(\frac{x}{(-\alpha)(-\alpha)^{n-1}} \right) =: \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (-\alpha)(-\alpha)^m f_{R_{m+i}}^{2^m} \left(\frac{1}{(-\alpha)^m} (-\alpha)^m f_{R_{m+i}}^{2^m} \frac{x}{(-\alpha)(-\alpha)^m} \right) \\ &= -\alpha g_i \left(g_i \left(-\frac{x}{\alpha} \right) \right). \end{aligned}$$

Tada ribinė funkcija

$$g(x) = \lim_{i \rightarrow \infty} g_i(x)$$

yra aukščiau apibrėžto operatoriaus T nejudamas taškas, t.y.

$$g(x) = Tg(x) = -\alpha g \left(g \left(-\frac{x}{\alpha} \right) \right) \quad (x).$$

Formaliai žiūrint, iš šios lygybės galime gauti konstantos α reikšmę:

$$g(0) = -\alpha g(g(0)).$$

Pastebėkime, kad ir funkcija $kg\left(\frac{x}{k}\right)$, taip pat yra operatoriaus T nejudamas taškas, bet kokiai konstantai k , tai k galime fiksuoti lygybe $g(0) = 1$.

Operatorinės lygties (x) sręsti nemokame, tačiau šiuo atveju kai kuriuos lygties apytikslus sprendinius galima atspėti, pavyzdžiui parenkant

$$g(x) = 1 + cx^2.$$

Naudodamiesi (x) lygybe gauname, kad

$$1 + bx^2 = -\alpha(1 + b) - \left(\frac{2b^2}{\alpha} \right) x^2 + O(x^4).$$

Iš pastarojo sąryšio išplaukia, kad

$$b = \frac{(-2 - \sqrt{12})}{4} \approx -1.366, \quad \alpha = |2b| \approx 2.73.$$

Freigenbaumo nustatyta ribinė funkcija yra

$$g(x) = 1 - 1.52763x^2 + 0.104815x^4 - 0.0267057x^6 + \dots, \quad \alpha = 2.502807876.$$

Detaliau panagrinėkime kvadratinės funkcijos superciklus.

Taigi, jei x^*_0 yra funkcijos $f_{R_n}^{2^n}$ nejudamas taškas, tai

$$0 = (f_{R_n}^{2^n})'(x^*_0) - x^*_0.$$

Nagrinėjamu atveju turime, kad $x^*_0 = 0.5$. Atlikę koordinatų keitimą taip, kad koordinatų pradžios taškas sutaptų su x^*_0 gauname, kad

$$0 = f_{R_n}^{2^n}(0) \tag{x1}.$$

Ši lygtis turi begalo daug sprendinių, kadaqngi šią lygtį tenkina superciklai, kurie pasirodo Freigenbaumo atraktoriaus chaoso lange. Tam, kad nustatyti superciklus generuojančias transformacijas $f_{R_n}^{2^n}$ mes turime spręsti lygtis (x1) pradedant nuo $n = 0$. Tokiu būdu sudarysime seką

$$r_1 < R_1 < r_2 < R_2 < r_3 \dots < r_n < R_n < r_{n+1} < \dots$$

Skaičiai R_n parodo, kaip greitai yra artėjama prie chaoso konstantos $c = \lim_n R_n = \lim_n r_n$. Pažymėkime šį artėjimo greitį

$$R_n - R_\infty = \frac{1}{\delta^n}.$$

Užrašykime funkcijos $f_R(x)$, kintamojo R atžvilgiu, skleidinį taške R_∞ :

$$f_R(x) = f_{R_\infty}(x) + (R - R_\infty) \frac{\partial f_R(x)}{\partial R} \Big|_{R_\infty}.$$

Taikome operatorių T funkcijos f_R skleidiniui. Gauname, kad

$$Tf_R = Tf_{R_\infty} + (R - R_\infty) L_{f_{R_\infty}} \frac{\partial f_R(x)}{\partial R} \Big|_{R_\infty} + O\left(\left(\frac{\partial f_R(x)}{\partial R} \Big|_{R_\infty}\right)^2\right),$$

čia

$$L_f \frac{\partial f_R(x)}{\partial R} \Big|_{R_\infty} = -\alpha \left(f' \left(f \left(-\frac{x}{\alpha} \right) \right) \frac{\partial f_R(-\frac{x}{\alpha})}{\partial R} \Big|_{R_\infty} + \frac{\partial f_R(f(-\frac{x}{\alpha}))}{\partial R} \Big|_{R_\infty} \right).$$

Matome, kad L_f priklauso tik nuo funkcijos f . Atlikę n iteracijų gauname, kad

$$T_{f_R}^n = T^n f_{R_\infty} + (R - R_\infty)L_{T^{n-1}f_{R_\infty}} \dots L_{f_{R_\infty}} \frac{\partial f_R(x)}{\partial R} \Big|_{R_\infty} + O\left(\left(\frac{\partial f_R(x)}{\partial R} \Big|_{R_\infty}\right)^2\right). \quad (u)$$

Pastebėsime, kad seka $Tf_{R_\infty}^n$ konverguoja prie nejudamo taško:

$$Tf_{R_\infty}^n(x) \equiv (-\alpha)^n f_{R_\infty}^{2^n} \left(\frac{x}{(-\alpha)^n} \right) =: g(x), \quad n \geq 1,$$

ir (u), kai $n \rightarrow \infty$ tampa tokiu reiškiniu:

$$T_{f_R}^n(x) \equiv g(x) + (R - R_\infty)L_g^n \frac{\partial f_R(x)}{\partial R} \Big|_{R_\infty}, \quad n \geq 1.$$

Pastarąjį reiškinį galima supaprastinti, jei išskleisime reiškinį

$$\frac{\partial f_R(x)}{\partial R} \Big|_{R_\infty}$$

operatoriaus L_g tikrinėmis funkcijomis:

$$L_g \varphi_n, \quad \delta f = \sum_n c_n \varphi_n, \quad n \geq n_0,$$

$$L_g^n \left(\frac{\partial f_R(x)}{\partial R} \Big|_{R_\infty} \right) = \sum_m c_m \lambda_m^n \varphi_m, \quad (v)$$

ir tarsime, kad bent viena iš tikrinių reikšmių yra didesnė už vieneta: $\lambda_1 > 1$, $|\lambda_m| < 1$, $m \neq 1$. Tada reiškinys (v) asimptotiškai priklausys tik nuo pirmosios tikrinės reikšmės λ_1 .

Kitaip tariant, kai $n \geq n_0$, tai

$$T_{f_{R_n}}^n(x) \approx g(x) + (R - R_\infty)\delta^n ah(x), \quad n \geq n_0, \quad (u_1)$$

čia $c_1 = a$, $\varphi_1 = h$, $\lambda_1 = \delta$. Beje, šiuo atveju tikrinė reikšmė sutampa su Freigenbaumo konstanta, kadangi paėmę $x = 0$ ir $R = R_n$ iš (u₁) gauname, kad

$$T_{f_{R_n}}^n(0) = g(0) + (R_n - R_\infty)\delta^n ah(0), \quad n \geq n_0, \quad (u_2)$$

o remiantis tuo, kad ekstremumo taškas yra nulis, o parametrai R_n tokie, kad šis taškas priklauso superciklui gauname, kad

$$T_{f_{R_n}}^n(0) = (-\alpha)^n f_{R_n}^{2^n}(0) = 0.$$

Vadinasi, remdamiesi tuo, kad $g(x) = 1$ gauname, kad

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (R_n - R_\infty)\delta^n = \frac{-1}{ah(0)} = c.$$

Paskutinį ribinį sąryšį galima apibendrinti. Apibrėžkime

$$\mu := (f_r^{2^n})'(x^*_0) = \prod_i f'_r(x^*_i)$$

ir charakterizuokime r naudodamiesi pora (n, μ) , kaip ir parodyta pav (26)

Tada remiantis (u2) gauname, kad

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (R_n - R_\infty) \delta^n = \frac{g_{0,\mu} - g(0)}{ah(0)},$$

čia $g(x)$ yra universali funkcija priklausanti nuo μ , apibrėžta tokiu būdu:

$$g_{0,\mu}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} (-\alpha)^n f_{R_n,\mu}^{2^n} \left(\frac{x}{(-\alpha)^n} \right).$$

Bifurkaciniuose taškuose r_n , $\mu = 1$. (pav 26) Vadinasi atstumas gretimų bifurkacinių taškų r_n taip pat nusakomas Freigenbaumo konstanta δ kaip ir superstabilių ciklų parametrai R_n (beje), juose $\mu = 0$. Vadinasi

$$r_n - r_\infty \sim \delta^{-n}.$$

Antra vertus, remiantis tuo, kad

$$r_n \leq R_{n,\mu} \leq r_{n+1}$$

ir tuo, kad $r_n - r_{n+1} \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, tai gauname, kad

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_{n,\mu} = R_\infty = r_\infty.$$

Parodysime, kaip galima rasti Freigenbaumo konstantą, sprendžiant funkcionalinę lygtį:

$$\begin{aligned} L_g h(x) &= -\alpha \left(g' \left(g \left(-\frac{x}{\alpha} \right) \right) h \left(-\frac{x}{\alpha} \right) + \right. \\ &\quad \left. h \left(g \left(-\frac{x}{\alpha} \right) \right) \right) = \delta h(x). \end{aligned}$$

Norėdami supaprastinti skaičiavimus palikime funkcijos $h(x)$ skleidinyje pirmąjį narį $h(0)$. Tada paskutinioji lygybė tampa tokia:

$$-\alpha(g'(g(0)) + 1) = \delta. \quad (y)$$

Pastebėsime, kad funkcijos, kuri turi maksimumą, kurio antroji išvestinė nelygi nuliui ($g''(0) \neq 0$) reikšmę $g'(g(0)) = 1$ gali būti suskaičiuota, jei du kartus diferencijuosime nejudamo taško lygtį (x). Gauname

$$g''(x) = - \left(g'' \left(g \left(-\frac{x}{\alpha} \right) \right) \left(g' \left(-\frac{x}{\alpha} \right) \right)^2 + \frac{1}{\alpha} g' \left(g \left(-\frac{x}{\alpha} \right) \right) \left(g'' \left(-\frac{x}{\alpha} \right) \right) \right).$$

Iš čia gauname, kad

$$g'(1) = -\alpha.$$

Vadinasi, (y) lygtį galima perrašyti tokiu būdu:

$\delta = \alpha^2 - \alpha$. Pastebėsime, kad jei funkcijos maksimumo eilė yra $2k$, tai galime gauti

$$\delta = \alpha^{1+z} - \alpha.$$

Įrašę gautą reikšmę $\alpha 2.73$ gauname, kad $\delta \approx 4.72$

Apibendrinkime tai, kas buvo pasakyta aukščiau, naudodami kiek kitus argumentus. Būtent, Freigenbaumas nustatė, kad sekos $\{c_n\}$ narių santykis yra universalus, tam tikra prasme. Tiksliau kalbant, jei nagrinėsime iteracinę seką

$$x_{k+1} = f_c(x_k)$$

ir stebėsime su šia seka susijusią bifurkacinių taškų seką, tai bifurkacinių taškų seka taip pat turi ribą, be to transformacija f_c yra *unimodulari*, t.y. yra tolydi, turi vienintelį maksimumo tašką x_c ir tenkina sąryšį

$$f_c(x_c) - f_c(x) \sim (x_c - x)^2.$$

Pastebėsime, kad jei maksimumo eilė yra kita, tai ir santykis yra kitas.

Panagrinėkime transformaciją:

$$g_c(x, a) = 1 - ax^c, \quad c > 1.$$

Jau esame nagrinėję, kad tuo atveju, kai $c = 2$, tai logistinė transformacija f_2 ir transformacija $g_2(x, a)$ yra ekvivalenčios, beje šias transformacijas siejanti transformacija yra $l(x)$ yra apibrėžta tokiu būdu:

$$l(x) = (0.25r - 0.5)x + 0.5,$$

o parametrai a ir c tenkina lygtį:

$$r^2 - 2r - 4a = 0.$$

Pastebėsime, kad šiuo atveju parametro c ir Freigenbaumo konstantos δ ryšys apibrėžtas tokia lentele:

c	2	4	6	8
δ	4.665	7.284	9.296	10.948

3.3 Šarkovskio periodiškumas

Lema Tarkime, kad (Y, d) kokia nors metrinė erdvė. Tegu $X \subset Y$ kompaktiška ir netuščia aibė. Be to, tarkime, kad $f : X \rightarrow Y$ yra tolydus atvaizdis, turintis savybę $f(X) \supset X$. Apibrėžkime

$$g(A) = f^{-1}(A), \quad A \in H(X).$$

Tada g yra erdvės (X, ρ) transformacija, t.y. $g : X \rightarrow X$.

Transformacijos g nejudamas taškas $A \subset X$, apibrėžiamas tokiu būdu:

$$A = \bigcap_{n=0}^{\infty} f^{-n}(X) = \lim_{n \rightarrow \infty} g^n(X).$$

⊖

Visų pirma parodysime, kad g yra fraktalų erdvės (X, ρ) atvaizdis į save pačią. Tarkime, kad $B \subset X$. Kadangi $f(X) \supset X$, tai $f^{-1}(B) \subset X$, be to, $f^{-1}(B)$ yra netuščia. B yra kompaktiška, taigi ir uždara metrinės erdvės (X, d) aibė. Kadangi atvaizdis f yra tolydus, tai ir $f^{-1}(B)$ taip pat uždara. Remdamiesi prielaidomis turime, kad $f^{-1}(B) \subset X$. Kadangi $f^{-1}(B)$ yra metrinės erdvės (X, d) uždara aibė, o X kompaktiška, tai aibė $f^{-1}(B)$ taip pat kompaktiška. Taigi parodėme, kad apibrėžtoji transformacija atvaizduoja erdvę į save pačią.

Parodysime, kad šios transformacijos nejudamas taškas apibrėžiamas teoremoje nurodytu būdu. Pastebėsime, kad iš sąryšio $f(X) \supset X$ išplaukia $X \supset f^{-1}(X)$. Nesunku suprasti, kad

$$X \supset f^{-1}(X) \supset f^{-2}(X) \supset \dots \supset f^{-n}(X) \supset \dots$$

Taigi, $\{f^{-n}(X)\}$ yra Koši seka erdvėje (X, ρ) . Kadangi erdvė pilna, tai šios sekos ribinis taškas $A \in X$. Taigi,

$$A = \bigcap_{n=0}^{\infty} f^{-n}(X) = \lim_{n \rightarrow \infty} g^n(X).$$

Mums liko parodyti, kad A yra transformacijos W nejudamas taškas. Kitaip tariant įsitikinsime, kad

$$f^{-1}\left(\bigcap_n A_n\right) = \bigcap_n A_n,$$

čia $A_n = f^{-n}(X)$, $n = 1, \dots$

Remdamiesi atvaizdžio f tolydumu gauname, kad

$$f^{-1}\left(\bigcap_n A_n\right) = \bigcap_n f^{-1}(A_n) = \bigcap_n A_{n+1} = \bigcap_n A_n.$$

⊕

2 Teorema Tarkime, kad $I \subset \mathcal{R}$, o atvaizdis $f : I \rightarrow I$ yra tolydus. Jeigu ši transformacija turi trečiojo periodiškumo tašką, tai ji turi ir bet kokios eilės periodiškumo taškų.

Tarkime, kad $n = 2$. Tada pastebėsime, kad egzistuoja intervalas $J \subset [a, b]$ toks, kad $f(J) = [b, c]$. Todėl

$$f^2(J) \supset f([b, c]) \supset [a, b]$$

ir remiantis paskutiniąja lema gauname, kad f^2 turi nejudamą tašką intervale J . Be to šis taškas yra periodinis, o jo periodas lygus 2.

Tarkime, kad $n \geq 3$. Tarkime, kad taško orbita lygi 3, o ją sudarantis ciklas yra $\{a, b, c, a, b, \dots\}$. Tegu $a < b$ ir $a < c$. Galimi du atvejai: $a < b < c$ arba $b < a < c$. Panagrinękime atvejį, kai $a < b < c$. Pastebėsime, kad šiuo atveju

$$f([a, b]) \supset [b, c], \quad \text{ir} \quad f([b, c]) \supset [a, b].$$

Panagrinękime intervalų seką: I_1, I_2, \dots tokią, kad

$$f(I_1) = [b, c], \quad f(I_2) = I_1, \dots, f(I_n) = I_{n-1},$$

be to intervalas $I_{n-1} \subset [a, b]$, o visi kiti intervalai $I_i \subset [b, c]$, $i = 1, \dots, n, i \neq n-1$.

Jei tokią intervalų seką pavyktų sukonstruoti, tai tada turėtume, kad $f^n(I_n) = [b, c]$. Remiantis paskutiniąja lema gauname, kad egzistuoja transformacijos f^n nejudamas taškas $p \in I_n \subset [b, c]$. Pastebėsime, kad $f(p) \in [a, b]$, o iteraciniai šios transformacijos nariai priklauso intervalui $[b, c]$. Bet tada, taškas p yra transformacijos f , n -ojo periodo taškas. Bet tai ir reikėjo įrodyti. Visa problema- sukonstruoti minėtą intervalų seką.

Konstruojame šią seką. Turime, kad $f[b, c] \supset [b, c]$. Vadinasi, egzistuoja intervalas $I_1 \subset [b, c]$ toks, kad $f(I_1) = [b, c]$. Analogišku būdu konstruojame ir intervalą $I_2 \subset I_1$ tokį, kad $f(I_2) = I_1$. Tęsdami šią procedūrą, mes sudarome intervalų įdėtų intervalų seką

$$I_{n-2} \subset \dots \subset I_1 \subset [b, c].$$

Kadangi $f([a, b]) \supset [b, c] \supset I_{n-2}$, tai egzistuoja intervalas $I_{n-1} \subset [a, b]$ toks, kad $f(I_{n-1}) = I_{n-2}$. Be to $f([b, c]) \supset [a, b] \supset I_{n-1}$ tai egzistuoja intervalas $I_n \subset [b, c]$ toks, kad $f(I_n) = I_{n-1}$.

Teoremos įrodymą baigiame pastebėję, kad kai $n = 1$, tai teoremos prielaida išplaukia iš paskutiniosios lemos.

Žemiau pateikta teorema apibendrina šį rezultatą.

Sutvarkykime natūraliųjų skaičių aibę tokiu būdu:

$$3 \prec 5 \prec 7 \prec \dots \prec 2 \cdot 3 \prec 2 \cdot 5 \prec 2 \cdot 7 \prec \dots$$

$$\prec 2^2 \cdot 3 \prec 2^2 \cdot 5 \prec 2^2 \cdot 7 \prec \dots \prec 2^n, \prec 2^{n-1} \prec \dots \prec 2 \prec 1.$$

3 Teorema (Šarkovskio) Tarkime, kad $I \subset \mathcal{R}$ yra intervalas. Tegu transformacija $f : I \rightarrow I$ yra tolydi. Jeigu egzistuoja transformacijos f taškas, kurio periodas yra n , tai egzistuoja šios transformacijos k -ojo periodiškumo taškai, $\forall k, n \prec k$.

Remiantis šia teorema galime tvirtinti, kad funkcijos f taškų orbitos yra baigtinio periodiškumo tik tuo atveju, kai šios transformacijos periodai yra dvejetainiai, t.y. jei egzistuoja n , toks, kad periodai yra $2^n, 2^{n-1}, \dots, 2, 1$.

Pastebėsime, kad Šarkovskio teorema galioja tik realaus argumento realių reikšmių funkcijoms.

3.4 Jungtiniai atvaizdžiai

Apibrėžimas Sakykime, kad $f : X \rightarrow X$, $g : Y \rightarrow Y$ ir be to $h : X \rightarrow Y$ siurjektyvus atvaizdis. Sakysime, kad transformacija h sieja transformacijas f ir g (f, g yra jungtiniai atvaizdžiai h atžvilgiu) jeigu:

$$h \circ f \circ h^{-1} = g$$

arba

$$h \circ f = g \circ h.$$

Pastebėsime, kad jei

$$g = h \circ f \circ h^{-1},$$

tai

$$g^n = h \circ f^n \circ h^{-1}.$$

Apibrėžkime transformaciją $T : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ tokiu būdu:

$$T(x) = \begin{cases} 2x, & x \in [0, 0.5], \\ -2x + 2, & x \in [0.5, 1]. \end{cases}$$

Pasirodo, kad transformacijas T ir $f_4(x) = 4x(1-x)$, $f_4 : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ sieja transformacija

$$h(x) = \sin^2\left(\frac{\pi x}{2}\right); \quad L_4 \circ h = h \circ T.$$

Įrodykime šį sąryšį.

Pažymėkime $\theta = \frac{\pi x}{2}$. Remdamiesi sinuso apibrėžimu tvirtiname, kad $h(x)$ didėja, kai x kinta nuo 0 iki 1. Be to šiame intervale funkcija tolydi, o kadangi ir griežtai monotoniška, tai turi ir atvirkštinę. Kadangi $h'(0) = h'(1) = 0$, tai atvirkštinė funkcija h^{-1} nėra diferencijuojama taškuose 0 ir 1.

Turime, kad

$$L_4(h(x)) = 4(\sin^2 \theta)(1 - \sin^2 \theta) = \sin^2(2\theta) = \sin^2(\pi x).$$

Tada, kai $x \in [0, 0.5]$ turime, kad

$$L_4(h(x)) = h(2x) = h(T(x)).$$

Tada, kai $x \in [0.5, 1]$, tai

$$h(T(x)) = h(2 - 2x) = \sin^2(\pi - \pi x) = \sin^2(2\theta) = L_4(h(x)).$$

Jei atvaizdis h yra bijektyvus, turintis tolydų atvirkštinį atvaizdį (homeomorfizmas), tai laikydami, kad p yra transformacijos f n -ojo periodiškumo taškas ($f^n(p) = p$) gauname, kad

$$g^n(h(p)) = h \circ f^n(p) = h(p) \text{ jei, } h \circ f = g \circ h.$$

Tarkime, kad f, g yra tolydūs, griežtai monotoniškai siurjektyvūs atvaizdžiai, apibrėžti intervale $[0, 1]$. Pasirodo, kad jei šių atvaizdžių grafikai (kartu) arba virš $y = x$ tiesės arba po šia tiese intervale $[0, 1]$, tai šie atvaizdžiai yra jungtiniai.

4 Teorema Tarkime, kad f, g yra tolydžios, griežtai monotoniškos funkcijos, apibrėžtos intervale $[0, 1]$ tenkinančios sąlygas:

$$f(0) = g(0) = 0, \quad f(1) = g(1) = 1, \quad f(x) < x, \quad g(x) < x, \quad x \neq 0, 1.$$

Tada egzistuoja tolydi, didėjanti funkcija h , apibrėžta intervale $[0, 1]$, tenkinanti sąlygas:

$$h(0) = 0, \quad h(1) = 1, \quad h \circ f = g \circ h.$$

⊖

Tarkime, kad $(x_0, y_0) \in K$, $K = \{(x, y), x, y \in (0, 1)\}$.

Jeigu $(x_0, y_0) \in G_h$, t.y. priklauso funkcijos h grafikui, tai iš sąryšio $h \circ f = g \circ h$ išplaukia, kad

$$(x_1, y_1) \in G_h, \quad x_1 = f(x_0), \quad y_1 = g(y_0).$$

Naudodamiesi indukcija nesunkiai gauname, kad

$$(x_n, y_n) \in G_h, \quad x_n = f^n(x_0), \quad y_n = g^n(y_0).$$

Remdamiesi prielaida (funkcijos griežtai didėjančios) gauname, kad

$$x_0 > x_1 > \dots > x_n.$$

Kadangi lygtis $f(x) = x$ sprendinių neturi, intervale $[0, 1]$, tai akivaizdu, kad $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$. Visiškai analogiškai samprotaudami gauname, kad $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$. Vadinasi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, y_n) = (0, 0).$$

Pasirinkime bet kokią, griežtai monotonišką funkciją $y = h(x)$, apibrėžtą intervale $x \in [x_1, x_0]$, tenkinančią sąryšius:

$$h(x_1) = y_1, \quad h(x_0) = y_0.$$

Intervale $[x_2, x_1]$ šią funkciją apibrėžkime sąryšiu:

$$h(x) = g(h(f^{-1}(x))).$$

Beje,

$$h(x_1) = g(h(f^{-1}(x_1))) = g(h(x_0)) = g(y_0) = y_1.$$

Funkcijos f, g yra monotoniškos ir tolydžios be to funkcijo $h(x)$ taip pat monotoniška intervale $[x_1, x_0]$, tai darome išvadą, kad funkcija h taip pat monotoniška ir intervale $[x_2, x_1]$. Dar daugiau, ji monotoniška ir tolydi intervale $[x_2, x_0]$. Tęskime funkcijos h konstrukciją analogišku būdu iki intervalo $[x_{n+1}, x_n], n \geq 0$ funkcijai

$$h(x) = g^n(h(f^{-n}(x))).$$

Pažymėję $h(0) = 0$ mes sukonstruojame didėjančią funkciją, apibrėžtą intervale $[0, x_0]$. Pratęšę šią funkciją intervale $[x_0, 1]$ gauname teoremos įrodymą.

⊕

Išvada Tarkime, kad f, g yra tolydžios, didėjančios funkcijos, apibrėžtos taško 0 aplinkoje, tenkinančios sąlygas:

$$f(0) = g(0) = 0, \quad |f(x)| < |x|, \quad |g(x)| < |x|, \quad x \neq 0.$$

Tada egzistuoja homeomorfizmas h , apibrėžta 0 aplinkoje (ji egzistuoja) tenkinantis sąlygas:

$$h(0) = 0, \quad h \circ f = g \circ h.$$

5 Teorema Sakykime, kad f, g yra dvi diferencijuojamos funkcijos, tenkinančios sąlygas: $f(0) = g(0) = 0$ ir be to

$$0 < f'(0) < 1, \quad 0 < g'(0) < 1. \quad (2)$$

Tada egzistuoja taško 0 aplinka, kurioje galima apibrėžti homeomorfizmą h , siejantį funkcijas f ir g , tenkinantį sąlygą $h(0) = 0$.

Šio teiginio griežtai neįrodinėsime, tik pateiksime kai kuriuos pastebėjimus.

Pastebėsime, kad jei pakeistume sąlygas (2) sąlygomis

$$0 < f'(0), 0 < g'(0); \quad -1 < f'(0) < 0, -1 < g'(0) < 0; \quad -1 > f'(0), -1 > g'(0),$$

tai teoremos išvados būtų tos pačios.

Atkreipsime dėmesį, kad jei $f'(0) \neq g'(0)$ tai h būdamas homeomorfizmu nebus difeomorfizmu, t.y. atvirkštinė nebus diferencijuojama.

Diferencijuodami lygybę $h \circ f = g \circ h$ taške 0 gauname

$$h'(0)f'(0) = g'(0)h'(0),$$

ir jei $h'(0) \neq 0$ gauname, kad $f'(0) = g'(0)$. Jeigu pastaroji lygybė teisinga, ir $|f'(0)| \neq 1$, tai mes galime rasti diferencijuojamą funkciją h , kurios atvirkštinė yra diferencijuojama, be to kuri sieja funkcijas f ir g .

3.5 Chaosas

Šiame skyrelyje nagrinėsime determinuotų dinaminių sistemų, priklausančių nuo parametro, tam tikras savybes, kuriomis pasireiškia sistemos, kai imame nagrinėti šių sistemų iteracijas.

Gana detaliai esame nagrinėję logistinės transformacijos

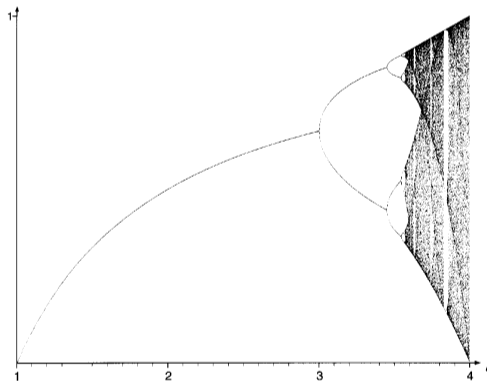
$$f_c = cx(1 - x), \quad x \in [0, 1]$$

iteruojamų taškų elgseną. Priminsime, kad priklausomai nuo parametro c reikšmės priklausau ir iteruojamų taškų asimptotinis elgesys. Kitaip tariant, egzistuoja parametro reikšmių seka $\{c_k\}$ tokia, kad sudarant transformaciją iš parametro reikšmių, kurias skiria vienas sekos narys, gausime transformacijas, kurių periodinių taškų skaičius skirsis dvigubai. Be to 2^k -periodinio taško ciklas yra stabilus, jeigu parametras $c \in (c_k, c_{k+1})$. Dar daugiau

$$\lim_{k \rightarrow \infty} c_k = 3.599692 \dots$$

Natūraliai kyla klausimas- kas atsitinka su transformacijos iteruojamų taškų orbitomis, kai $c > c_\infty$.

Aptarsime šį fenomeną. Žemiau pateiktame grafe matome, kaip vieno taško orbita, kai $c > c_\infty$, aplanko beveik visus intervalo taškus (žr. 7 pav.)



7 pav.

Apibrėžimas Sakysime, kad aibė P yra tiršta aibėje I , jei $\forall \epsilon > 0, B(y, \epsilon) \cap P \neq \emptyset$.

Remiantis šiuo brėžiniu galime daryti prielaidą, kad jei $c > c_\infty$, tai logistinės transformacijos periodinių taškų aibė yra tiršta intervale $[0, 1]$.

6 Teorema Tegu $h : X \rightarrow Y$ yra tolydus siurjektyvus atvaizdis. Jeigu D yra tiršta aibėje X , tai $h(D)$ yra tiršta aibėje Y .

⊖

Tarkime, kad $I \subset Y$ yra atvira, netuščia aibė. Tada $h^{-1}(I)$ yra atvira netuščia aibė. Tarkime, kad $K \subset h^{-1}(I)$ ir $y \in K \cap D$. Taškas y egzistuoja, kadangi D yra tiršta. Bet tada $f(y) \in f(D) \cap I$.

⊕ Transformacijos f periodinių taškų aibę žymėsime simboliu $\mathcal{P}(f)$. Pastebėsime, kad jei funkcijos f, g yra jungtinės, o h jas siejanti funkcija, tai iš sąryšio $f^n(p) = p$ išplaukia sąryšis

$$g^n(h(p)) = h(f^n(p)) = h(p).$$

Vadinasi

$$h(\mathcal{P}(f)) \subset \mathcal{P}(g).$$

Viena svarbiausių chaotinės sistemos savybių-jos priklausomybė nuo pradinių sąlygų bei "maišymo" savybių. Pateiksime matematinius apibrėžimus savokų, kuriomis charakterizuosime chaotines dinamines sistemas.

Tarkime, kad (X, ρ) yra metrinė erdvė.

Apibrėžimas Dinaminę sistemą (X, f) vadinsime tranzityvia, jeigu bet kokiai atvirų aibių porai A ir B galime nurodyti tokį numerį n_0 , kad visiems $n > n_0, f^n(A) \cap B \neq \emptyset$.

7 Teorema Tarkime, kad h yra tolydi ir siurjektyvi ir be to f tranzityvi. Jeigu f ir g yra jungtiniai atvaizdžiai, tai tai tada ir g tranzityvi.

⊖

Tarkime, kad I, J dvi atviros netušios aibės. Raskime $n \geq 1$ ir $x \in I$ tokius, kad $g^n(x) \in J$. Jei h tolydus homeomorfizmas, tai $h^{-1}(J)$ taip pat atvira aibė be to netuščia, kadangi h siurjekcija. Vadinasi egzistuoja atvira aibė $L \subset h^{-1}(J)$. Analogiškai, $h^{-1}(I)$ – atvira aibė, taigi egzistuoja atvira aibė $K \subset h^{-1}(I)$. Remiantis funkcijos f tranzityvumu galime teigti, kad egzistuoja skaičiai m ir $y \in K$ tokie, kad $f^m(y) \in L$. Tegu $x = h(y)$. Tada $x \in I$ ir

$$g^m(x) = g^m(h(y)) = h(f^m(y)) \in h(L) \subset J.$$

⊕

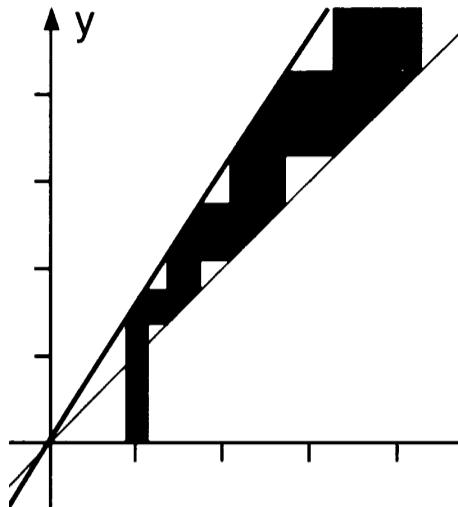
Remdamiesi šiuo tvirtinimu galime teigti, kad jei funkcijos f ir g yra jungtinės, tai viena iš funkcijų, tarkime f , yra tranzityvi tik tada, kai funkcija g yra tranzityvi.

Apibrėžimas Tegu $x \in X$ ir $\epsilon > 0$ pasirinktas skaičius. Sakysime, kad dinaminė sistema yra jautri pradinių sąlygų atžvilgiu, jei egzistuoja $\delta > 0$ ir natūralusis skaičius $n \in \mathcal{N}$, kad

$$\rho(f^n(x), f^n(y)) > \delta,$$

jei tik $y \in B(x, \epsilon)$.

Kitaip tariant, jei orbitos startuoja iš "artimų" taškų, tai augant iteracijų skaičiui, atstumas tarp orbitų auga. Pastarosios transformacijos vaizdą pateikiame 8 pav.



8 pav.

Šis jautrumo fenomenas praktiniuose uždaviniuose labai svarbus. E. Lorenas (Lorenz) 1960 metais modeliudamas ilgalaikes oro prognozes susidūrė su šia problema iš esmės. Minėtąjį fenomeną jis pavadino "drugelio efektu," kurį suformulavo tokiu būdu- ar gali drugelio sparnelių plazdenimas Brazilijos džiunglėse sukelti uraganą Amerikoje. Iš pirmo žvilgsnio atrodytų, švelniai tariant, keistas klausimas, bet tik iš pradžių. Pastebėsime, kad jei dinaminė sistema yra jautri, kitaip tariant lengvai pažeidžiama, tai ir labai maži pokyčiai, pavyzdžiui apytikslis pradinių duomenų parinkimas, gali sukelti didžiulius neatitikimus. T.y. rezultatai bus tolimi nuo prognozuojamų. Kad ir kaip tiksliai skaičiuotų kompiuteriai, vis tik skaičiavimams yra naudojamos realiųjų skaičių iteracijos, taigi, skaičių paklaidos. Kas garantuoja, kad skaičiavimo rezultatais galima pasikliauti? Būtent su šia problema ir susidūrė E. Lorenas. Jis, labai nedaug keisdamas pradinius duomenis ir iteruodamas labai panašiomis funkcijomis, gaudavo visiškai skirtingus rezultatus.

Apibrėžimas (Devaney) *Dinaminę sistemą (f, X) vadinsime chaotinė erdvėje X , jeigu pastaroji yra:*

- 1) *ji tranzityvi;*
- 2) *jautri pradinių duomenų atžvilgiu;*
- 3) *transformacijos f , periodinių taškų aibė tiršta metrinėje erdvėje X .*

Chaotinės dinaminės sistemos jautrumas pasireiškia tuo, kad iteruodami "artimus" pradinius taškus, gauname orbitas, tostančias vieną nuo kitos. Tranzityvumo dėka, bet koks mažas intervalas yra "užtempiamas" ant visos erdvės. Trečioji savybė reiškia, kad periodinių taškų aibė yra tiršta, neperiodinių taškų aibėje, kitaip tariant, bet kokio taško, bet kokioje aplinkoje egzistuoja periodinis taškas.

Tai klasikinis chaotinės dinaminės sistemos apibrėžimas. Įrodysime, kad jautrumo pradinių sąlygų atžvilgiu sąlyga išplaukia iš tranzityvumo bei aibės $\mathcal{P}(f)$ tirštumo. Tuo pačiu modifikuosime ir chaotiškumo sąvoką.

8 Teorema Tarkime, kad dinaminė sistema (f, X) yra tranzityvi ir transformacijos f , periodinių taškų aibė tiršta metrinėje erdvėje X . Tada dinaminė sistema yra jautri pradinių sąlygų atžvilgiu.

Priminsime, kad dinaminės sistemos jautrumas reiškia, kad egzistuoja skaičius $\delta > 0$ toks, kad visiems $x \in X$ ir bet kokiai jo aplinkai J , egzistuoja šioje aplinkoje taškas $y \in J$ ir iteracijos numeris n tokie, kad teisinga nelygybė:

$$\rho(f^n(x), f^n(y)) > \delta.$$

Tarkime, kad teoremos sąlygos tenkinamos. Įrodysime pagalbini teiginį:

Lema Egzistuoja skaičius $c > 0$ toks, kad visiems $x \in X$ galima nurodyti periodinį tašką $p \in X$ tokį, kad

$$\rho(p, f^k(x)) > c, \quad \forall k \in \mathcal{N}.$$

⊖

Tarkime, kad r, s yra periodiniai taškai, turintys skirtingas orbitas, t.y.

$$\rho(f^k(r), f^l(s)) > 0$$

visiems $k, l \in \mathcal{N}$. Pažymėkime $d = \min_{k,l} \rho(f^k(r), f^l(s))$. Parinkime c taip, kad $c < 0.5d$. Tada visiems k, l bus teisinga nelygybė:

$$2c < \rho(f^k(r), f^l(s)) \leq \rho(f^k(r) - x) + \rho(f^l(s), x).$$

Iš paskutiniosios nelygybės išplaukia, kad jei $\rho(x, f^k(r)) < c$ tai atstumas tarp x ir taško s visų ciklo taškų privalo būti didesnis negu c , t.y. $\rho(x, f^l(s)) > c$.

⊕

⊖

Įrodysime teoremą. Tegu $d = 0.25c$. Tarkime, kad $x \in X$ laisvai pasirinktas taškas, o $J := J_x$ yra šio taško bet kokia aplinka (atvira aibė, kuriai priklauso šis taškas). Remiantis teoremos prielaidomis turime, kad $\mathcal{P}(f)$ yra tiršta aibėje X . Tada, egzistuoja n - ojo periodiškumo periodinis taškas $q \in \mathcal{P}(f)$, kuris priklauso atvirai aibei

$$U = J \cap B(x, d).$$

Tarkime, kad $p \in P(f)$ yra kitas periodinis taškas, be po parenkame jį taip, kad atstumas nuo šio taško orbitos iki taško x būtų didesnis negu $4d$. Pažymėkime

$$W_i = B(f^i(p), d) \cap X.$$

Matome, kad $f^i(p) \in W_i$ arba $p \in f^{-1}(W_i)$. Tada atvira aibė

$$V = f^{-1}(W_1) \cap \dots \cap f^{-n}(W_n) \neq \emptyset.$$

Parinkime $j \in \mathcal{N}$ taip, kad $k < nj$ arba $1 \leq nj - k \leq n$. Be to tegu $U, V \subset X$ dvi atviros aibės ir $z \in U$, o $f^k(z) \in V$. Toks parinkimas galimas, nes dinaminė sistema yra tranzityvi.

Tada

$$f^{nj}(z) = f^{nj-k}(f^k(z)) \in f^{nj-k}(V).$$

Bet

$$f^{nj-k}(V) = f^{nj-k}(f^{-1}(W_1) \cap \dots \cap f^{-n}(W_n)) \subset f^{nj-k}(f^{-(nj-k)}(W_{nj-k})) = W_{nj-k}.$$

Kitaip tariant

$$\rho(f^{nj}(z), f^{nj-k}(p)) < d.$$

Be to $f^{nj}(q) = q$. Taigi

$$\begin{aligned} \rho(f^{nj}(q), f^{nj}(z)) &= \rho(q, f^{nj}(z)) \\ &\geq \rho(x, f^{nj-k}(p)) - \rho(f^{nj-k}(p), f^{nj}(z)) \\ &\quad - \rho(q, x) \geq 4d - d - 2d. \end{aligned}$$

Iš paskutiniųjų sąryšių išplaukia, kad

$$\rho(f^{nj}(x), f^{nj}(z)) > d$$

arba

$$\rho(f^{nj}(x), f^{nj}(q)) > d.$$

Taigi, viena iš šių nelygybių būtinai teisinga, kadangi priešingu atveju gautume, kad

$$\rho(f^{nj}(q), f^{nj}(z)) \leq \rho(f^{nj}(q), f^{nj}(x)) + \rho(f^{nj}(x), f^{nj}(z)) < 2d.$$

Bet ši nelygybė prieštarauja įrodytai nelygybei. Pažymėję raide y vieną iš z arba q (kuriai paskutinioji nelygybė teisinga) bei $m = nj$ gauname teoremos įrodymą.

⊕

Apibrėžimas *Dinaminę sistemą (f, X) vadinsime chaotinė dinamine sistema, jeigu transformacija yra tranzityvi erdvėje X bei periodinių taškų aibė yra tiršta erdvėje X .*

Atkreipsime dėmesį, kad šiame chaoso apibrėžime nėra jautrumo sąvokos. Kitame skyrelyje charakterizuojant chaosą naudosime ir jautrumo sąvoką, kuri gana subtiliai klasifikuoja chaosą.

3.6 Postūmio transformacija

Tarkime, kad $X = [0, 1]$.

Transformaciją $\mathcal{T}_a : X \rightarrow \mathcal{R}$:

$$\mathcal{T}_a(x) = \begin{cases} ax, & x < 0.5, \\ -ax + a, & x \geq 0.5. \end{cases}$$

vadinsime T - transformacija. Pastebėsime, kad ši transformacija intervalą X tempia ir sulenkia. Tiksliau kalbant, pirmoji intervalo pusė yra ištempinama, o antroji intervalo dalis ištempinama ir sulenkiamą.

Apibrėžkime transformaciją $S : X \rightarrow \mathcal{R}$ tokiu būdu:

$$S(x) = \begin{cases} 2x, & x < 0.5, \\ 2x - 1, & x \geq 0.5. \end{cases}$$

Šią transformaciją vadinsime S - transformacija.

Tarkime, kad $x \in \mathcal{R}$. Apibrėžkime

$$Frac(x) = x - k,$$

kai $x \in [k, k + 1)$, $k \in \mathcal{Z}$. Pasirodo, kad visiems $x \in [0, 1)$ teisingas sąryšis: $S(x) = Frac(2x)$.

Pastebėsime, kad 1 yra ypatingas taškas, kadangi jis yra nejudamas transformacijos $S(x)$ taškas.

Panagrinėkime funkcijos, apibrėžtos argumento trupmenine dalimi, savybes. Tegu $m \in \mathcal{Z}$. Tada,

1. $Frac(x + m) = Frac(x)$;
2. $Frac(mx) = Frac(mFrac(x))$.

Pirmoji lygybė išplaukia iš trupmeninės dalies apibrėžimo. Įrodykite antrąją lygybę. Turime, kad $Frac(x) = x - k$. Tada

$$Frac(mFrac(x)) = Frac(m(x - k)) = Frac(mx - mk) = Frac(mx).$$

Pažymėkime

$$x_k = Frac(x_{k-1}).$$

9 Teorema Tegu $x_0 \in [0, 1)$. Tada :

$$x_k = Frac(2^k x_0.)$$

⊖

Įrodysime šią lygybę naudodamiesi indukcijos metodu.

Matome, kad pirmam indukciniam žingsniui ši lygybė yra teisinga, kadangi iš apibrėžimo išplaukia, kad

$$x_1 = \text{Frac}(2x_0).$$

Tarkime, kad lygybė teisinga $k - 1$ -ajam žingsniui, t.y.

$$x_k = \text{Frac}(2^k x_0).$$

Tada, remdamiesi indukcinė prielaida ir antrąja operatoriaus savybe gauname, kad

$$x_{k+1} = \text{Frac}(2x_k) = \text{Frac}(2\text{Frac}(2^k x_0)) = \text{Frac}(2^{k+1} x_0) = \text{Frac}(2^{k+1} x_0).$$

Taigi, ši lygybė teisinga visiems natūraliesiems skaičiams.

⊕

Pastaroji teorema labai svarbi teoriniams samprotavimams, kai yra pagrindžiamas dinaminė sistemų chaotiškumas.

Tarkime, kad x_0 yra pradinis iteracijos taškas. Panagrinėkime T – transformacijos iteracijas. Pastebėkime, kad

$$y = S^{k-1}(x_0) = \text{Frac}(2^{k-1} x_0)$$

ir taikykime transformaciją T šiam taškui. Turime, kad

$$x_k = T(y) = \begin{cases} 2y, & y < 0.5, \\ -2y + 2, & y \geq 0.5. \end{cases}$$

Kitaip tariant, užuot iteravę k kartų, mes skaičiuojame dvejetainį laipsnį po to atliekame daugybos ir sudėties operacijas.

Panagrinėkime pavyzdį. Tarkime, kad $x_0 = 8/25$ yra periodinis taškas. Parodysime, kad jo eilė 10. Tai išplaukia iš tokių skaičiavimų:

k	x_k	$2^k x_0$	$Frac(2^k x_0)$
0	$\frac{8}{25}$	$\frac{8}{25}$	$8 = 0 \cdot 25 + 8$
1	$\frac{16}{25}$	$\frac{16}{25}$	$16 = 0 \cdot 25 + 16$
2	$\frac{7}{25}$	$\frac{32}{25}$	$32 = 1 \cdot 25 + 7$
3	$\frac{14}{25}$	$\frac{64}{25}$	$64 = 2 \cdot 25 + 14$
4	$\frac{3}{25}$	$\frac{128}{25}$	$128 = 5 \cdot 25 + 3$
5	$\frac{6}{25}$	$\frac{256}{25}$	$256 = 10 \cdot 25 + 6$
6	$\frac{12}{25}$	$\frac{512}{25}$	$512 = 20 \cdot 25 + 12$
7	$\frac{24}{25}$	$\frac{1024}{25}$	$1024 = 40 \cdot 25 + 24$
8	$\frac{23}{25}$	$\frac{2048}{25}$	$2048 = 81 \cdot 25 + 23$
9	$\frac{21}{25}$	$\frac{4096}{25}$	$4096 = 163 \cdot 25 + 21$
10	$\frac{17}{25}$	$\frac{8192}{25}$	$8192 = 327 \cdot 25 + 17$

Turėdami tai omeny gauname, kad

$$y = S^9(x_0) = Frac(2^9 \cdot \frac{8}{25}) = Frac(4096/25) = Frac(163 + 21/25) = \frac{21}{25}.$$

Pastebėsime, kad $y = 21/25 > 0.5$. Taigi

$$x_{10} = T(y) = -2y + 2 = -\frac{42}{25} + 2 = \frac{8}{25}.$$

Matome, kad $x_{10} = x_0$.

Šio skyrelio pabaigoje pastebėsime, kad transformacija $S(x)$ yra tempimo-dalinimo ir dalis-kopijavimo (stretch-cut-paste) funkcijos matematinis modelis. Tuo tarpu transformacija $T(x)$ yra tempimo-lenkimo (stretch-fold) funkcijos matematinis modelis.

10 Teorema *Teisinga lygybė:*

$$T_2^n(x) = T_2(\underbrace{S \dots S}_{n-1}(x)) = TS^{n-1}(x).$$

⊕

Pastarasis tvirtinimas išplaukia iš to, kad funkcijas $T := T_2$ ir S siejanti funkcija yra T , t.y.

$$T \circ T = T \circ S,$$

kadangi

$$\begin{cases} T(T(x)) = T(2x) = 4x, & 0 \leq x \leq 0.25; \\ T(S(x)) = T(2x) = 4x, & 0 \leq x \leq 0.25; \\ T(T(x)) = T(2x) = -4x + 2, & 0.25 < x < 0.5; \\ T(S(x)) = T(2x) = -4x + 2, & 0 < x < 0.5; \\ T(T(x)) = T(-2x + 2) = 4x - 2, & 0.5 \leq x \leq 0.75; \\ T(S(x)) = T(-2x - 1) = 4x - 2, & 0.5 \leq x \leq 0.75; \\ T(T(x)) = T(-2x + 2) = -4x + 4, & 0.75 < x \leq 1; \\ T(S(x)) = T(-2x - 1) = -4x + 4, & 0.75 < x \leq 1. \end{cases}$$

Matome, kad teoremos prielaida yra teisinga.

⊕

3.7 Chaotinių transformacijų teorinė analizė

Visų pirma įrodysime svarbų teiginį, kuriuo remiantis bus galima supaprastinti dinamių sistemų chaotinio elgesio tyrimus.

11 Teorema *Tarkime, kad transformacija $h : X \rightarrow Y$ yra tolydi ir siurjektyvi. Tarkime, kad ši transformacija sieja transformacijas f, g . Jeigu transformacija $f : X \rightarrow X$ yra chaotinė, tai ir transformacija $g : Y \rightarrow Y$ yra chaotinė.*

⊖

Turime, kad $h \circ f = g \circ h$.

Tranzityvumas. Tarkime, kad $I, J \subset X$ yra dvi atviros aibės. Kadangi transformacija h yra tolydi, tai aibės $I_1 = h(I)$, $J_1 = h(J)$ taip pat atviros erdvės Y aibės. Pastebėsime, kad transformacija f yra tranzityvi. Tad egzistuoja numeris k toks, kad $f^k(I) \cap J \neq \emptyset$. Kadangi transformacijos jungtinės, tai

$$g^n = h \circ f^n \circ h^{-1}, \quad n > 0.$$

Iš pastarojo sąryšio išplaukia, kad $g^k(I_1) \cap J_1 \neq \emptyset$.

Periodinių taškų tirštumas. Pastebėsime, kad jei taškas p yra transformacijos f n -ojo periodiškumo taškas, tai taškas $h(p)$ yra transformacijos g to paties periodiškumo taškas ir atvirkščiai. Kadangi transformacija f yra chaotinė, tai aibė $\mathcal{P}(f)$ yra tiršta erdvėje X . Laisvai pasirinkdami $x \in X$ mes pasirenkame ir tašką $y = h(x)$. Be to tarkime, kad $\{p_n\}$ yra periodinių taškų seka $\lim_n p_n = x$. Tokia visada egzistuoja! Kadangi transformacija tolydi, tai

$$\lim_n h(p_n) = y.$$

Jau esame pastebėję, kad $\{h(p_n)\}$ yra transformacijos g periodinių taškų seka aproksimuo-
janti tašką y . Transformacija h yra siurjektyvi, vadinasi tokią periodinių taškų seką galime
nurodyti bet kokiam $y \in Y$.

⊕

Pastebėsime, kad jei transformacija h yra homeomorfizmas, tai tada ir g chaotiškumas
implikuotų f chaotiškumą.

12 Teorema *Dinaminė sistema $(T_2, [0, 1])$ yra chaotinė.*

⊖

Tranzityvumas. Panagrinėkime detaliau šią transformaciją. Pastebėsime, kad minė-
toji transformacija yra intervalo $[0, 0.5]$ siurjekcija į $[0, 1]$ ir intervalo $[0.5, 1]$ siurjekcija į
 $[0, 1]$. Dar daugiau, T^2 yra intervalų

$$[0, 0.25], [0.25, 0.5], [0.5, 0.75], [0.75, 1]$$

siurjekcija į intervalą $[0, 1]$. Aišku, kad atvaizdis T^n yra intervalų

$$j_{k,n} := \left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n} \right], \quad 0 \leq k \leq 2^n - 1,$$

siurjekcija į intervalą $[0, 1]$. Tad kokia bebūtų atvira aibė A , egzistuoja intervalas $j_{k,n} \subset A$
toks, kad $T_{j_{k,n}}^n(A) \cap B \neq \emptyset$.

Tirštumas. Nagrinėdami transformacijos tranzityvumo savybę pastebėjome, kad tran-
sformacija T_2^n yra intervalo

$$\left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n} \right]$$

siurjektyvus atvaizdis į intervalą $[0, 1]$. Dar daugiau, egzistuoja taškas $x \in \left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n} \right]$ toks,
kuris atvaizduojamas į save patį. Kitaip tariant, šis taškas yra pradinės transformacijos
 n -ojo periodiškumo taškas. Antra vertus koks bebūtų atviras intervalas J , egzistuoja
numeris m toks, kad

$$\left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n} \right] \supset J.$$

Taigi, periodinių taškų aibė tiršta intervale $[0, 1]$.

⊕

Transformacija $\mathcal{S} = \text{Frac}(2x)$ intervale $[0, 1]$ yra chaotinė.

Panagrinėkime transformaciją $\mathcal{S} = \text{Frac}(2x)$ intervale $[0, 1]$.

Visų pirma prisiminkime kaip yra išreiškiamas skaičius dvejetainėje skaičiavimo siste-
moje. Jei skaičius užrašytas $x = 0.a_1a_2a_3\dots$, čia $a_i \in \{0, 1\}$, tai

$$x = \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{a_3}{10^3} + \dots$$

Tarkime, kad skaičiai $x, y \in [0, 1]$ yra užrašyti dvejetainėje skaičiavimo sistemoje.
Tada, jei $a_i = b_i$, $i = 1, \dots, k$, tai

$$|x - y| \leq \frac{1}{10^k},$$

arba naudojant dešimtainės skaičiavimo sistemos simboliką:

$$|x - y| \leq \frac{1}{2^k}.$$

Pastebėsime, kad \mathcal{S} transformacija atlieka skaičiaus postūmį, tiksliau kalbant, jei $x = 0.a_1a_2a_3\dots$, tai $S(x) = 0.a_2a_3a_4\dots$. Dėl šios priežasties, transformacija \mathcal{S} , vadinama postūmio transformacija, jei nagrinėjame skaičius reprezentacijas dvejetainės skaičiavimo sistemos skaitmenimis. Beje, kaip ir dešimtainėje skaičiavimo sistemoje, labai svarbu, išvengiant dviprasmybių susitarti, kad tarp periodinių skaičių periodų nebūtų periodo $\bar{1}$.

Nesunku suprasti, kad postūmio transformacijomis galėtume vadinti transformaciją $\mathcal{S}_a(x) = \text{Frac}(ax)$, jei skaičius užrašytume a -ainės skaičiavimo sistemos skaitmenimis.

Aptarsime algoritmą, kaip iš bet kokio sveiko arba racionalaus dešimtainio skaičiaus gauti jo dvejetainę išraišką. Pasirodo, kad tai sėkmingai atlieka transformacija \mathcal{S} . Pana-
grinėkime šį fenomeną detaliau.

Tarkime, kad $x_0 \in [0, 1]$. Sudarykime seką

$$x_{n+1} = \text{Frac}(2x_n), \quad n = 0, 1, \dots$$

Tada gauname skaičiaus dvejetainę reprezentaciją $x = 0.a_0a_1a_2\dots$, kai binarinis skaitmuo a_k yra su k -ąja iteracija yra susijęs tokiu būdu:

$$a_k = \begin{cases} 0, & x_k < \frac{1}{2}, \\ 1, & \text{kitu atveju.} \end{cases}$$

Naudodami šią transformaciją skaičiui $x_0 = 0.75$ gauname tokią seką: $x_0 = 0.11000\dots$. Tuo tarpu skaičiaus $1/7$ dvejetainė reprezentacija yra tokia: $0.001001001\dots = 0.\overline{001}$.

13 Teorema Transformacija $\mathcal{S} = \text{Frac}(2x)$ intervale $[0, 1]$ yra chaotinė.

⊖

Pastarasis tvirtinimas išplaukia iš sąryšio:

$$T_2 \circ \mathcal{S} = T_2 \circ T_2.$$

⊕

Fiksuokime N pirmųjų natūraliųjų skaičių. Sudarykime begalines sekas

$$x = x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}, \dots, \quad x_{i_j} \in \{0, 1, \dots, N\}.$$

Šių sekų aibę žymėsime simboliu Σ_N . Pastaroje aibėje apibrėžkime metriką tokiu būdu:

$$(1) \quad \rho_{\Sigma}(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|x_i - y_i|}{(N+1)^i},$$

čia $x, y \in \Sigma_N$. Tada $(\Sigma_N, \rho_{\Sigma})$ yra metrinė erdvė. Šią metrinę erdvę vadinsime *Kodų erdve*. Jeigu kodų aibės elementams sudaryti yra naudojami N simbolių, tai sakysime, kad kodų aibė apibrėžta N -ainėje skaičiavimo sistemoje.

14 Teorema Kodų aibė Σ yra neskaiti.

⊖

Tarkime, kad kodų aibė apibrėžta dvejetainėje skaičiavimo sistemoje, naudojant simbolius 0 ir 1. Apibrėžkime funkciją $f : \{0, 1\} \rightarrow \{0, 1\}$ tokiu būdu: $f(0) = 1, f(1) = 0$. Be to, tarkime priešingai, t.y., kad ši aibė skaiti. Vadinasi egzistuoja bijekcija $g : \mathcal{N} \rightarrow \Sigma$. Apibrėžkime $\sigma \in \Sigma$ taip: $\sigma = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \dots$, ir čia, $\sigma_n = f((g(n))_n)$, čia $g(n)_n$ reiškia n -ąją $g(n)$ simboli. Pastebėkime, kad g yra "numeruojanti", aibės Σ elementus, funkcija. Kokį numerį ši funkcija priskiria taškui σ ? Pasirodo, kad nė vienam $n \in \mathcal{N}, g(n) \neq \sigma$. Pavyzdžiui, $g(3) \neq \sigma$, kadangi šių sekų tretieji simboliai skirtingi.

⊕

15 Teorema Erdvė (Σ_N, ρ_Σ) metriškai ekvivalenti Kantoro aibei

Kitaip tariant, kodų metrinė erdvė yra kompaktiška ir visiškai nesusijusi.

Priminsime, kad dvi metrikos ρ_1 ir ρ_2 yra ekvivalenčios jei egzistuoja teigiamos konstantos k_1, k_2 tokios, kad $k_1 \rho_1 \leq \rho_2 \leq k_2 \rho_1$.

⊖

Metrinės erdvės X elementus galime užrašyti tokiu būdu:

$$X = \left\{ x = \frac{x_1}{(N+1)} + \frac{x_2}{(N+1)^2} + \dots + \frac{x_k}{(N+1)^k} + \dots, \quad x_i \in \{1, 2, \dots, N\} \right\}.$$

Kitaip tariant erdvės X elementus užrašome skaičiavimo sistemoje, kurios pagrindas $N+1$, kai $x_i \neq 0$.

Susiekime erdvės X elementą $x = 0.x_1 x_2 x_3 \dots$ su kodų erdvės elementu $\sigma = s(x) = x_1 x_2 x_3 \dots \in \Sigma$.

Matome, kad funkcija $s : X \rightarrow \Sigma$ yra abipus vienareikšmiška. Tam, kad įrodyti, kad erdvės (Σ_N, ρ_Σ) ir $(\mathcal{K}, |\cdot|)$ yra metriškai ekvivalenčios, mums reikia nurodyti konstantas k_1, k_2 tokias, kad

$$k_1 \rho_\sigma(s(x), s(y)) \leq |x - y| \leq k_2 \rho_\sigma(s(x), s(y)), \quad x, y \in X.$$

Visų pirma randame konstantą k_2 . Visiems $x, y \in X$ gauname, kad

$$\begin{aligned} |x - y| &= \rho_\Sigma(x, y) = \left| \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_i - y_i}{(N+1)^i} \right| \\ &\leq \rho_\Sigma(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|x_i - y_i|}{(N+1)^i} = \rho_\Sigma(s(x), s(y)). \end{aligned}$$

Taigi, $k_2 = 1$.

Parinkime $C = 1/19$. Be to tarkime, kad kokiam nors

$$k \in \{1, 2, \dots\}, \quad x_1 = y_1, \dots, x_{k-1} = y_{k-1}, x_k \neq y_k.$$

Tuomet

$$|x - y| = \left| \sum_{i=k}^{\infty} \frac{x_i - y_i}{(N+1)^i} \right| \geq \frac{|x_k - y_k|}{(N+1)^k} - \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{|x_i - y_i|}{(N+1)^i} \geq$$

$$\frac{|x_k - y_k|}{(N+1)^k} - \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{N-1}{(N+1)^i} = \left(|x_k - y_k| - \frac{N-1}{N} \right) \frac{1}{(N+1)^k}$$

Pastebėję, kad $1 \leq |x_k - y_k| \leq N$ gauname

$$|x_k - y_k| - \frac{N-1}{N} \geq \frac{1}{N^2} \left(|x_k - y_k| + \frac{N-1}{N} \right).$$

Tada,

$$|x - y| \geq \frac{1}{N^2} \left(|x_k - y_k| + \frac{N-1}{N} \right) \frac{1}{(N+1)^k} \geq \frac{1}{N^2} \left(\frac{|x_k - y_k|}{(N+1)^n} + \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{|x_i - y_i|}{(N+1)^i} \right)$$

$$= \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|x_i - y_i|}{(N+1)^i} = \frac{1}{N^2} \rho_{\Sigma}(s(x), s(y)).$$

Taigi, $k_1 = \frac{1}{N^2}$.

Parodysime, kad transformacija $\mathcal{S}_N(x) = \text{Frac}(Nx)$, jei skaičius užrašytume $N+1$ ainės skaičiavimo sistemos skaitmenimis, išskyrus nulį.

16 Teorema Transformacija Dinaminė sistema (S_a, Σ) yra chaotinė.

⊖

Trazityvumas. Tarkime, kad $U, V \subset \Sigma$, $U \cap V = \emptyset$. Tegu $a \in U$, ir $\tau = t_1 t_2 t_3 \dots \in V$. Parenkame n toki, kad $B(\sigma, 1/2^n) \subset U$, $B(\tau, 1/2^n) \subset V$. Tokiu būdu parinktam n , taškas

$$\psi = a_1 a_2 \dots a_n t_1 t_2 \dots t_n \dots, \in U.$$

Antra vertus, $\mathcal{S}^n(\psi) = t_1 t_2 \dots = \tau \in V$.

Priminsime, kad tranzityvumas ekvivalentus tam, kad egzistuoja taškas, kurio orbita yra tiršta metrinėje erdvėje (taškas ergodinis). Tuo tarpu, kai kodas yra dvejetainės sistemos elementas, tai ši taškas gali būti užrašytas tokiu būdu:

$$\psi = 0|1|11100100|111110\dots,$$

Pastebėsime, kad bet kokiam kodui $\sigma = a_1 a_2 a_3 \dots$ egzistuoja kodo ψ ilgio n blokas tarp vertikalinių brūkšnių, kad kodo ψ minimas blokas sutampa su pirmaisiais kodo a simboliais. Tarkime, kad kodo ψ blokas prasideda nuo $k+1$ -ojo simbolio. Tada

$$\mathcal{S}^{(k)}(\psi) = a_1 \dots a_n t_{n+k+1} \dots,$$

vadinasi $d(\mathcal{S}^{(k)}(\psi), \sigma) \leq 1/(N+1)^n$. Taigi, ψ orbita yra tiršta.

Periodiškumas. Parodysime, kad periodinių taškų aibė yra tiršta kodų erdvėje arba, kad kiekvienas kodas gali būti aproksimuotas periodinių taškų seka.

Tarkime, kad kodas $\sigma = a_1 a_2 a_3 \dots$. Tada žemiau nurodyta seka konverguoja prie kodo σ :

$$a_1 \bar{a}_1, a_1 a_2 \overline{a_1 a_2}, a_1 a_2 a_3 \overline{a_1 a_2 a_3}, \dots$$

⊕

17 Teorema Tarkime, kad $f : X \rightarrow X$ ir $S_a : \sigma \rightarrow \sigma$. Jeigu jeigu šios transformacijos yra jungtinės, o f ir S_a siejanti transformacija h yra homeomorfizmas, tai dinaminė sistema (f, X) yra chaotinė.

⊖

Turime, kad $h \circ f = S_a \circ h$.

Tranzityvumas. Tarkime, kad $I, J \subset X$ yra dvi atviros aibės. Remiantis teoremos prielaidomis aibės $I_1 = h(I)$, $J_1 = h(J)$ taip pat atviri erdvės Y poaibiai. Pastebėsime, kad transformacija S_a yra tranzityvi. Tad egzistuoja numeris k toks, kad $S_a^k(I_1) \cap J_1 \neq \emptyset$. Kadangi transformacijos jungtinės, tai išplaukia, kad $f^k(I) \cap J \neq \emptyset$.

Periodinių taškų tirštumas. Pastebėsime, kad jei taškas $h(p)$ yra transformacijos S_a n - ojo periodiškumo taškas, tai taškas p yra transformacijos f to paties periodiškumo taškas. Kadangi transformacija S_a yra chaotinė, tai aibė $\mathcal{P}(S_a)$ yra tiršta erdvėje Σ . Laisvai pasirinkime $x \in X$. Be to tarkime, kad $\{p_n\} \in \Sigma$ yra periodinių taškų seka $\lim_n p_n = h(x)$. Tokia visada egzistuoja! Kadangi transformacija tolydi, tai

$$\lim_n h(p_n) = \lim_n x_n = x.$$

⊕

Panagrinėkime funkciją

$$\mathcal{T} = \mathcal{T}_3 = \begin{cases} 3x, & x \leq 0.5 \\ 3 - 3x, & x > 0.5 \end{cases}$$

Panagrinėkime šios transformacijos dinamiką, ją iteruojant. Tegu x_0 – yra pradinis taškas ir

$$x_n = \mathcal{T}^n(x_0).$$

Apibrėžkime aibę $F = \{x_0 \in \mathcal{R}, \lim_{n \rightarrow \infty} |\mathcal{T}^n(x_0)| < \infty\}$. Nesunku suprasti, kad jei $x < 0$ arba $x > 1$, tai $x \notin F$. Taigi, $f \subset [0, 1]$. Iš aibės F apibrėžimo išplaukia, kad šiai aibei nepriklauso ir taškai, kurių n - osios iteracijos didesnės už vienetą, kai $n = 1, 2, \dots$. Taigi, kai $n = 1$, tai $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}) \notin F$, kai $n = 2$, tai $(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}) \notin F$, ir t.t. Matome, kad iš aibės F yra išmetami tokie pat intervalai, kokie buvo išmetami ir konstruojant Kantoro aibę. Taigi, $F \subset \mathcal{C}$. Tam, kad įrodyti, jog $F = \mathcal{C}$ parodysime, kad $f(\mathcal{C}) \subset \mathcal{C}$. Tarkime, kad $x \in \mathcal{C}$. Kantoro aibės elementą galime išreikšti tokiu būdu:

$$x = \frac{x_1}{3} + \frac{x_2}{3^2} + \frac{x_3}{3^3} + \dots,$$

kai $x_i \in \{0, 2\}$. Jeigu $x_1 = 0$, tai $f(x) = 3x = \frac{x_2}{3} + \frac{x_3}{3^2} + \dots \in \mathcal{C}$.

Jeigu $x_1 = 2$, tai

$$f(x) = 3 - 3x = 3 - \left(\frac{x_2}{3} + \frac{x_3}{3^2} + \dots\right) =$$

$$\left(\frac{2}{3} + \frac{2}{3^2} + \dots\right) - \left(\frac{x_2}{3} + \frac{x_3}{3^2} + \dots\right) = \frac{(2 - x_2)}{3} + \frac{(2 - x_3)}{3^2} + \dots$$

Pastebėsime, kad kiekvienas paskutiniosios sumos dėmens skaitiklis yra lygus nuliui arba dvejetui, tai gauname, kad $f(x) \in \mathcal{C}$.

18 Teorema Transformacija \mathcal{T}_3 yra chaotinė klasikinėje Kantoro aibėje .

⊖

Parodysime, kad ši transformacija tenkina visas chaoso sąlygas, t.y. tranzityvumo ir periodinių taškų tirštumo sąlygas.

Panagrinėkime tranzityvumo problemą. Naudosime panašius argumentus kaip ir pirmoje dalyje. Pastebėsime, kad bet kokiam n , intervalas I_n tenkina savybę: $\mathcal{T}^n(I_n) = [0, 1]$. Taigi, bet kokiai atvirai aibei U , $I_n \subset U$ ir bet kokiam Kantoro aibės poaibiui V , $\mathcal{T}^n(U) \cap V \neq \emptyset$.

Aptarkime periodiškumo problemą. Aišku, kad funkcijos $y = \mathcal{T}^n(x)$ ir funkcijos $y = x$ grafikai kertasi 2^n taškuose. Taigi, funkcija \mathcal{T}^n turi 2^n nejudamų taškų. Matome, kad kai $n \rightarrow \infty$, tai šių taškų aibė tam ekvivalenti natūraliųjų skaičių aibei. Taigi, aibė tiršta aibėje \mathcal{C} .

⊕

3.8 Chaotinių sistemų charakterizavimas

Šiame skyrelyje nagrinėsime dinaminių sistemų, priklausančių nuo parametro, chaotiškos egso tam tikras charakteristikas.

Viena svarbiausių chaotinės sistemos savybių-jos priklausomybė nuo pradinių sąlygų bei tranzityvumas. Pateiksime matematinius apibrėžimus savokų, kuriomis charakterizuosime chaotines dinamines sistemas.

Tarkime, kad (X, ρ) yra metrinė erdvė.

Apibrėžimas Tegū $x \in X$ ir $\epsilon > 0$ pasirinktas skaičius. Sakysime, kad dinaminė sistema yra jautri pradinių sąlygų atžvilgiu, jei egzistuoja $\delta > 0$ ir natūralusis skaičius $n \in \mathcal{N}$, kad

$$\rho(f^n(x), f^n(y)) > \delta,$$

jei tik $y \in B(x, \epsilon)$.

Kitaip tariant, jei orbitos startuoja iš "artimų" taškų, tai augant iteracijų skaičiui, atstumas tarp orbitų augs. Pastarosios transformacijos vaizdą pateikiame 5.4 pav.

Viena iš svarbiausių chaosą charakterizuojančių savybių yra jautrumas pradinėms sąlygoms atžvilgiu. Ji būtina, bet nepakankama chaoso egzistavimo sąlyga. Pavyzdžiui transformacija $f(x) = cx$, $c > 1$ yra jautri pradinėms sąlygoms atžvilgiu, kadangi $f^n(x) = c^n x$. Panauginėkime, kaip yra "iškreipiama" nedidelė taško x aplinka. Pažymėkime $u = x + \epsilon$. Tada, atlikę n iteracijų gauname tokią paklaidą:

$$E_n = u_n - x_n = c^n(x + \epsilon) - c^n x = c^n \epsilon.$$

Matome, kad n -osios iteracijos paklaida padidėja $c^n \epsilon$ kartų, jei $c > 1$. Kitaip tariant, pradėjus iteruoti taško x aplinkos taškus gauname, kad jų iteracijos tolsta nuo taško x iteracijų.

Panauginėkime dinaminę sistemą, kurios jautrios pradinėms sąlygoms atžvilgiu, paklaidų elgseną, kai $n \rightarrow \infty$. Pradžioje panauginėkime jau minėtą tiesinę sistemą santykinę paklaidą, t.y. paklaidos atlikus n -ąją iteraciją ir pradinio taško n -osios iteracijos santykį:

$$\left| \frac{E_n}{x_n} \right| = \frac{c^n \epsilon}{c^n x_0} = \frac{\epsilon}{x_0}.$$

Matome, kad šis santykis pastovus. Vadinasi šios jautrios dinaminės sistemos paklaida auga tokiu pat greičiu kaip ir iteruojamas taškas.

Visos chaotinės sistemos turi priklausomybės nuo pradinėms sąlygoms fenomeną. Dažnai literatūroje yra pažymima, kad ši chaoso savybė yra viena iš svarbiausių.

Panauginėkime, kaip nuo dinaminę sistemą pobūdžio priklauso paklaidų elgsena.

Paprastiausios tiesinės dinaminės sistemos atveju paklaidų santykio asimptotiką sutampa su koeficiento laipsniu, t.y.

$$\left| \frac{E_n}{E_0} \right| = c^n.$$

Matome, kad jei $0 < c < 1$, tai riba lygi nuliui, jei $c > 1$ – seka neapribota.

Bet pastarąją paklaidų santykį mes galime naudoti ne tik tiesinių dinaminę sistemų paklaidų augimui charakterizuoti. Logaritmuokime paskutiniosios lygybės abi puses gauname, kad

$$\ln \left| \frac{E_n}{E_0} \right| = n \ln c.$$

Pastarąją lygybę išreiškę c atžvilgiu gauname,

$$\ln c = \frac{1}{n} \ln \left| \frac{E_n}{E_0} \right|, \quad \text{arba} \quad c = e^{\frac{1}{n} \ln \left| \frac{E_n}{E_0} \right|}.$$

Tokiu būdu, jei nagrinėjame nežinomą dinaminę sistemą, jautrią pradinėms sąlygoms atžvilgiu, galime nustatyti šios sistemos paklaidos augimo dydį c .

Pavyzdžiui, buvo nagrinėta dinaminė sistema $f(x) = 4x(1-x)$ ir buvo nustatyta, kad ši konstanta $c \approx 2$. Vidutinės augimo paklaidos skaičiavimą kiek detalizuokime. Tarkime, kad $E_0 = \epsilon$ yra pakankamai maža pradinė paklaida. Užrašykime vidutinę paklaidą tokiu būdu:

$$\left| \frac{E_n}{E_0} \right| = \left| \frac{E_n}{E_{n-1}} \right| \left| \frac{E_{n-1}}{E_{n-2}} \right| \dots \left| \frac{E_1}{E_0} \right|.$$

Logaritmuodami paskutiniąją lygybę gauname, kad

$$\frac{1}{n} \ln \left| \frac{E_n}{E_0} \right| = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left| \frac{E_k}{E_{k-1}} \right|.$$

Panagrinėkime santykį $\left| \frac{E_n}{E_{n-1}} \right|$. Šis santykis charakterizuoja, kokia yra k -osios iteracijos santykinė paklaida. Pastebėsime, kad iteruojant seką, jos klaidos santykinė paklaida nepriklauso nuo to, kokio dydžio paklaidą E_k paimsime. Pagrįskime tai. Pažymėkime $\tilde{x}_k = \epsilon$ ir $\tilde{x}_k = x_k + \epsilon$. Tegu $f(x) = 4x(1-x)$. Tada iteracinės sekos nario x_{k+1} paklaida E_{k+1} yra tokia:

$$E_{k+1} = f(\tilde{x}_k) - f(x_k) = \tilde{x}_{k+1} - x_{k+1} = 4(x_k + \epsilon(1-x_k - \epsilon)) - 4x_k(1-x_k) = 4\epsilon(1-2x_k) - 4\epsilon^2.$$

Padalinę pastarąjį reiškinį iš E_k gauname, kad

$$\frac{E_{k+1}}{E_k} = 4(1-2x_k) - 4\epsilon.$$

Vadinasi, jei ϵ mažas, tai šis santykis nuo paklaidos beveik nepriklauso.

Taigi, fiksuokime kokį nors $\epsilon > 0$. Ir panagrinėkime, kaip esant šiai paklaidai ϵ plėtojasi santykis $\left| \frac{E_n}{E_{n-1}} \right|$, jei šį santykį pakeisime dydžiu $\frac{E_{k+1}}{\epsilon}$, $\tilde{E}_{k+1} = f(x_k + \epsilon) - f(x_k)$, čia $f(x) = 4x(1-x)$.

Tada ribą

$$\lambda(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{n} \ln \left| \frac{f^n(x_0 + \epsilon) - f^n(x_0)}{\epsilon} \right|. \quad (1)$$

vadinsime *Liapunovo eksponente*.

Kitaip tariant, bet kokios transformacijos Liapunovo transformacija yra apibrėžiama (1) lygybe.

Aišku, kad jei ϵ yra paklaida taške x_0 , tai

$$|f^n(x_0 + \epsilon) - f^n(x_0)| \approx \epsilon e^{n\lambda(x_0)}.$$

Pasirodo, kad Liapunovo eksponentė gerai charakterizuoja chaotišką elgseną. Jei ši eksponentė teigiama ir didelė, tai dinaminė sistema labai jautri pradinių sąlygų atžvilgiu. Be to remiantis šia eksponente galima palyginti įvairių dinaminių sistemų jautrumą, tame pat taške, bei naudoti šią eksponentę jautrumui charakterizuoti. Ypatingai, jei $\lambda(x_0) > 0$ yra didelė, tai ir sistemos jautrumas taške didelis.

3.9 Liapunovo eksponentė ir glodžiosios transformacijos

Šiame skyrelyje panagrinėkime diferencijuojamas transformacijas.

Atlikus n iteracijų, paklaidos augimo greitį galime perrašyti taip:

$$\frac{E_n}{E_0} = \frac{E_n}{E_{n-1}} \frac{E_{n-1}}{E_{n-2}} \cdots \frac{E_1}{E_0}$$

Logaritmuodami abi lygybės puses gauname,

$$\frac{1}{n} \ln \left| \frac{E_n}{E_0} \right| = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \ln \left| \frac{E_k}{E_{k-1}} \right|.$$

Naudodamiesi paklaidos apibrėžimu gauname, kad

$$\frac{E_k}{E_{k-1}} = \frac{f(x_{k-1} + E_{k-1}) - f(x_{k-1})}{E_{k-1}}.$$

Perėję prie ribos, kai $E_0 \rightarrow 0$ turėsime

$$\lim_{E_0 \rightarrow 0} \frac{E_k}{E_{k-1}} = f'(x_{k-1}).$$

Taigi

$$\lim_{E_0 \rightarrow 0} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln \left| \frac{E_k}{E_{k-1}} \right| = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln |f'(x_{k-1})|.$$

Perėję prie ribos, kai $n \rightarrow \infty$, gauname diferencijuojamos transformacijos *Liapunovo* eksponentę:

$$\lambda(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln |f'(x_{k-1})|.$$

Pastebėsime, kad kai kuriais atvejais Liapunovo eksponentę galime suskaičiuoti tiksliai.

Raskime periodinio taško Liapunovo eksponentę. Tarkime, kad taškas x_0 yra m - ojo periodiškumo taškas, t.y. $x_m = f^m(x_0)$. Antra vertus,

$$\lambda(x_0) = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m \ln |f'(x_{k-1})|.$$

Taigi, jei x_0 yra nejudamas taškas, tai

$$\lambda(x_0) = \ln |f'(x_0)|.$$

Atkreipsime dėmesį, kad remiantis šia formule galime charakterizuoti Liapunovo (ateityje L) eksponentę priklausomai nuo taško pobūdžio. Matome, kad jei taškas neutralus nejudamas taškas, tai jo L eksponentė lygi nuliui. Jeigu taškas nestabilus ($|f'(x_0)| > 1$), tai šio taško L eksponentė teigiama, jei stabilus- neigiama.

Jei x_0 yra antrojo periodiškumo taškas, tai šiuo atveju turime, kad

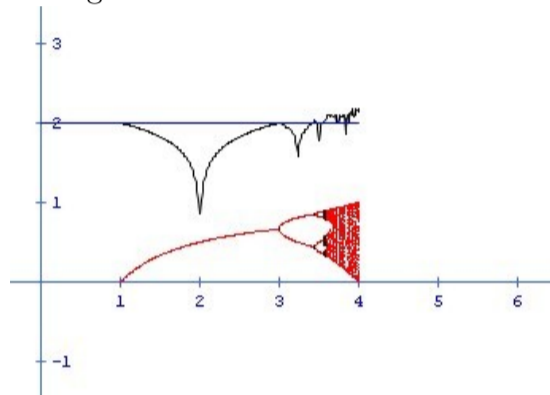
$$\lambda(x_0) = \lambda(x_1) = \frac{1}{2} (\ln |f'(x_0)| + \ln |f'(x_1)|).$$

Jei $f(x) = ax(1-x)$, tai

$$\lambda(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln |a - 2ax_{k-1}| =$$

$$\ln a + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \ln |1 - 2x_k|.$$

Pastebėkime, kad $x = 0$ yra logistinės transformacijos nejudamas taškas, taigi $\lambda(0) = \ln a$ ir tuo pačiu $\lambda(1) = \ln a$. Tada, kai $a = 4$, ši reikšmė apytiksliai lygi 1.39. Tokia reikšmė nurodo, kad šie taškai nėra stabilūs. Pastebėsime, kad visų taškų, kurie yra pritraukiami prie nejudamo taško 0, Liapunovo eksponentė yra lygi $\ln 4$. Šių taškų aibė yra tiršta intervale $[0, 1]$. Antra vertus, "beveik visų" kitų taškų, intervale $[0, 1]$, Liapunovo eksponentė yra lygi $\ln 2$. Žemiau pateiktame 9 pav. yra pateikiamas logistinės dinaminės sistemos $y = f_c(x)$ Freigenbaumo medis, o aukščiau pateikiamas šios sistemos periodinių taškų Liapunovo eksponentės grafikas:



9 pav.

Pabaigai paminėsime, kad jei h yra homeomorfizmas, siejantis transformacijas f ir g , be to abi transformacijos yra diferencijuojamos, tada abiejų transformacijų Liapunovo eksponentė sutampa.

3.10 Tranzityvumas ir periodiniai taškai

Kiek plačiau nanagrinėkime ir kvadratinės iteracijos tranzityvumo savybę. Natūralu tikėtis, kad jei transformacija yra tranzityvi, tai pradinį intervalą suskaidę į smulkesnes dalis ir iteracijas startavę iš bet kokio minėtosios smulkesnės intervalo taško, gausime, kad iteracinės sekos nariai "aplankys" visus kitus skaidinio intervalus.

Kaip jau minėjome, panagrinėkime šį fenomeną detalčiau, nagrinėdami chaotiinę transformaciją $f(x) = 4x(1-x)$. Tarkime, kad intervalas $X = [0, 1]$ yra suskaidytas į 10 vienodų intervalų, t.y. intervalo X skaidinys $X = \cup_{k=1}^{10} I_k$, kai

$$I_k = \left[\frac{k-1}{10}, \frac{k}{10} \right], \quad k = 1, \dots, 10.$$

Kiek detalčiau panagrinėkime šią tranzityvumo savybę. Nagrinėjant chaotines dinamines sistemas kyla įvairių sistemų palyginimo problema. Jau esame kalbėję apie Liapunovo eksponentę. Dabar aptarkime dar vieną tranzityvumo palyginimo matą.

Tarkime, kad I ir J du maži, atviri intervalai. Pasirinkę intervalo I tašką, iteruodami bandysime pasiekti antrojo intervalo taškus. Aišku, kad vienos taškų orbitos pasieks šį intervalą greičiau negu kitos, o kai kurių taškų orbitos iš vis nepasieks šio intervalo. Panagrinėkime šią "svečiavimosi" savybę, pasitelkę statistinius metodus. Buvo atliktas bandymas, pasirinkus 10000 taškų pradiniam intervalu, ir buvo stebimos šių taškų orbitos, iki taškai pasiekdavo intervalą J . Orbitas, kurios atlikus fiksuotą iteracijų skaičių nepalikdavo intervalo I , pavadinsime "išlikusiomis orbitomis" nurodydami atliktų iteracijų skaičių. Kyla klausimas, ar galima koku nors būdu (formule) susieti "išliekančių" orbitų skaičių su atliekamu iteracijų skaičiumi. Žinoma, atsakymas priklauso ir nuo intervalų I ir J ilgio. Intervalus galima taip parinkti, kad jau po pirmos iteracijos orbitos pateks į intervalą J . Paprastai intervalai parenkami gana maži, kad po gana didelio iteracinių žingsnių skaičiaus taškų iš I orbitos pasiekia intervalą J . Pavyzdžiui parinkime

$$I = [0.2, 0.2 + \frac{1}{10^{11}}], \quad J = [0.68, 0.69].$$

Atlikus 36 iteracijas, nė viena iš 10000 taškų (parinktų tolygiai intervale I) orbitų nepasiekė intervalo J . Toliau didinant iteracijų skaičių, pasirodo taškų orbitos, kurios pasiekia šį intervalą. Atlikus eksperimentą pasirodė, kad 37-oje iteracijoje 63 taškai pakliuvo į intervalą J . Didinant iteracijų skaičių šis išliekančių (nepasiekusių intervalo J) taškų skaičius mažėja. Eksperimentiškai buvo nustatyta, kad šių išliekančių taškų skaičius apytiksliai yra lygus

$$S(n) \approx e^{-\frac{n}{\tau}}.$$

Parametras τ gali būti interpretuojamas tokiu būdu: tai skaičius iteracijų, kurias reikia atlikti, kad išlikusių taškų skaičius, lyginant su pradiniais sumažėtų $1/e$ kartų. T.y. kad išlikusių taškų skaičius sumažėtų maždaug 37 procentais lyginant su pradiniu taškų skaičiumi. Parametras τ vadinamas *vidutiniu orbitų stabilumo parametru*. Nesunku suprasti, kad tai dar vienas dinaminės sistemos chaotiškumo charakterizavimas. Kuo dinaminė sistema chaotiškesnė, tuo τ mažesnis ir atvirkščiai. Žinoma lyginti dvi dinamines sistemas galime tik tuo atveju, jei startinės dinaminės sistemų pozicijos yra vienodos.

Skaičiaus $S(n)$ eksponentinę prigimtį patvirtina ir tas faktas, kad $\ln S(n)$ mažėja tiesiškai, kai n auga. Remiantis šiais rezultatais buvo nustatyta, kad $\tau \approx 138$. Taigi, tam kad išlikusių iteracijų skaičius sudarytų $\frac{e-1}{e}$ dalį pradinio taškų skaičiaus reikia atlikti apie 138 iteracijas. Kaip jau ir minėjome, fiksuotą transformaciją, bendrai paėmus "pabėgimo" greitis priklauso ir nuo intervalų dydžio bei jo parinkimo.

Kitas įdomus faktas, charakterizuojantis chaotines sistemas, tai intervalo "tempimo" problema. Nagrinėdami šią, kaip ir ankstesnes problemas iliustracijoms pasirinksiame logistinę dinaminę sistemą

$$f_4(x) = 4x(1-x).$$

Fiksuokime kokį nors uždara intervalą $I \subset [0, 1]$. Kiek reikia atlikti mažiausiai iteracijų tam, kad dinaminė sistema $f_4(I) = [0, 1]$?

Tai viena problemos formuluotė. Dažnai uždavinys formuluojamas tokiu būdu: suskaidykime intervalą $[0, 1]$ nesikertančiais intervalais I_k , $k = 1, \dots, n$, kurių sąjunga lygi

intervalui $[0, 1]$. Raskime vidutinį iteracijų skaičių, kuris reikalingas, kad $f(I_i) = [0, 1]$, $i = 1, \dots, n$.

Žemiau pateikiame lentelę kurioje nurodomas vienetinio intervalo skaidinio elementų skaičius N , bei vidutinis iteracijų skaičius k :

N	k	N	k	N	k	N	k
2	1	32	6.18	512	10.26	8192	14.29
4	2.51	64	7.23	1024	11.27	16384	15.26
8	4	128	8.25	2048	12.28	32768	16.28
16	5.12	256	9.26	4096	13.28	65536	17.28

Atkreipsime dėmesį į tai, kad šis eksperimentas demonstruoja, kad jei padalinimų skaičių didiname dvigubai, tai kiekviename sekančiame žingsnyje, kai padalinimų skaičius didelis, iteracijų skaičių tereikia padidinti vienetu!

3.11 Ergodinės orbitos

Panagrinėkime logistinę dinaminę sistemą, kai $a = 4$. Ši sistema yra chaotinė. Jei pasirinkime bet kokią mažą intervalą I , tai iteruodami šio intervalo kai kuriuos taškus aplankysime "beveik visus" intervalo $[0, 1]$ taškus. Kitaip tariant iteruojant kai kuriuos taškus iš I , gauname rezultata, kuris artimas rezultatui jei iteruosime visus intervalo taškus. Taigi, egzistuoja skaičių seka, $\{x_n\}$, $n \in \mathcal{N}_0$, kurios orbitos, kai $n \rightarrow \infty$, yra kiek norimai arti bet kurio kito, intervalo $[0, 1]$, taško. Kitaip tariant, bet kokiam $x \in [0, 1]$ ir laisvai pasirinktam $\epsilon > 0$, egzistuoja $n_0 \in \mathcal{N}$ tokie, kad $|x_{n_0} - x_k| < \epsilon$. Orbitas, tenkinančias minėtas savybes vadinsime *ergodinėmis orbitomis*, o taškus, kurie turi tokias orbitas- *ergodiškumo taškais*. Čia x_k yra minėtos sekos narys. Nesunku suprasti, kad ne visi pasirinkto intervalo taškai yra ergodiškumo taškai. Pavyzdžiui periodiniai arba nejudami taškai tegali "aplankyti" tik baigtinio skaičiaus taškus. Jei šią problemą intume spręsti praktiškai, kiltų kai kurių dviprasmybių. Pavyzdžiui, iteruodami logistinės sistemos f_4 periodiškumą taškus, po tam tikro iteracijų skaičiaus, dėl apvalinimo paklaidų, iteruojamo taško orbitos pradėtų išklysti iš baigtinės orbitos ir periodinio taško orbita taptų ergodine.

Kaip jau minėjome, taškų ergodiškumo savybes patogiu tirti naudojant PC. Žinoma, rezultatas bus gautas su tam tikra paklaida. Pavyzdžiui, pasirinkime kokį nors tašką x_0 ir iteruoime 10^6 kartus. Realizuojant grafiškai pastebėsime, kokius intervalo taškus "aplanko" šio taško orbita x_0, x_1, \dots, x_m . Atlikę tai suskaidykime intervalą į N lygių dalių

$$I_k = \left[\frac{k-1}{N}, \frac{k}{N} \right), \quad k = 1, \dots, N.$$

Nustatome, kiek orbitos taškų patenka į I_k – ajį intervalą. Tarkime šis skaičius yra lygus n_k . Mes tikimės, kad šis skaičius priklauso nuo orbitos parametro m . Kuo didesnis m , tuo didesnis orbitos taškų skaičius patenka į intervalus. Antra vertus natūralu tikėtis, kad taškų skaičiaus santykis pasirinktuose intervaluose turėtų būti pastovus. Pastebėsime, kad orbitos taškų skaičius, įtraukiant ir pradinį tašką yra lygus $m + 1$. Apibrėžkime intervalo matą tokiu būdu:

$$\mu_k(I_k) = \frac{n_k}{m+1}, \quad [0, 1] = \cup_{i=1}^N I_k.$$

Pastebėsime, kad šis baigtinis matas yra tikimybinis (kodėl?).

Galime braižyti histogramą, kurios horizontalioje tiesėje atidėtume intervalo $[0, 1]$ skaidinį (intervalus I_k) o vertikalioje tiesėje – dažnį (mato reikšmes). Pateiktoje histogramoje yra pateikiamas orbitos elementų išsidėstymas, kai $m = 10^6$ ir $N = 600$. Pastebėsime, kad dengiamos tamsios srities plotas yra lygus 1.

Atkreipsime dėmesį, kad mato μ_k skirstinys yra simetriškas taško 0.5 atžvilgiu. Antra vertus, iteruojant taškus tikimybė, kad mes jo sekos narį sutiksime arčiau nulio arba vieneto yra žymiai didesnė, negu centre. Pastebėsime, kad jei iteruosime bet kurią kitą intervalo tašką, histogramos vaizdas bus visiškai analogiškas. Dar daugiau, jeigu ir padidinsime padalinimų skaičių N bei orbitos eilę m , grafiko vaizdas iš esmės nesikeis. Pastebėsime, kad nagrinėjamas grafikas yra artimas funkcijos

$$\nu(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{x(1-x)}}$$

grafikui.

Panagrinėkime atsitiktinį dydį X , kurio tankio funkcija yra

$$\nu(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{x(1-x)}}.$$

Pastebėsime, kad ir atsitiktinio dydžio X funkcija $f(X) = 4X(1-X)$ taip pat turi tą patį skirstinį.

Panagrinėkime tikimybę įvykio, kad atsitiktinis dydis priklausys nedideliame intervalui J_y , kurio centras yra taške $y = 4x(1-x)$, o intervalo ilgis yra Δy . Tada

$$P(Y \in J) \approx \nu(y)\Delta y.$$

Tam, kad orbitos pasiektų intervalą J jos turi būti pirmvaizdžio x arba $1-x$ aplinkose I_1 arba I_2 atitinkamai (pastebėsime, kad nagrinėjamos parabolės reikšmė intervale $[0, 1]$ turi du pirmvaizdžius). Šių intervalų dydžiai priklauso nuo Δy dydžio ir nuo parabolės nuolydžio taškuose x ir $1-x$. Kuo nuolydis didesnis, tuo orbitos yra artimesnės viena kitai. Tiksliau kalbant, jei $I_1 = \Delta x_1$ ir $I_2 = \Delta x_2$, tai

$$\Delta y \approx |f'(x)|\Delta x_1, \quad \Delta y \approx |f'(1-x)|\Delta x_2. \quad (x_1)$$

Taigi, kitais žodžiais tariant, tikimybė, kad taškas pasirodys intervale J_y yra lygi tikimybių sumai, kad taškai bus pasirinkti iš intervalų $I_1 \cup I_2$. Tada

$$P(Y \in J) = P(X \in I_1 \cup I_2) \approx \nu(x)\Delta x_1 + \nu(1-x)\Delta x_2. \quad (x_2)$$

Naudodamiesi paskutiniąja lygybe, bei (x_1) gauname, kad

$$\nu(y) = \frac{\nu(x)}{|f'(x)|} + \frac{\nu(1-x)}{|f'(1-x)|}. \quad (x_3)$$

Paskutinioji lygybė vadinama Frobenijau-Perono lygtimi.

Taikykite šią lygtį tuo atveju, kai

$$\nu(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{x(1-x)}}.$$

Naudodamiesi tapatybe

$$1 - 4x(1-x) = (2x-1)^2$$

iš (x_3) kairiosios lygybės pusės gauname, kad

$$\begin{aligned} \nu(y) &= \nu(4x(1-x)) = \frac{1}{\pi\sqrt{4x(1-x)(1-4x(1-x))}} \\ &= \frac{1}{2\pi|2x-1|\sqrt{x(1-x)}}. \end{aligned}$$

Pastebėkime, kad $\nu(1-x) = \nu(x)$ ir $f'(1-x) = -f'(x)$. Taigi, $|f'(1-x)| = |f'(x)|$. Remdamiesi šiais sąryšiais gauname, kad

$$\begin{aligned} \frac{\nu(x)}{|f'(x)|} + \frac{\nu(1-x)}{|f'(1-x)|} &= \frac{2\nu(x)}{|f'(x)|} \\ &= \frac{2}{\pi 4|2x-1|\sqrt{x(1-x)}}. \end{aligned}$$

Gauname funkcionalinę lygtį kurią tenkina tankis $\nu(x)$. Dar daugiau, galima parodyti, kad toks tankis yra vienintelis. Taigi, dešinioji funkcionalinės lygties pusė gali būti interpretuojama kaip operatorius, kuris aibrėžia naują skirstinį $\Phi(\nu)$ duotam tankiui ν , tokiu būdu:

$$\Phi(\nu)(y) = \sum_{x \in f^{-1}(y)} \frac{\nu(x)}{|f'(x)|}, \quad y \in [0, 1].$$

Pradėję nuo tikimybinio tankio ν_0 mes galime iteruoti Frobenijaus-Perono operatorių Φ :

$$\nu_{k+1} = \Phi(\nu_k), \quad k = 1, 2, \dots$$

Taigi, gauname tikimybinių matų seką, kuri konverguoja prie tikimybinio tankio

$$\nu(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{x(1-x)}}.$$

Naudojant šią tankio funkciją mes galime įvertinti išlikusių orbitų parametą τ . Panauginėkime, bet kokį rinkinį pradinių taškų ir jų orbitas. Atlikę šioms taškams apie 36

iteracijas jie išsibarstys virš vienetinio intervalo maždaug pagal arcsinuso dėsnį. O kiek gi taškų paklius į intervalą $J = [0.68, 0.69]$. Tai gali būti įvertinta naudojantis invariantiniu arksinuso skirstiniu arti centro, padaugintu iš intervalo ilgio:

$$\frac{\nu(0.685)}{100} = \frac{1}{100\pi\sqrt{0.685(1-0.685)}} \approx 0.0068525$$

padaugintas iš visų taškų skaičiaus. Arba

$$\int_{0.68}^{0.69} \frac{dx}{\pi\sqrt{x(1-x)}} = \frac{2}{\pi} \approx 0.0068527$$

padaugintam iš visų taškų skaičiaus. Jei pasirenkame kaip ir anksčiau 10000 taškų, tai šis skaičius apytiksliai lygus 68.525, o tai gana neblogai aproksimuoja praktinius duomenis, kuriais remiantis turėjome, kad patenkančių taškų skaičius yra lygus 63. Tam, kad įvertinti parametą τ , mums reikia iš visų taškų pašalinti "pabėgusių taškų" skaičių, padauginus iš visų taškų skaičiaus ir šį skirtumą prilyginti $e^{-\frac{n}{\tau}}$, $n = 1$.

Taigi, išsprendę lygtį:

$$(1 - 0.0068525)^\tau = \frac{1}{e}$$

gauname, kad $\tau \approx 145$.

Užduotys

1. Nurodykite metodą, kaip būtų galima suteikti adresus Sierpinskio trikampio elementams.

2. Raskite IAS $\{\mathcal{R}; \omega_1(x) = 0, \omega_2 = \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\}$ periodinius taškus.

3. Kokias sąlygas turi tenkinti IAS atraktorius, kad jo neskaitus taškų poaibis turėtų nevienareikšmius adresus.

4. Taikydami grafinį iteracijų metodą raskite taškų 0.5, 0.75, 1 orbitas, kai $f(x) = 4x(1-x)$.

5. Tarkime, kad $f(x) = x^2 + 0.35$. Grafinės iteracijos būdu raskite taško 0.1 iteraciją. Jei egzistuoja, raskite šios transformacijos atstumiančius ir pritraukiančius taškus.

6. Raskite transformacijų

$$\omega_1(x) = \frac{x}{4} + \frac{1}{4}, \quad \omega_2(x) = \frac{x}{4} + \frac{3}{4}, \quad \omega_3(x) = \frac{x}{4} + \frac{1}{2},$$

nejudamus taškus ir nustatykite ar jie pritraukiantys ar atstumiantys.

7. Tarkime, kad duota dinaminė sistema $\{[0, 1]; \frac{x}{2}(1-x)\}$. Raskite šios dinaminės sistemos nejudamus taškus, bei nurodykite jų prigimtį.

8. Tarkime, kad duota dinaminė sistema $\{[0, 1]; 2x(1-x)\}$. Raskite šios dinaminės sistemos nejudamus taškus, bei nurodykite jų prigimtį.

9. Raskite pateiktų diskrečių dinaminių sistemų nejudamus taškus bei nustatykite šių taškų pobūdį:

$$(a) f(x) = -x^2 - x + 0.25;$$

$$(b) f(x) = e^x;$$

$$(c) f(x) = e^{\cos x}.$$

10. Raskite dinaminės sistemos

$$f_c(x) = -cx \ln x$$

bifurkacinius taškus, naudodami empirinius metodus (parašykite programą).

11. Diskreti populiacijos reprodukcijos dinaminė sistema yra apibrėžta tokiu būdu:

$$f(x) = rx^c(1-x),$$

čia $x = x(t)$ yra populiacijos tankumas laiko momentu t , o r, c yra teigiamos konstantos. Raskite šios dinaminės sistemos nejudamus taškus ir juos charakterizuokite.

12. Rekurentinė seka

$$f(x) = rx^2(1-x) - cx,$$

yra rūšies vaisingumo modelis. Konstanta c – rūšies charakteristika. Panagrinėkite šią dinaminę sistemą, kai r yra didesnė nei kritinė reikšmė r_c .

13. Tarkime, kad

$$f_c(x) = cx(1-x).$$

Įrodykite, kad jei $c = 2$ ir a yra lygties

$$x = 0.5(1 - \exp(a))$$

šaknis, tai seka $x_k = f_c^k(x)$ gali būti pakeista seka

$$x_k = 0.5(1 - \exp(2^k a)).$$

Tarkime, kad $c = 4$ ir $0 \leq a < 1$ yra lygties $x = \sin^2(\pi a)$ šaknis. Tada logistinės transformacijos seka galim būti pakeista tokia seka:

$$x_k = \sin^2(2^k \pi a).$$

Tarkime, kad $a = 0.a_1a_2a_3\dots$ užrašytas binarine forma. Parodykite, kad f_4 turi nestabilią p periodo orbitą, $\forall p \in \mathcal{N}$, kuri yra tiršta intervale $[0, 1]$.

Literatūra

1. Barnsley M. F. Fractals Everywhere , 2nd ed, Academic Press, Boston (1993).
2. Falconer K., Fractal Geometry, Wiley (2003)
3. Sanderfur, James T., Discrete Dynamical Systems: Theory and Applications, Clarendon Press (1990)
4. Scheinerman E.R., Invitation to Dynamical Systems, Department of Mathematical Sciences The Johns Hopkins University (Internet Version) (2000).
5. Sternberg S., Dynamical Systems (Internet Version) (2000).