II AIBĖS. FUNKCIJOS

2.1 Aibių algebros pradmenys

Aibe vadinsime bet kokių objektų rinkinį. Objektus sudarančius aibę vadinsime aibės elementais. Aibes žymėsime didžiosiomis lotyniškosios abėcėlės raidėmis, o elementus- mažosiomis. Suteikdami aibei vardą (žymenį) naudosime lygybės ženklą, elementus nurodydami tarp riestinių skliaustų. Pavyzdžiui, jei aibę A sudaro elementai $1, m, 7, b$, tai šią priklausomybę žymėsime taip: $A = \{1, m, 7, b\}$. Simboliu $A = \{x;\ P(x)\}$ žymėsime aibę, kurią sudaro elementai x, tenkinantys savybę $P(x)$. Jeigu elementas a yra aibėje A, tai simboliškai šią priklausomybę žymėsime $a \in A$ ir jei elemento b nėra aibėje A, tai žymėsime $b \notin A$.

Pavyzdys Tegu $A = \{-3, a, b, 4\}$. Tada $a \in A$, bet $2 \notin A$.

Simboliniu sakiniu $\forall x \in A \ldots$ trumpinsime tokį sakinį: "visi aibės A elementai tenkina savybę nurodytą daugtaškio vietoje", o simbolinis sakinys $\exists x \in A \cdots -$ yra sakinio "yra aibėje A bent vienas elementas tenkinantis savybę nurodytą daugtaškio vietoje", trumpinys. Beje, šie sakiniai, kitaip tariant teiginiai, gali būti tik teisingi arba klaidingi.

Pavyzdys Sakiniu "$\forall x \in [0, 1],\ \sin x > 0$" teigiama, kad visiems intervalo $[0, 1]$ skaičiams (kampams išreikštiems radianais) sinuso reikšmė yra teigiama. Žinome, kad tai teisingas tvirtinimas. Tuo tarpu sakinys "$\exists x \in \{0, 1, 2, 3\}, x^2 + 1 = 0$" yra klaidingas teiginys.

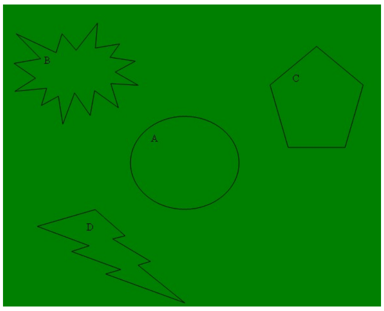
Jei aibės A elementai a ir b yra identiški, tik žymimi kitaip, tai norėdami pabrėžti šį faktą rašysime $a = b$. Be to, jei elementai sutampa, tai į aibės A elementų sąrašą įtrauksime tik vieną iš jų. Kitaip tariant laikome, kad tarp išvardintų aibės elementų nėra pasikartojančių.

Prisiminkime skaičių aibių žymėjimus. Simboliu $\mathbb{N}$ žymime natūraliųjų skaičių aibę, $\mathbb{N}_0-$ sveikųjų neneigiamų skaičių aibę, $\mathbb{N}-$ natūraliųjų skaičių aibę, $\mathbb{Z}-$ sveikųjų skaičių aibę, $\mathbb{Q}-$ racionaliųjų skaičių aibę, $\mathbb{I}-$ iracionaliųjų skaičių aibę ir $\mathbb{R}-$ realiųjų skaičių aibę.

Aibes patogu vaizduoti plokštumos sritimis, išskiriant jas uždarais kontūrais, o kartais ir nurodant šiose srityse aibės elementus. Toks aibių vaizdavimo būdas yra vadinamas *Veno diagramomis.*

Aibė, kuriai priklauso visos tuo metu nagrinėjamoms aibės yra vadinama *universaliąja aibe.* Universaliosios aibės parinkimas priklauso nuo sprendžiamos problemos. Jei mes nagrinėjame aibes, kurių elementai yra sveiki skaičiai, tai šiuo atveju universaliąja aibe laikysime sveikųjų skaičių aibę, jei teks susidurti tik su racionaliaisiais skaičiais, tai universaliąja aibe laikysime aibę $\mathbb{Q}$ ir t.t.

Pateiktame 1 pav. universaliąją aibę vaizduojame žalia spalva, o šiai universaliąjai aibei priklausančias aibes A, B, C, D išskiriame juodu kontūru.



1 pav.

Naudodamiesi aukščiau pateiktais žymėjimais aibę galime užrašyti tokiu būdu: $A = \{x; x \in A\}$. Pavyzdžiui, aibė $\{n; n \in \mathbb{N}\}$ yra natūraliųjų skaičių aibė, $\{2n - 1; n \in \mathbb{N}\}$ yra nelyginių natūraliųjų skaičių aibė. Aibę turinčią vieną elementą, tarkime a, remdamiesi pateiktais žymėjimais užrašome taip: $A = \{a\}$. Atkreipsime dėmesį, kad tarp aibės $\{a\}$ ir elemento a negalima dėti lygybės ženklo, nes tai skirtingi objektai. Aibę $\{x \in A; x \neq x\}$ vadinsime tuščia. Ją žymėsime simboliu $\emptyset$. Pastebėsime, kad tuščią aibę galima užrašyti labai įvairiai. Pavyzdžiui, aibė $\{x \in \mathbb{R}; |x| < 0\} = \emptyset$, kadangi nėra tokių realiųjų skaičių, kurie tenkintų nurodytą salygą. Kitaip tariant aibę laikome tuščia, jeigu šioje aibėje nėra elementų.

Apibrėžimas *Sakysime, kad aibė A yra aibės B poaibis (žymėsime $A \subset B$), jeigu $\forall x \in A$ išplaukia, kad $x \in B$.*

Kitaip tariant, aibė A yra aibės B poaibis jei visi aibės A elementai yra aibėje B.

Tarkime, kad $A = \{1, 2, a, c, 0\}$, o $B = \{a, 0\}$. Tada aibė $B \subset A$. Aišku, kad aibė A yra aibės A poaibis. Sutarsime laikyti, kad tuščia aibė yra bet kokios aibės poaibis. Tarkime, kad aibė A yra fiksuota. Tada aibė A ir $\emptyset$ yra vadinamos *netiesioginiais aibės A poaibiais.* Jeigu aibėje yra n elementų (*tokias aibes vadiname baigtinėmis*), tai iš šios aibės elementų galime sudaryti 2^n šios aibės poaibių. (Pasvarstykite kodėl?) Aišku, kad jei aibė begalinė, tai iš šios aibės elementų galima sudaryti begalinį poaibių skaičių.

Pavyzdys Atkreipsime dėmesį, kad dviejų netuščių aibių galima trejopa tarpusavio padėtis:

1) aibės neturi bendrų elementų;

2) aibės turi bendrus elementus;

3) viena aibė yra kitos poaibis.

Šios trys padėtys iliustruojamos 2 paveikslėlyje.

Apibrėžimas *Sakysime, kad aibės A, B lygios ($A = B$), jeigu $A \subset B$ ir $B \subset A$.*

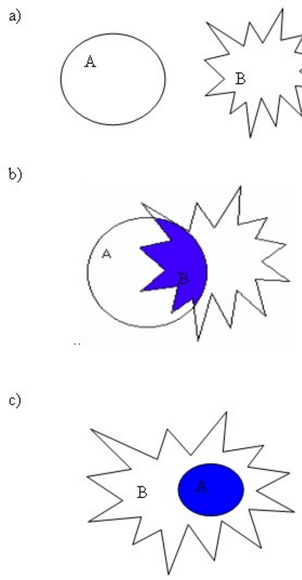
Pavyzdys *Aibės $A = \{1\}$ ir $B = \{x; x - 1 = 0\}$ yra lygios, nes šias aibes sudaro tie patys elementai.*

Taigi, aibių lygybė priklauso ne nuo aibės užrašymo būdo, bet nuo elementų, sudarančių šias aibes.

Apibrėžimas *Aibių A ir B sankirta (žymėsime $A \cap B$) vadinsime aibę* $\{x, x \in A \,\text{ir}\, x \in B\}$. Kitaip tariant, dviejų aibių sankirta yra aibė, kuriai priklauso šių aibių bendri elementai.

Pavyzdys Aibių $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ir $B = \{x; x > 5, \quad B \subset \mathbb{N}\}$ sankirta yra aibė $A = \{6\}$. Sakysime, kad aibės nesikerta, jeigu jų sankirta sutampa su tuščia aibe.

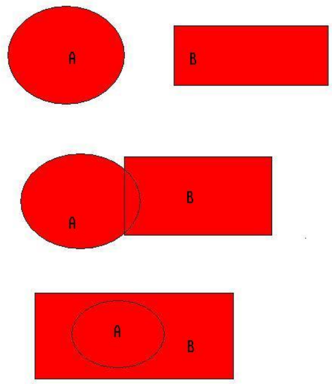
Veno diagramomis (2 pav.) iliustruojame aibių sankirtos veiksmą. b) ir c) atvejais sankirta iliustruojama mėlyna sritimi. a) atveju turime nesikertančias aibes, taigi rezultatas tuščia aibė.



2 pav.

Apibrėžimas *Aibę $D = \{x; x \in A$ arba $x \in B\}$ vadinsime aibių sąjunga, kurią žymėsime $A \cup B$.*

Kitaip tariant aibių A ir B sąjunga yra aibė, kurią sudaro elementai priklausantys bent vienai iš šių aibių A arba B. Iliustruojame sąjungos veiksmą Veno diagramomis 3 pav. Aibė A yra vaizduojama plokštumos stačiakampiu, o aibė $B-$ ovalu. Operacijos rezultatas iliustruojamas raudona spalva.



3 pav.

Pavyzdys Tarkime, kad $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ir $B = \{x; x > 5\}$, $B \subset \mathbb{N}$. Tada $A \cup B = \mathbb{N}$.

Apibendrinkime šiuos veiksmus, bet kokiam aibių skaičiui. Tarkime, kad $\mathbb{I} \subset \mathbb{N}$ kokia nors indeksų aibė ir be to, bet kokį numerį i galime susieti su aibe A_i (tai yra aibes galime sunumeruoti). Tada šių visų aibių sąjungą ir sankirtą žymėsime tokiu būdu:

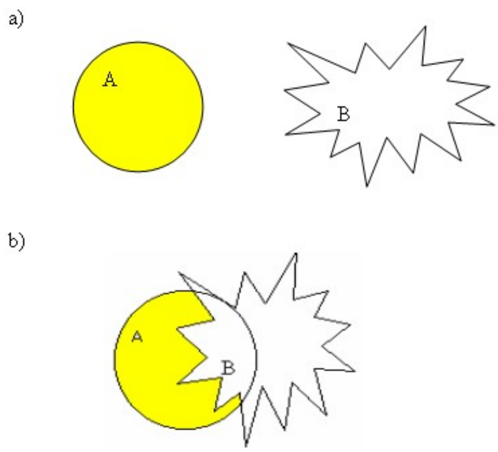
$$\bigcup_{i \in I} A_i := \{x; \exists i \in I, x \in A_i\}, \quad \bigcap_{i \in I} A_i := \{x; \forall i \in I, x \in A_i\}.$$

Pavyzdys Tarkime, kad $I = \{1, 2, 3, \ldots, 10\}$. Apibrėžkime $A_i = \{1, 2, 3, \ldots, i\}$. Tada

$$\bigcup_{2 \leq i \leq 10} A_i := A_{10}, \quad \bigcap_{2 \leq i \leq 10} A_i := A_2 \quad .$$

Apibrėžimas *Aibių A ir B skirtumu (žymėsime $A \setminus B$), vadinsime aibę* $A \setminus B = \{x; x \in A \text{ ir } x \notin B\}$.

Kitaip tariant, aibių A ir B skirtumą sudaro pirmojo skirtumo nario (nagrinėjamu atveju aibės A) elementai, kurių nėra aibėje B. 4 pav. iliustruojame aibių A ir B skirtumo operaciją (rezultatas geltona sritis) naudodami Veno diagramas:



4 pav.

Pavyzdys Tegu $A = \{n,\ n = 2k,\ k \in \mathbb{N}.\}$ Tada $\mathbb{N} \setminus A = \{n,\ n = 2k - 1,\ k \in \mathbb{N}.\}$

Apibrėžimas *Aibės A papildiniu, kurį žymėsime $\overline{A}$, vadinsime aibę* $\overline{A} = \{x \in U, x \notin A\}$.

Kalbant apie aibės papildinį, svarbu žinoti universaliąją aibę, kuriai priklauso nagrinėjamoji aibė, kadangi aibės papildinys yra universaliosios aibės elementų visuma, neturinti bendrų elementų su pradine aibe.

Pateiksime keletą svarbiausių, aibių veiksmų, savybių.
Tarkime, kad A, B, C bet kokios aibės. Teisingos tokios aibių veiksmų savybės:
1. $B \setminus (B \setminus A) = A \cap B$;
2. $\overline{\overline{A}} = A$;
3. $A \cap B = B \cap A$ ir $A \cup B = B \cup A$;
4. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$, $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$;
5. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;
6. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;
7. $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$;
8. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$;
9. $A \setminus B = A \cap \overline{B}$.
7. ir 8. formulės vadinamos de Morgano dėsniais.
Patikrinkite šias aibių savybes naudodami Veno diagramas bei taikydami logikos dėsnius.

Apibrėžimas *Tarkime, kad a, b du realūs skaičiai. Tada uždaru intervalu vadinsime aibę*

$$[a; b] = \{x \in \mathbb{R}, a \leq x \leq b\}.$$

Atviru, pusiau atviru bei pusiau uždaru intervalais, atitinkamai, vadinsime tokias aibes:

$$(a; b) = \{x \in \mathbb{R}, a < x < b\},\ (a; b] = \{x \in \mathbb{R}, a < x \leq b\},$$

$$[a; b) = \{x \in \mathbb{R}, a \leq x < b\}.$$

Pastaba Intervalo pradžią ir pabaigą nurodančius skaičius skirsime simboliais ; arba dirbant su sveikaisiais skaičiais dažnai naudosime simbolį , . Taigi, $[2; 3] = [2, 3]$.

Pavyzdys Tarkime, kad intervalai:

$$A = [-5; 7],\ B = [0; 10],\ C = [8; 15]$$

yra universaliosios aibės $I = [-10; 20] \subset \mathbb{R}$, poaibiai. Atlikime veiksmus su nurodytomis aibėmis. Turime

$$\overline{A} = [-10; -5) \cup (7; 20]; A \cap B = [0; 7];\quad B \setminus C = [0; 8).$$

Pastaba Kalbant apie realiuosius skaičius labai svarbu paminėti, kad kokie bebūtų du skirtingi realieji skaičiai, visada egzistuoja trečiasis skaičius, nesutampantis su dviem minėtais, kuris yra tarp šių skaičių. Skaičius esantis tarp dviejų pirmųjų gali būti gaunamas kaip šių skaičių aritmetinis vidurkis.

Pastarąja realiųjų skaičių savybe dažnai remiamasi pagrindžiant teiginius, apibrėžiant sąvokas.

Apibrėžimas *Realaus skaičiaus a moduliu (žymėsime $|a|$) vadinsime neneigiamą realųjį skaičių*

$$|a| = \begin{cases} a;\ a \geq 0, \\ -a;\ a < 0. \end{cases}$$

Modulio sąvoka naudojama apibrėžiant atstumą tarp bet kokių dviejų taškų (skaičių) realiųjų skaičių tiesėje. Be to atstumo sąvoka ypatingai svarbi sprendžiant matematinės analizės problemas.

Pavyzdys

Duota funkcija

$$f(x) = |x^2 + x - 2|.$$

Naudojant modulio apibrėžimą šią funkciją galime perrašyti tokiu būdu:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x - 2; \ x \in (-\infty; -2] \cup [1; \infty), \\ -x^2 - x + 2; \ x \in (-2; 1). \end{cases}$$

2.2 Aibių rėžiai

Apibrėžimas *Sakysime, kad aibė $A \subset \mathbb{R}$ yra aprėžta iš viršaus, jeigu egzistuoja $p \in \mathbb{R}$ toks, kad visiems $a \in A$, $a \leq p$. Skaičių p vadinsime aibės A viršutiniu rėžiu. Patį mažiausią viršutinį rėžį vadinsime aibės A tiksliuoju viršutiniu rėžiu, kurį žymėsime simboliu* $\sup A$.

Apibrėžimas *Sakysime, kad aibė $A \subset \mathbb{R}$ yra aprėžta iš apačios, jeigu egzistuoja $q \in \mathbb{R}$ toks, kad visiems $a \in A$, $a \geq q$. Skaičių q vadinsime aibės A apatiniu rėžiu. Patį didžiausią aibės A apatinį rėžį vadinsime tiksliuoju aibės A apatiniu rėžiu ir žymėsime* $\inf A$.

Apibrėžimas *Sakysime, kad aibė $A \subset \mathbb{R}$ yra aprėžta, jeigu $\exists r \in \mathbb{R}$ toks, kad $\forall a \in A$ teisingos nelygybės: $|a| \leq r$.*

Pastaba Tikslieji aibės A rėžiai gali priklausyti aibei A bet gali ir nepriklausyti šiai aibei.

Pavyzdys Duota aibė $A = (3, 7]$. Tada $\sup A = 7$ ir $\inf A = 3$. Matome, kad $\sup A$ priklauso aibei, o $\inf A$ priklauso šios aibės papildiniui.

Pastaba *Sakysime, kad aibė $A \subset \mathbb{R}$ yra neaprėžta iš apačios (iš viršaus), jeigu neegzistuoja šios aibės tikslusis apatinis (viršutinio) rėžis.* Kitaip tariant šis teiginys yra priešingas aukščiau aprašytiems.
Šiuo atveju sakysime, kad aibės tikslus apatinis rėžis lygus $-\infty$, arba $\inf A = -\infty$ (∞, arba $\sup A = \infty$.) Sakysime, kad aibė $A \subset \mathbb{R}$ yra *neaprėžta,* jeigu neegzistuoja šios aibės tikslusis viršutinis rėžis arba tikslusis apatinis rėžis.

Naudodamiesi intervalo bei tikslaus rėžio sąvokomis realiųjų skaičių aibę galime pažymėti tokiu būdu: $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$.

Pavyzdys Tarkime, kad duotos aibės:

$$A = (0, 3] \cup \{5; 7\}, \ \ B = (-\infty, -2], \ C = \{0, 4, 8\} \cup (12, +\infty).$$

Raskime šių aibių tikslų viršutinį bei tikslų apatinį rėžius.
Remiantis apibrėžimu gauname, kad $\inf A = 0$, $\sup A = 7$, $\inf B = -\infty$, $\sup B = -2$, $\inf C = 0$, $\sup C = +\infty$.
Pastebėsime, kad $\sup A$ arba $\inf A$ nebūtinai yra aibės A elementai.

Pavyzdys Tegu $A = \{x, \ |x+1| < 2\}$, $B = \{x, \ x^2 + 5x > 0\}$. Raskime šių aibių tikslius viršutinius bei tikslius apatinius rėžius. Be to atlikime tokius aibių veiksmus:

$$A \cup B, \ A \cap B, \ A^c \cap B, A \setminus B^c.$$

Nesunku suprasti, kad $A = (-3; 1)$ ir $B = (-\infty; -5) \cup (0; +\infty)$. Tada $\sup A = 1, \inf A = -3$ ir $\sup B = +\infty$, $\inf B = -\infty$. Remdamiesi aibių apibrėžimais gauname, kad

$$A \cup B = (-\infty; -5) \cup (-3; +\infty); \quad A \cap B = (0; 1); \quad A^c \cap B = (-\infty; -5) \cup (1; +\infty); \quad A \setminus B^c = (0; 1).$$

2.3 Aibių Dekarto sandauga

Tegu A yra kokia nors netuščia aibė. Reiškinį $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$ vadinsime n ilgio (kartais $n-$ elemenčiu) rinkiniu, elementai a_i nebūtinai skirtingi. Simboliai $a_1, \ldots, a_n$ yra vadinami rinkinio elementais. Du vienodo ilgio rinkinius $(a_1, \ldots, a_n)$ ir $(b_1, \ldots, b_n)$ vadinsime lygiais, jeigu atitinkami rinkinių elementai sutampa, t.y. $a_1 = b_1, a_2 = b_2, \ldots, a_n = b_n$. Remdamiesi pastaruoju lygybės apibrėžimu galime tvirtinti, kad elemento padėtis rinkinyje yra svarbi, kai tuo tarpu aibės elementų išdėstymas, apibrėžiant aibę, nėra svarbus.

Pavyzdys Aibės $A = \{a, b, 2\}$ ir $B = \{2, a, b\}$ yra lygios, o tuo tarpu rinkiniai $(a, b, 2)$ ir $(2, a, b)$ yra skirtingi.

Aibių A ir B *Dekarto sandauga* vadinsime tokią porų aibę:

$$A \times B = \{(a, b); a \in A, b \in B\}.$$

Kitaip tariant, aibių A ir B Dekarto sandauga vadiname visus dvielemenčius rinkinius, kuriuos galime sudaryti iš nurodytų aibių elementų, kai pirmoje vietoje rašome bet kurį, pirmojo dauginamojo elementą, o antroje, bet kurį antrojo dauginamojo elementą. Tuo atveju kai dauginamieji vienodi, tai sandaugą $A \times A = A^2$ vadiname *Dekarto kvadratu*. Jei bent vienas dauginamasis yra tuščia aibė, tai sandauga taip pat tuščia.

Pavyzdys Tarkime, kad $A = [1, 2]$, $B = [2, 4] \cup \{5\}$, $A, B \subset \mathbb{R}$. Tada

$$A \times B = \{(x, y), \ \ x \in A, \ y \in B\}.$$

Tegu $A = \{-1, 0, 1\}$, $B = \{3, 0\}$. Tada

$$A \times B = \{(-1, 3); (-1, 0); (0, 3); (0, 0); (1, 3); (1, 0)\}.$$

Pastebėsime, kad Dekarto sandaugą galime apibrėžti ir tarp bet kokio aibių skaičiaus.

Apibrėžkime aibių, turinčių baigtinį elementų skaičių, Dekarto sandaugą. Tarkime, kad duotos aibės $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Tada šių aibių *Dekarto sandauga* vadinsime tokią, n elemenčių rinkinių aibę:

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots a_n); a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \ldots, a_n \in A_n\}.$$

Pastebėsime, kad bendrai paėmus, $A \times B \neq B \times A$.

Nurodysime aibių Dekarto sandaugos savybes:

1. $$(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C);$$

2. $$C \times (A \cup B) = (C \times A) \cup (C \times B);$$

3. $$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C);$$

4. $$(B \cap C) \times A = (B \times A) \cap (C \times A);$$

5. $$(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D).$$

2.4 Funkcijos sąvoka. Reiškimo būdai

Praktikoje mes susiduriame su įvairias dydžiais, pavyzdžiui- temperatūra, ilgiu, plotu, greičiu, slėgiu ir t.t. Matematikos mokslas, nagrinėdamas įvairius dydžius, paprastai nesidomi jų prigimtimi. Įvairiuose procesuose, dydžių skaitinės charakteristikos gali kisti (paprastai kintant sąlygoms arba laikui), bet gali išlikti ir nekintančiomis. Priklausomai nuo šių savybių, dydžiai skirstomi į *kintamuosius* ir *pastoviuosius*.

Dydį vadinsime *kintamuoju*, jeigu pastarasis gali įgyti įvairias skaitines reikšmes. Pavyzdžiui, laikas yra kintamas dydis. Dydį vadinsime *pastoviu* arba *konstanta*, esant tam tikroms sąlygoms, jeigu dydžio skaitinė reikšmė esant minėtoms sąlygoms, išlieka pastovi. Pavyzdžiui vanduo išlaiko pastovų ledo būvį, jei temperatūra ne aukštesnė negu nulis laipsnių Celsijaus. Dydis vadinamas *absoliučia konstanta,* jeigu jis pastovus nepriklausomai nuo sąlygų (parametrų). Pavyzdžiui tokių konstantų pavyzdžiai - fizikinės konstantos. Kintamojo dydžio įgyjamų reikšmių aibė yra vadinama *kintamojo dydžio kitimo sritimi.* Kintamuosius dydžius žymėsime simboliais x, y, z, u, v, o pastovius a, b, c, d, e.

Tarkime, kad A, B dvi aibės, nebūtinai skirtingos.

Apibrėžimas *Taisyklę f, kuria aibės A kai kuriems elementams ($a \in A$) priskiriame po kokį nors vieną aibės $b \in B$ elementą, vadinsime funkcija (žymėsime šį priskyrimą $f(a) = b$), apibrėžta aibėje A ir įgyjančia reikšmes aibėje B (arba $f : A \longrightarrow B$). Aibė A, vadinama funkcijos f apibrėžimo aibe, o aibė B, funkcijos reikšmių aibe.*

Aibę $D(f) = \{a \in A; \exists b \in B, f(a) = b\}$, vadinsime funkcijos f apibrėžimo sritimi, o aibę $E(f) = \{b \in B; \exists a \in D(f), f(a) = b\}$ vadinsime funkcijos f reikšmių sritimi. Elementai $b \in E(f)$ vadinami funkcijos reikšmėmis (kartais vaizdais), o elementai $a \in D(f)-$ šios funkcijos argumentais arba kintamaisiais (kartais pirmvaizdžiais). Pastebėsime, kad $D(f) \subset A$, $E(f) \subset B$.

Pastaba Žemiau, jei nebus atskirai paminėta laikysime, kad jei $f : A \to B$, tai $A = D(f)$.

Pastaba Jeigu funkcijos apibrėžimo bei reikšmių aibės yra realiųjų skaičių aibės poaibiai, tai ši funkcija vadinama *realaus argumento bei realiųjų reikšmių funkcija.*

Iš apibrėžimo išplaukia, kad minėtoji taisyklė (funkcija) gali būti nusakyta formule f, kuria nurodome kokiu būdu kintamąjam $x \in D(f)$, priskiriamas elementas $y \in E(f)$. Šis funkcijos užrašymo būdas vadinamas analiziniu. Skaitytojui minėtas funkcijos užrašymo būdas yra žinomas.

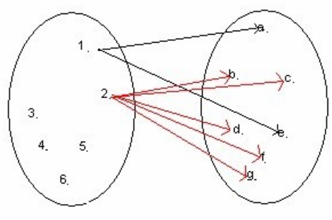
Pavyzdys Tarkime, kad

$$A = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \quad B = \{2, 3, 4, 6, 9\}$$

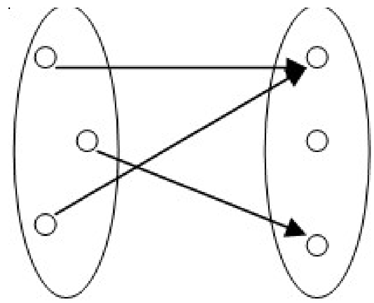
ir funkcija $f : A \to B$ apibrėžta tokiu būdu: aibės A elementui a priskiriame aibės B elementą b, jei $a - b = 1$. Taigi, $f(3) = 2$, $f(4) = 3$, $f(5) = 4$. Tada $D(f) = \{3, 4, 5\}$, $E(f) = \{2, 3, 4\}$.

Pavyzdys Tarkime, kad P yra pradinis kapitalas, o p metinė paprastųjų palūkanų norma, kuri perskaičiuojama bet kokiu laiko momentu t. Tada taisyklė $f(t) = (1 + tp)P$ apibrėžia formulę būsimąjai vertei skaičiuoti, bet kokiu ateities laiko momentu t. Ši taisyklė yra funkcija, nes vienam laiko momentui priskiria vieną vertę.

5 pav. yra pateikta taisyklė, kuri nėra funkcija. Ši taisyklė vienetui priskiria balses, o dvejetui priebalses. Matome, kad vienam aibės A elementui yra priskiriama daugiau negu vienas aibės B elementas. Tuo tarpu 6 pav. pateikta taisyklė yra funkcija.



5 pav.



6 pav.

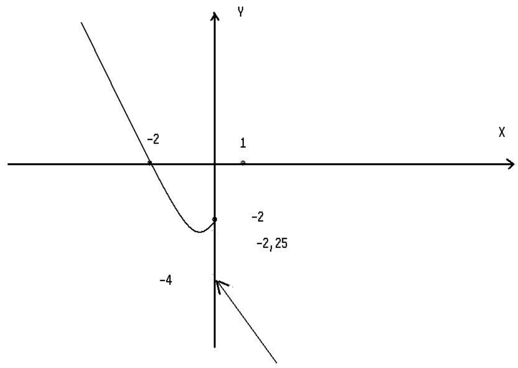
Pavyzdys Funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, apibrėžta formule $y = f(x) = x^2 + 1$ realiųjų skaičių aibės elementams priskiria intervalo $[1, \infty)$ elementus. Taigi, šios funkcijos $D(f) = \mathbb{R}$, $E(f) = [1, \infty)$.

Norėtume dar kartą atkreipti dėmesį į tai, kad f yra taisyklė, kuria nurodome kintamojo x veikimo būdą. Aukščiau apibrėžta funkcija, arba taisyklė f argumentą "veikia" tokiu būdu: x pakelia kvadratu ir prie jo prideda 1.

Panagrinėkime funkciją

$$y = f(x) = \begin{cases} x^2 + x - 2; \ -\infty \leq x \leq 0, \\ -x - 4; \ x > 0. \end{cases}$$

Šios funkcijos grafiko eskizas pateiktas 7 pav.



7 pav.

Pastaroji funkcija apibrėžta aibėje $D(f) = \mathbb{R}$, o šios funkcijos reikšmių sritis yra aibė $E(f) = (-\infty, -4) \cup [-\frac{9}{4}, \infty)$.

Pavyzdys Įmonės bendrųjų sąnaudų (kaštų) funkcija $CT(x) = xV + F$, čia $V-$ vieno gaminio kintamosios sąnaudos (kintamieji kaštai), $F-$ pastoviosios sąnaudos (pastovieji kaštai), o x gaminių skaičius. Jei $R(x)$ yra pajamos gautos už x gaminių, o p yra gaminio kaina, tai pelno funkcija, pardavus x gaminių yra tokia: $P(x) = R(x) - CT(x) = (p - V)x - F$.

Nesunku suprasti, kad šios funkcijos apibrėžimo sritis yra intervalas $D(f) = [0, \infty)$, o reikšmių sritis formaliai yra visi realieji skaičiai.

Pavyzdys Tarkime, kad pelno funkcija $R(p)$ apibrėžta tokia formule: $R = 700p - 7p^2$, čia $p \in [0, \infty)$ yra kaina. Matome, kad šios funkcijos apibrėžimo sritis $D(R) = [0, \infty)$ (kaina negali būti neigiama), o reikšmių sritis yra intervalas $(-\infty, 17500)$.

Jei pelno funkcijai kelsime papildomus apribojimus, t.y. nuostoliai (neigiamas pelnas) negalimi, tada $D(R) = [0; 100]$, o reikšmių sritis yra intervalas $[0, 17500]$.

Labai dažnai funkcija yra reiškiama grafiniu būdu, kuomet ryšys tarp funkcijos argumento ir reikšmės nurodomas grafiku, paprastai ortogonalioje Dekarto koordinačių sistemoje. Pavyzdžiui, ekonominio augimo (nuosmūkio) grafikas, nurodantis priklausomybę tarp laiko ir BVP dydžio. Temperatūros kitimo grafikas, tarkime, paros bėgyje. Šiuo atveju argumentas yra paros laiko vienetas, o temperatūros dydis yra reikšmė. Dauguma fizikinių bei ekonominių reiškinių yra iliustruojami grafiniu būdu.

Tarkime, kad duota funkcija $y = f(x)$. Tada plokštumos taškų aibę

$$G_f = \{(x, f(x)); x \in D(f), f(x) \in E(f)\},$$

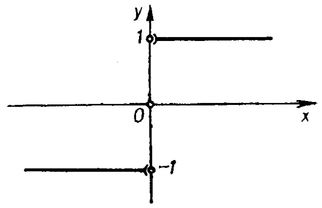
vadinsime šios funkcijos grafiku.

Pastaba Grafiku vadiname porų aibę, kai kiekvieną porą sudaro argumento ir šią argumento reikšmę atitinkanti funkcijos reikšmė. Šią porą pažymėję plokštumoje ir šios pažymėtus taškus nuosekliai (argumento didėjimo kryptimi) sujungę gausime kreivę, kurią taip pat vadinsime funkcijos grafiku.

Realiųjų skaičių aibėje apibrėžkime funkciją $f(x)$ tokiu būdu:

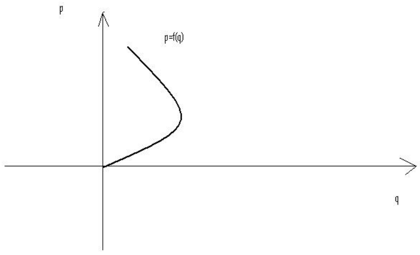
$$f(x) = \text{sgn}x = \begin{cases} 1, x > 0, \\ 0, x = 0, \\ -1, x < 0. \end{cases}$$

Šios funkcijos grafikas pateikiamas žemiau:



8 pav.

Nesunku matyti, kad tarp funkcijos ir plokštumos taškų aibės, kurią vadiname grafiku, egzistuoja abipus vienareikšmiška atitiktis. Kitaip tariant, jei turime grafiką, tai jis reprezentuoja funkciją ir atvirkščiai, jei turime funkciją apibrėžtą formule $y = f(x)$, tai galime nurodyti šios funkcijos grafiką. Žemiau pateiktame 9 pav. iliustruojama paklausos kreivė, kuri interpretuoja tokią situaciją: kaip nuo suvartotų prastesnės kokybės produktų kiekio priklauso vartotojų pajamos. Iš grafiko matyti, kad labai mažą prastesnės kokybės produktų kiekį panašiai vartoja ir nedideles ir dideles pajamas gaunantys vartotojai. Beje, ši taisyklė nėra funkcija.



9 pav.

Praktinėje veikloje, gana dažnai funkcijos apibrėžiamos lentele. Šiuo atveju, pateikiama atskirų argumento reikšmių ir jas atitinkančių funkcijos reikšmių lentelė. Tuo tarpu tarpines, lentelėje nenurodytas funkcijos reikšmes, atitinkančias tarpines argumento reikšmes, galime nurodyti apytiksliai. Žemiau pateiktoje lentelėje pateikiamas funkcinis ryšys tarp argumento x ir reikšmės y :

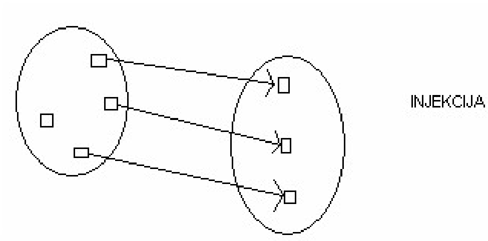
x	1	2	3	4	5	6
y	0	3	8	15	24	35

Matome, kad $f(1) = 0,\ f(2) = 3$ ir t.t.

Pastaba Procesą, kai turimą duomenų aibę aprašome kokia nors funkcine lygtimi paprastai vadiname *modeliavimu.* Kitaip tariant modeliuoti realiąją situaciją- reiškia ją aprašyti funkciniu sąryšiu (sąryšiais).

2.5 Funkcijų klasifikavimas

Apibrėžimas *Funkciją $f : A \to B$ vadinsime injekcija aibėje A, jei visiems $x, y \in A,\ x \neq y$ išplaukia, kad $f(x) \neq f(y)$.*



10 pav.

Kitaip tariant, funkcija yra injekcija tarp aibių A ir B jei skirtingus aibės A elementus priskiria skirtingiems aibės B elementams (žr. 10 pav).

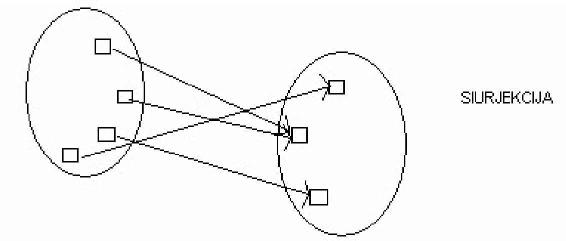
Pavyzdys Funkcija $r = pq$, čia r yra bendrosios pajamos, $p-$ produkto kaina, o q parduotų produktų kiekis. Tarkime, kad yra žinoma, kad produkto kaina su kiekiu (pavyzdžiui mėnesio poreikis) siejama tokiu būdu: $p = 1000 - 2q$. Tada

$$r = f(q) = (1000 - 2q)q.$$

Matome, kad tai kvadratinė funkcija, kurios grafikas parabolė. Šios parabolės viršūnė yra taške $(250, 125000)$. Vadinasi šios funkcijos apibrėžimo sritis visa realiųjų skaičių aibė, bet prasminga sritis tik tada, kai $q \geq 0$, o reikšmių aibė $E(f) = (-\infty, 125000)$. Aišku, kad ši funkcija bus injekcija, jei $q \in (0, 250)$ arba $(250, \infty)$. Tuo tarpu visoje apibrėžimo srityje ši funkcija nėra injekcija.

Apibrėžimas *Funkciją $f : A \to B$ vadinsime siurjekcija aibėje A, jei $\forall x \in A\ \exists y \in B,\ f(x) = y$ ir $\forall u \in B, \exists v \in A,\ f(v) = u$. Jei funkcija yra siurjekcija tarp aibių A ir B, tai $D(f) = A$ ir $E(f) = B$.*

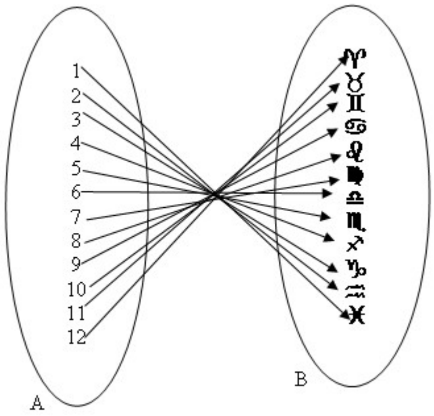
Jei funkcija $f : A \to B$ yra siurjekcija, tai šis funkcinis ryšys dažnai žymimas tokiu simboliu $f(A) = B$. Grafinis siurjekcijos pavyzdys pateikiamas 11 pav. Atkreipsime dėmesį į tai, kad brėžinyje rodykle nurodome funkcijos reikšmes.



11 pav.

Pastebėsime, kad aibių A ir B siurjekcija galima tik tuo atveju, kai aibėje A elementų skaičius ne mažesnis negu aibėje B.

Apibrėžimas Funkciją $f : A \to B$ vadinsime *bijekcija,* jei ši funkcija yra injekcija ir siurjekcija kartu (12 pav.).



12 pav.

Apibrėžimas *Sakysime, kad dvi aibės A, B yra ekvivalenčios, jeigu galime nurodyti bijekciją, siejančią šių aibių elementus.*

Pavyzdžiui, natūraliųjų skaičių aibė yra ekvivalenti sveikųjų skaičių aibei. Nurodykime bijekciją, siejančią šių aibių elementus. Bijekciją apibrėžkime tokiu būdu: bet kokiam neigiamam sveikam skaičiui $m < 0$, priskirkime natūralųjį skaičių $-2m$, o bet kokiam teigiamam sveikąjam skaičiui k priskirkime natūralųjį skaičių $2k + 1$. Sveikam skaičiui 0 priskiriame natūralųjį skaičių 1, trumpai

$$f(m) = \begin{cases} -2m, & \text{jei } m < 0, \\ 2m + 1, & \text{jei } m \geq 0, \end{cases} \qquad m \in \mathbb{Z}.$$

Skaitytojui siūlome rasti atvirkštinį sąryšį. Pastebėkime, kad ši nusakytoji taisyklė yra bijekcija, kadangi skirtingiems sveikiems skaičiams priskiriame skirtingus natūraliuosius skaičius ir atvirkščiai, bet kokie du skirtingi natūralieji skaičiai susieti su skirtingais sveikaisiais skaičiais vieninteliu būdu, be to visi vaizdai turi pirmvaizdžius.

Apibrėžimas *Aibes, kurios ekvivalenčios natūraliųjų skaičių aibei, vadinsime skaičiomis.*

Pastaba Bijekciją, kuria aibės elementams priskiriame natūraliuosius skaičius, vadinsime *numeravimu.*

Taigi, sveikųjų skaičių aibė yra skaiti. Beje, racionaliųjų skaičių aibė taip pat yra skaiti (kodėl?). To paties negalime pasakyti apie realiųjų skaičių aibę. Apie tai daugiau skaitytojas galėtų sužinoti, pvz "V. Kabaila, Matematinė analizė , I d."

Apibrėžimas *Sakysime, kad funkcija $y = f(x)$ yra nemažėjanti (nedidėjanti) aibėje A, jeigu, bet kokiems skaičiams $x_1 < x_2,\ x_1, x_2 \in A$ teisinga nelygybė:*

$$f(x_1) \leq f(x_2)(f(x_1) \geq f(x_2)).$$

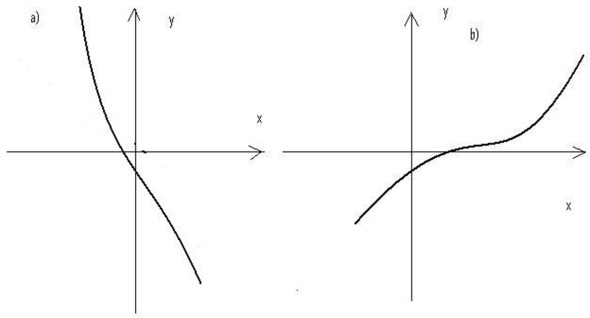
Nedidėjančios ir nemažėjančios funkcijos vadinamos monotoninėmis.

Apibrėžimas *Sakysime, kad funkcija $y = f(x)$ yra didėjanti (mažėjanti) aibėje A, jeigu bet kokiems skaičiams $x_1 < x_2$ priklausantiems aibei A, teisinga nelygybė:*

$$f(x_1) < f(x_2) \ \ (f(x_1) > f(x_2)).$$

Didėjančios ir mažėjančios funkcijos vadinamos griežtai monotoninėmis.

Žemiau pateiktame pav. a) pateikiamas mažėjančios, o b)- didėjančios funkcijų grafikai.



13 pav.

Pavyzdys *Funkcija* $f(x) = x^3$ *yra didėjanti aibėje* $\mathbb{R}$, *o funkcija* $f(x) = \frac{1}{x}$ *yra mažėjanti aibėje* $(0, \infty)$.

Įrodykime, kad $f(x) = x^3$ yra didėjanti funkcija. Tegu $a < b$ bet kokie du realūs skaičiai. Norint parodyti, kad funkcija yra didėjanti pakanka parodyti, kad šiems skaičiams teisinga nelygybė: $f(b) - f(a) > 0$, (mažėjanti $f(a) - f(b) > 0$). Turime, kad $b^3 - a^3 = (b-a)(a^2+ab+b^2)$. Jei a, b yra vienodų ženklų skaičiai, tai nesunku suprasti, kad teisingos nelygybės: $b - a > 0$ ir $a^2 + ab + b^2 > 0$, o tuo pačiu ir $b^3 - a^3 > 0$ arba $b^3 > a^3$. Tuo atveju, kai $ab < 0$, t.y. argumento reikšmės priešingų ženklų, tai $b - a > 0$. Šiuo atveju gali būti, kad $|a| > b$ arba $|a| \leq b$. Tarkime, kad $|a| \leq b$. Tada $a^2 + ab + b^2 > a^2 - b^2 + b^2 = a^2 > 0$. Vadinasi, $b^3 - a^3 = (b-a)(a^2+ab+b^2) > (b-a)a^2$. Analogiškai nagrinėjamas ir likęs atvejis. Taigi, funkcija yra didėjanti.

Siūlome skaitytojui įrodyti, kad funkcija $f(x) = \frac{1}{x}$ yra mažėjanti aibėje $(0, \infty)$.

Pastaba. Jei funkcija griežtai monotoninė apibrėžimo aibėje, tai šioje aibėje, funkcija yra bijekcija. Siūlome skaitytojui tuo įsitikinti savarankiškai.

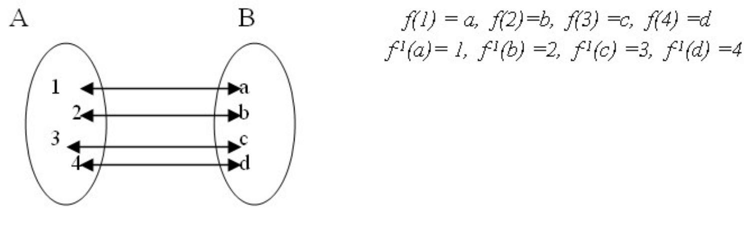
Apibrėžimas *Tarkime, kad funkcija* $f : A \to B$ *yra bijekcija. Apibrėžkime funkciją,*

$$f^{-1} : B \to A,$$

tenkinančią sąryšį: visiems $b \in B$ $\exists a \in A$ *toks, kad* $f^{-1}(b) = a$ *tada ir tik tada, kai* $f(a) = b$. *Taip apibrėžtą funkciją* f^{-1}, *vadinsime funkcijai* f *atvirkštine funkcija. Be to,* $D(f^{-1}) = B$, $E(f^{-1}) = A$. *Šiuo atveju sakysime, kad funkcija* f *turi atvirkštinę funkciją srityje* A. *Jei funkcija* $f : A \to B$ *yra bijekcija, tai ji turi atvirkštinę srityje* A. *Tada visiems* $a \in A$ *ir* $b \in B$ *teisingos lygybės:*

$$f(f^{-1}(b)) = b, \quad f^{-1}(f(a)) = a.$$

Žemiau pateiktame 14 pav. yra iliustruojama funkcija ir jos atvirkštinė.



14 pav.

Teisinga tokia teorema:

Teorema *Jei intervale* $[a, b]$ *funkcija* $y = f(x)$ *yra griežtai monotoninė, tai egzistuoja šiai funkcijai atvirkštinė funkcija, apibrėžta intervale* $[f(a), f(b)]$ *arba (*$[f(b), f(a)]$ *), kuri taip pat griežtai monotoninė.*

Pastaba Sakykime, kad $f : A \to B$. Jei aibės A kokiame nors poaibyje $C \subset A$ funkcija yra injekcija, tai šiame poaibyje funkcija yra griežtai monotoninė, o tuo pačiu tai reiškia, kad egzistuoja funkcijai f atvirkštinė funkcija.

Pastaba Atkreipsime skaitytojo dėmesį į tai, kad jei funkcija $y = f(x)$ yra bijekcija aibėje A, tai šioje aibėje atvirkštinė funkcija yra randama išsprendus kintamąjį x, kintamojo y atžvilgiu, t.y. radus funkciją $x = g(y) = f^{-1}(y)$. Paprastai, norint atvirkštinę funkciją nagrinėti toje pačioje koordinačių sistemoje ir atsietą nuo tiesioginės funkcijos $y = f(x)$ pervardiname kintamuosius keisdami x su y vietomis. Ateityje funkciją su tokiu būdu peržymėtais kintamaisiais $y = f^{-1}(x)$ taip pat vadinsime funkcijos $y = f(x)$ atvirkštine funkcija. Tad norint nustatyti ar funkcijos $y = f(x)$ ir $y = g(x)$ yra viena kitai atvirštinės kokioje nors aibėje, pakanka patikrinti ar

$$f(g(x)) = x \text{ arba } g(f(y)) = y.$$

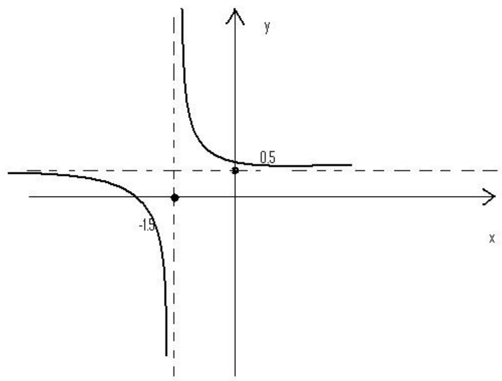
Žinoma, kad jei funkcija turi atvirkštinę kokioje nors srityje, tai ši atvirkštinė yra vienintelė.

Pavyzdys Raskime funkcijos

$$f(x) = \frac{x+2}{2x+3}$$

atvirkštinę srityse, kuriose ji egzistuoja.

Nesunku suprasti, kad šios funkcijos apibrėžimo sritį sudaro visi skaičiai, išskyrus $-\frac{3}{2}$, t.y. $D(f) = (-\infty, -\frac{3}{2}) \cup (-\frac{3}{2}, \infty) =: D1(f) \cup D2(f)$. Šios funkcijos grafiko eskizas pateikiamas žemiau.



15 pav.

Matome, kad srityse $D1(f)$ ir $D2(f)-$ funkcija yra mažėjanti. Tačiau visoje apibrėžimo srityje ši funkcija nei didėjanti nei mažėjanti, kadangi pavyzdžiui $f(-2) = 0 < f(-1) = 1$. Iš šios nelygybės išplaukia, kad funkcija nėra mažėjanti (nagrinėjant ją visoje apibrėžimo srityje). Raskime šios funkcijos atvirkštines funkcijas srityse $D1$ ir $D2$. Išsprendę x atžvilgiu gauname,

$$x + 2 = y(2x+3), \quad \text{arba} \quad x = \frac{2-3y}{2y-1}.$$

Taigi, kiekvienoje iš sričių $D1$ arba $D2$ funkcijos $f(x) = \frac{x+2}{2x+3}$ atvirkštinė yra $x = f^{-1}(y) = \frac{2-3y}{2y-1}$. Peržymėję kintamuosius gauname, kad

$$f^{-1}(x) = \frac{2-3x}{2x-1}.$$

15 pav. pateiktas šios funkcijos grafikas peržymėjus kintamuosius (įprastinėje koordinačių sistemoje).

Priminsime, kad jei $f^{-1}(y) = x$ yra atvirkštinė funkcija, funkcijai $y = f(x)$, tai $f(f^{-1}(y)) = y$ ir $f^{-1}(f(x)) = x$.

Patikrinkime šį sąryšį su auksčiau nagrinėta funkcija. Nesunkiai gauname, kad

$$f(f^{-1}(y)) = \frac{\frac{2-3y}{2y-1} + 2}{2\frac{2-3y}{2y-1} + 3} = \frac{(2-3y+4y-2)}{(4-6y-3+6y)} = y.$$

Pastaba Norint rasti duotosios funkcijos $y = f(x)$ atvirkštinę toje srityje, kur ji egzistuoja reikia išspręsti kintamąjį x, kintamojo y atžvilgiu, t.y. $x = g(y) = f^{-1}(y)$.

Pavyzdys Raskime funkcijos $y = f(x) = x^2+6x+5$ atvirkštinę srityse, kuriose ji egzistuoja. Visų pirma pastebėsime, kad ši funkcija (jos grafikas parabolė) nėra griežtai monotoniška apibrėžimo srityje. Taigi, apibrėžimo srityje funkcija atvirkštinės neturi. Sudarę parabolės, viršūnės lygtį gauname:

$$f(x) = (x+3)^2 - 4.$$

Ši funkcija griežtai monotoniška srityse: $D_1(f) = (-\infty, -3]$, $D_2(f) = (-3, \infty)$. Pirmoje srityje funkcija yra mažėjanti (išskyrus tašką -3), o antroje srityje- didėjanti. Šiose srityse funkcijos reikšmių sritys yra $E_1(f) = [-4, \infty)$, ir $E_2(f) = (-4, \infty)$, atitinkamai. Pastebėsime, kad taškas -3 priklausantis apibrėžimo sričiai nėra nei didėjimo nei mažėjimo taškas, o funkcijos reikšmė šiame taške yra lygi -4.

Išsprendę reiškinį kintamojo x atžvilgiu gauname

$$x = \pm\sqrt{y+4} - 3.$$

Tada, nagrinėjamos funkcijos atvirkštinė, srityje $D_1(f)$ yra

$$f_1^{-1}(y) = x = -\sqrt{y+4} - 3,$$

o srityje $D_2(f)$ yra

$$f_2^{-1}(y) = x = \sqrt{y+4} - 3.$$

Be to funkcijos

$$f_1^{-1}(y) = x = -\sqrt{y+4} - 3,$$

apibrėžimo sritis yra $D(f_1^{-1}) = [-4, \infty)$ ir reikšmių sritis yra aibė $E(f_1^{-1}) = (-\infty, -3]$. Tuo tarpu funkcijos

$$f_2^{-1}(y) = x = \sqrt{y+4} - 3,$$

apibrėžimo sritis yra $D(f_2^{-1}) = (-4, \infty)$ ir reikšmių sritis yra aibė $E(f_2^{-1}) = (-3, \infty)$.

Apibrėžimas *Tarkime, $A, B, C \subset \mathbb{R}$. Be to, tarkime, kad $f : B \to C$, $g : A \to B$. Tada funkciją $h : A \to C$, kuri apibrėžiama lygybe $h(x) = f(g(x))$,* visiems $x \in A$, *yra vadinama sudėtine funkcija. Dažnai funkcija $h(x)$ yra vadinama funkcijų f ir g kompozicija. Be to $D(h) \subset D(g)$ ir $E(h) \subset E(f)$.*

Pavyzdys Funkcija $h(x) = \mathrm{e}^{x^2+1}$ yra sudėtinė funkcija (funkcijų $y = f(z) = \mathrm{e}^z$ ir $z = g(x) = x^2 + 1$ kompozicija $f(g(x)) = h(x) = y$), apibrėžta visoje realių skaičių aibėje, su reikšmėmis intervale $(0, +\infty)$. Atkreipsime skaitytojo dėmesį į tai, kad $D(h) = \mathbb{R}$.

Pastaba Nesunku matyti, kad

$$f(g(x)) \neq g(f(x)).$$

Skaitytojui siūlome tuo įsitikinti.

Apibrėžimas *Funkciją $y = f(x)$ vadinsime lygine, aibėje A, jeigu visiems $x \in A$ teisinga lygybė: $f(-x) = f(x)$.*

Pavyzdys Funkcija $f(x) = 3^x + 3^{-x}$ yra lyginė visoje realiųjų skaičių aibėje, kadangi $f(-x) = 3^{-x} + 3^x = 3^x + 3^{-x} = f(x)$.

Pastaba Jei funkcija lyginė, tai šios funkcijos grafikas yra simetriškas koordinatinės ašies Oy atžvilgiu.

Apibrėžimas *Funkciją $y = f(x)$ vadinsime nelygine, jeigu visiems $x \in D(f)$ teisinga lygybė: $f(-x) = -f(x)$.*

Jei funkcija nelyginė, tai jos grafikas simetriškas kordinačių pradžios taško atžvilgiu.

Kitu atveju funkcija vadinama nei lygine nei nelygine.

Pastaba Jei funkcija nelyginė, tai šios funkcijos grafikas yra simetriškas koordinačių pradžios taško atžvilgiu.

Pavyzdys Funkcija $f(x) = 3^x - 3^{-x}$ yra nelyginė, kadangi

$$f(-x) = 3^{-x} - 3^x = -(3^x - 3^{-x}) = -f(x).$$

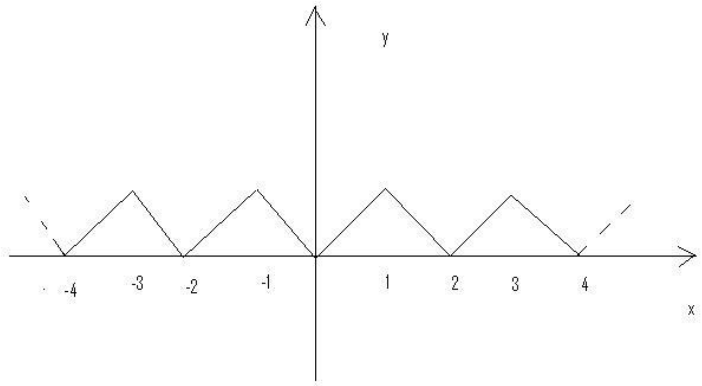
Apibrėžimas *Funkciją $y = f(x)$ vadinsime periodine aibėje A, jeigu egzistuoja skaičius $T > 0$ toks, kad visiems $x \in A$ teisinga lygybė: $f(x+T) = f(x)$. Patį mažiausią skaičių T, tenkinantį minėtąjį sąryšį, vadinsime funkcijos periodu.*

Pavyzdys Pavyzdžiui, funkcija $f : \mathbb{R} \to [0, 1]$ apibrėžta tokiu būdu:

$$f(x) = \begin{cases} x - 2k, \ x \in [2k, 2k+1]; \\ -x + 2(k+1), \ (2k+1, 2k+2) \end{cases}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

yra periodinė, kurios periodas $T = 2$.

16 pav. pateikta šios funkcijos grafiko eskizo dalis.



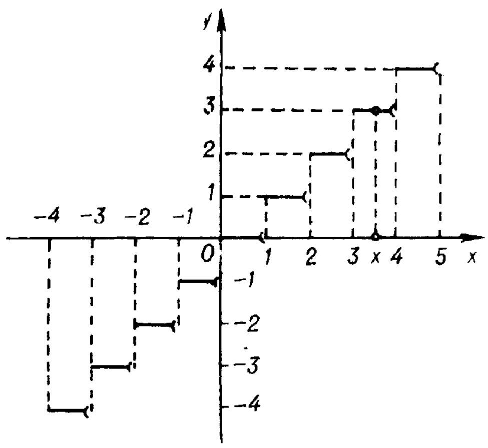
16 pav.

Pastaba Jei funkcija periodinė, tai jos apibrėžimo sritis turi sutapti su realiųjų skaičių aibe.

2.6 Klasikinės funkcijos ir jų grafikai

Priminsime pagrindinių elementariųjų funkcijų apibrėžimus bei jų grafikus.

1. Funkciją $f(x) = [x] = k, \ k \leq x < k+1, \ k \in \mathbb{Z}$. vadinsime sveikąja dalimi. Jos grafikas pateiktas 17 pav.



17 pav.

Šios funkcijos $D(f) = \mathbb{R}$ ir $E(f) = \mathbb{Z}$. Ši funkcija nėra griežtai monotoniška, taigi negalima nurodyti intervalo, kuriame funkcija turėtų atvirkštinę. Ši funkcija nėra nei lyginė nei nelyginė ir neperiodinė.

2. Funkciją

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \quad n \in \mathbb{N}$$

vadinsime $n-$ ojo laipsnio polinomu ir žymėsime $Q_n(x)$ arba $P_n(x)$. Ši funkcija priklauso nuo koeficientų a_i, tad savaime aišku, kad nubrėžti šios funkcijos grafiką bus įmanoma, jeigu žinosime šių koeficientų skaitines reikšmes. Beje, šios funkcijos apibrėžimo aibė $D(f) = \mathbb{R}$. Apibrėžimo srities taškus $x_1, \ldots, x_k$, kuriems teisinga lygybė $f(x_i) = 0, i = 1, \ldots, k$ vadinsime šios funkcijos (polinomo) nuliais, kartais šaknimis. Funkcijos, priklausomai nuo koeficientų reikšmių, gali būti ir lyginės ir nelyginės ir monotoniškos, bet niekada nebus periodinės. Kitaip tariant, šių funkcijų savybės priklauso nuo koeficientų reikšmių parinkimo.

Skaitytojui gerai žinomi atskiri polinominės funkcijos atvejai, t.y.

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \quad f(x) = ax^3 + b, \text{ arba } f(x) = ax + b.$$

Beje, jeigu skaičiai x_i, $i = 1, \ldots, k$ yra $n-$ojo laipsnio polinomo šaknys, tai šį polinomą galime užrašyti taip:

$$P_n(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_k)Q_{n-k}(x).$$

Tarkime, kad duoti taškai $(x_1; y_1), \ldots, (x_{k+1}; y_{k+1})$. Tada $k-$ojo laipsnio polinomo, kuriam priklauso šie taškai lygtis yra tokia:

$$p(x) = \sum_{i=1}^{k+1} y_i \prod_{\substack{j=1,\\ j\neq i}}^{k+1} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}.$$

3. Funkciją apibrėžtą tokiu būdu:

$$f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0} = \frac{Q_n(x)}{Q_m(x)}$$

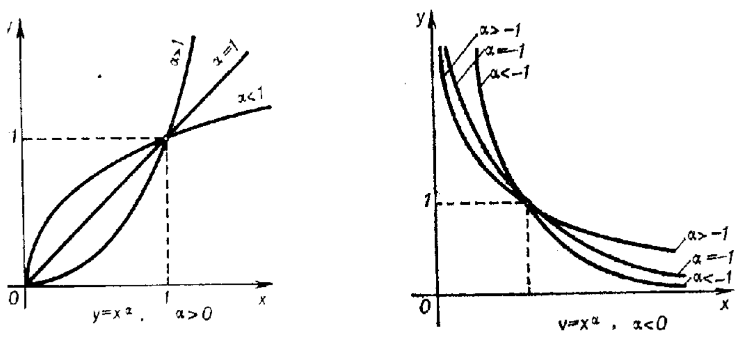
vadinsime racionaliąja funkcija. Tarkime $x_1, \ldots, x_k$ yra polinomo $Q_m(x)$ nuliai. Tada šios funkcijos apibrėžimo sritis $D(f) = \mathbb{R} \backslash \{x_1, \ldots, x_k\}$. Nesunku suprasti, kad šios funkcijos savybės priklauso nuo koeficientų parinkimo.

Šios funkcijos atskiras atvejis,

$$f(x) = \frac{a}{x}, \quad a \in \mathbb{R}, \ a \neq 0,$$

yra vadinamas atvirkščiu proporcingumu.

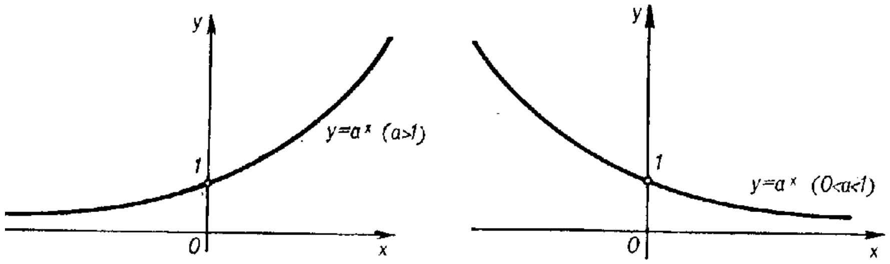
4. Taisyklę $f(x) = x^\alpha, \alpha \neq 0, \ x > 0$, vadinsime laipsnine funkcija. $D(f) = (0, \infty)$, $E(f) = (0, \infty)$. Ši funkcija yra griežtai monotoninė apibrėžimo srityje, taigi egzistuoja šiai funkcijai atvirkštinė, kurią žymėsime $x = y^{1/\alpha}$. Pastebėsime, kad jei tiesioginės funkcijos laipsnis $|\alpha| > 1$, tai atvirkštinės funkcijos laipsnis $|1/\alpha| < 1$ ir atvirkščiai. 18 pav. pateikiame šių funkcijų grafikus. Susitarkime, kad $0^\alpha = 0, \ \alpha > 0$.



18 pav.

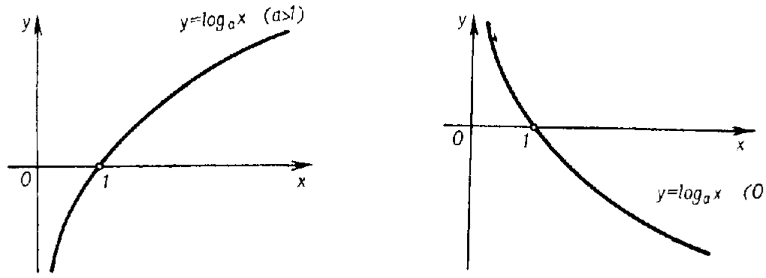
Pastaba Sakykime, kad $f(x) = x^\alpha$, $0 < \alpha \in \mathcal{Q}$ yra laipsninė funkcija, o $g(x) = Q_n(x)$ polinominė. Tada funkcijas $h_{\alpha n}(x) = f(g(x))$ arba $t_{\alpha n}(x) = g(f(x))$ vadinsime iracionaliomis αn laipsnio funkcijomis. Iracionalių funkcijų suma, skirtumas ir sandauga bus vadinamos iracionaliomis funkcijomis.

5. Taisyklę $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$, vadinsime rodikline funkcija. Šios funkcijos apibrėžimo sritis $D(f) = \mathbb{R}$, o reikšmių sritis $E(f) = (0, \infty)$. Rodiklinė funkcija yra griežtai monotoninė apibrėžimo srityje. (Funkcijos grafikas pateiktas 19 pav.) Matome, kad ši funkcija nei lyginė nei nelyginė, be to neperiodinė.



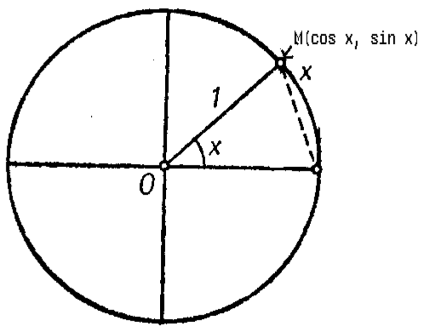
19 pav.

Taigi, egzistuoja šios funkcijos atvirkštinė funkcija, kurią žymime $x = \log_a y$, kuri taip pat monotoninė, be to $D(y) = (0, \infty)$, $E(y) = \mathbb{R}$. Funkcijos grafikas pateiktas 20 pav..



20 pav.

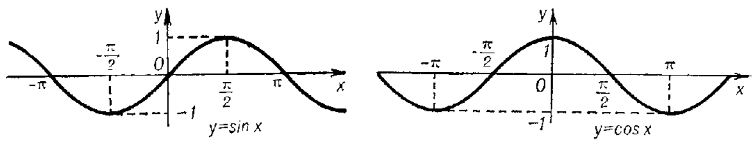
Plokštumos Dekarto koordinačių sistemoje nubrėžkime apskritimą, kurio centras koordinačių pradžios taške, o spindulys lygus vienetui. Tarkime, kad x yra kampas išreikštas radianais (žr 21 pav).



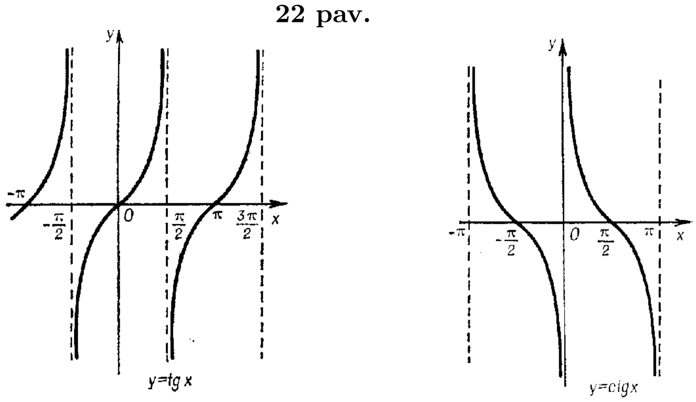
21 pav.

6. Skaičiaus x *sinusu* vadinsime taško M, kuriame kampą apibrėžiantis spindulys kerta apskritimą, ordinatę, t.y. $y = \sin x$, o kampo *kosinusu* vadinsime šio taško M, abscisę, t.y.

$y = \cos x$. Funkcija $y = \sin x$ yra nelyginė, o $y = \cos x$- lyginė. Funkcijos yra periodinės, jų periodai sutampa ir lygūs 2π. Matome, kad šios funkcijos nėra griežtai monotoniškos apibrėžimo srityje. Šių funkcijų grafikai pateikti 22 pav.



22 pav.



23 pav.

7. Skaičiaus α *t*angentu vadinamas šio skaičiaus sinuso ir kosinuso santykis

$$\text{tg}\alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha},$$

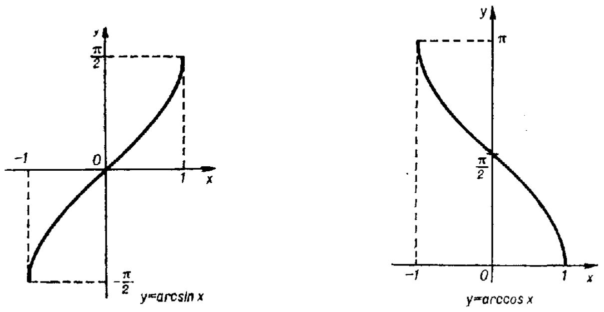
o skaičiaus α *k*otangentu vadinamas šio skaičiaus kosinuso ir sinuso santykis

$$\text{ctg}\alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}.$$

Abi paskutiniosios funkcijos yra nelyginės. Grafikai pateikti 23 pav. Funkcijos $y = \text{tg}x$ ir $y = \text{ctg}x$ yra periodinės. Jų periodai sutampa ir lygūs skaičiui π. Šios funkcijos nėra griežtai monotoniškos apibrėžimo srityse.

8. Sinuso ir kosinuso apibrėžimo ir reikšmių aibės yra tokios pat, t.y. $D(y) = \mathbb{R}$, $E(y) = [-1, 1]$. Beje, visoje apibrėžimo srityje šios funkcijos nėra grižtai monotoninės, taigi, apibrėžimo srityse šioms funkcijoms atvirkštinių funkcijų apibrėžti negalime. Pastebėkime, kad funkcija $y = \sin x$, intervale $[-\pi/2, \pi/2]$, yra griežtai monotoninė, taigi šiame intervale funkcija yra injekcija. Susiaurinę šios funkcijos apibrėžimo sritį iki minėtojo intervalo gauname, kad intervale $[-1, 1]$ galime apibrėžti funkcijai $y = \sin x$ atvirkštinę funkciją, kurią žymėsime $x = \text{arcsin}y$. Šios funkcijos apibrėžimo aibė yra $D(\text{arcsin}) = [-1, 1]$, o reikšmių aibė $E(\text{arcsin}) = [-\pi/2, \pi/2]$.

Kadangi funkcija $y = \cos x$, griežtai monotoninė intervale $[0, \pi]$, taigi šiame intervale funkcija yra injekcija, vadinasi intervale $[-1, 1]$ galime apibrėžti šiai funkcijai atvirkštinę funkciją, kurią žymėsime $x = \text{arccos}y$. Šios funkcijos apibrėžimo sritis yra intervalas $[-1, 1]$, o reikšmių aibė- intervalas $[0, \pi]$. Arksinuso ir arkkosinuso grafikai pateikti 24 pav., atitinkama tvarka, grafikai perbraižyti toje pat koordinačių sistemoje, kaip ir pradinės funkcijos. Kitaip tariant šias atvirkštines funkcijas laikome savarankiškomis funkcijomis.

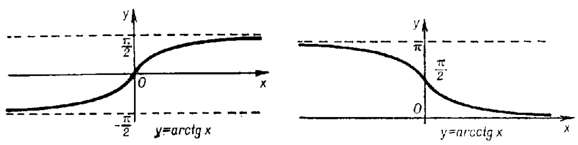


24 pav.

9. Analogiškai samprotaudami galime apibrėžti atvirkštines funkcijas ir likusioms dviems trigonometrinėms funkcijoms.

Funkcija $y = \mathrm{tg}x$ yra apibrėžta aibėje $\mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + \pi k,\ k \in \mathbb{N}\}$ ir įgyja reikšmes visoje realiųjų skaičių aibėje. Funkcija $y = \mathrm{ctg}x$ yra apibrėžta aibėje $\mathbb{R} \setminus \{\pi k,\ k \in \mathbb{N}\}$ ir įgyja reikšmes visoje realiųjų skaičių aibėje.

Pastebėsime, kad funkcija $y = \mathrm{tg}x$ yra neapibrėžta taškuose $\pi/2 + \pi k,\ k \in \mathbb{N}$, o funkcija $y = \mathrm{ctg}x$ neapibrėžta taškuose $\pi k,\ k \in \mathbb{N}$. Apibrėžimo srityje šios funkcijos nėra bijekcijos, taigi, apibrėžti atitinkamų atvirkštinių funkcijų, realiųjų skaičių aibėje, negalime. Pastebėsime, kad funkcija $y = \mathrm{tg}x$ yra griežtai monotoninė $(-\pi/2, \pi/2)$. Taigi, intervale $(-\infty, \infty)$ galime apibrėžti funkcijai $y = \mathrm{tg}x$ atvirkštinę, kurią žymėsime $x = \mathrm{arctg}y$. Šios funkcijos apibrėžimo aibė sutampa su visa realiųjų skaičių aibe, o reikšmių aibė yra intervalas $(-\pi/2, \pi/2)$. Matome, kad funkcija $y = \mathrm{ctg}x$ yra griežtai monotoninė intervale $(0, \pi)$, taigi intervale $(-\infty, \infty)$ galime apibrėžti funkcijai $y = \mathrm{ctg}x$ atvirkštinę, kurią žymėsime $x = \mathrm{arcctg}y$. Šios funkcijos apibrėžimo aibė sutampa su visa realiųjų skaičių aibe, o reikšmių aibė yra intervalas $(0, \pi)$. Arktangento ir arkkotangento grafikai pateikti 25 pav., atitinkama tvarka.



25 pav.

Pavyzdys Raskime funkcijos

$$y = f(x) = \mathrm{tg}\left(\cos\left(\mathrm{e}^{\arcsin\left(1-\mathrm{x}^2\right)}\right)\right)$$

atvirkštinę, kai $x \in (0;1)$.

Pastebėsime, kad šioje srityje $0 \leq \arcsin(1-\mathrm{x}^2) \leq \frac{\pi}{4} < 1$ ir ši funkcija yra mažėjanti, taigi eksponentė $\mathrm{e}^{\arcsin\left(1-\mathrm{x}^2\right)}$ taip pat mažėjanti, funkcija $\cos\left(\mathrm{e}^{\arcsin\left(1-\mathrm{x}^2\right)}\right)$ šioje srityje didėja, tad ir paskutinioji funkcija $y = f(x)$ taip pat didėjanti. Taigi sudėtinės funkcijos atvirkštinė egzistuoja. Skaičiuojame abiejų lygybės pusių funkcijos arctg reikšmę. Gauname

$$\mathrm{arctg}y = \left(\cos\left(\mathrm{e}^{\arcsin\left(1-\mathrm{x}^2\right)}\right)\right)$$

Funkcijos $\cos x$ atvirkštinė yra $\mathrm{arccos}y$, tada

$$\arccos\left(\mathrm{arctg}y\right) = \mathrm{e}^{\arcsin\left(1-\mathrm{x}^2\right)}$$

.

Eksponentės atvirkštinė yra natūrinio logaritmo funkcija, taigi

$$\ln\left(\arccos\left(\mathrm{arctg}y\right)\right) = \arcsin\left(1 - \mathrm{x}^2\right)$$

Arcsinuso funkcijos atvirkštinė yra sinuso funkcija, tada

$$\sin\left(\ln\left(\arccos\left(\mathrm{arctg}y\right)\right)\right) = \left(1 - x^2\right)$$

.

Iš paskutiniojo sąryšio išsprendę x gauname:

$$x = f^{-1}(y) = \sqrt{1 - \sin\left(\ln\left(\arccos\left(\mathrm{arctg}y\right)\right)\right)}.$$

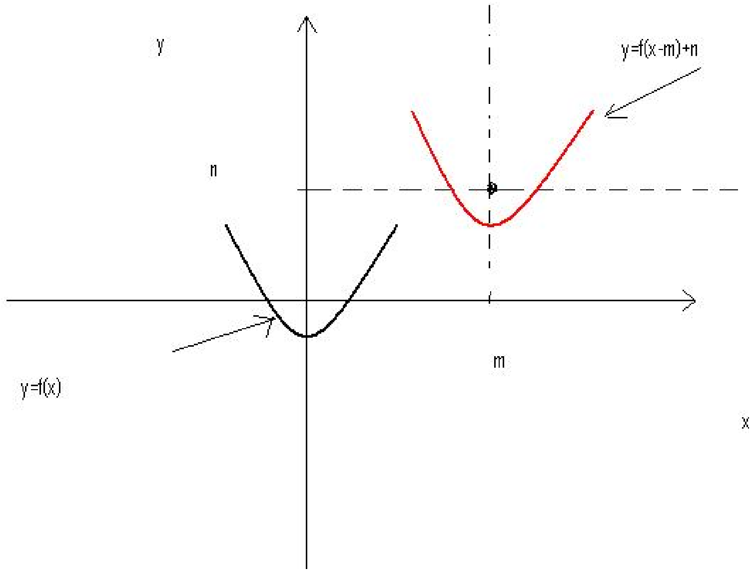
2.7 Grafikų trasformavimas

Aptarsime, kaip nubraižyti funkcijos $y = f(x-m)+n$ grafiką, kai žinomas funkcijos $y = f(x)$ grafikas.

1) Tarkime, kad duota funkcija $y = f(x) + n$. Be to, tegu taškas (a, b) priklauso funkcijos $y = f(x)$ grafikui, t.y. $b = f(a)$. Tada taškas $(a, b + n)$ priklauso funkcijos $y = f(x) + n$ grafikui. Kitaip tariant, jeigu žinome (ir mokame nubraižyti) funkcijos $y = f(x)$ grafiką, tai braižant funkcijos $y = f(x) + n$ grafiką, tereikia žinomo $y = f(x)$ grafiko visus taškus perkelti aukštyn (lygiagrečiai Oy ašies atžvilgiu), jei $n > 0$ ir perkelti žemyn, jei $n < 0$, per $|n|$ vienetų, lygiagrečiai Oy ašiai.

2) Kaip nubraižyti $y = f(x - m)$ grafiką, kai žinome $y = f(x)$ grafiką? Tarkime, kad (a, b) priklauso $y = f(x)$ grafikui, $b = f(a)$. Nesunku suprasti, kad taškas $(a + m, b)$ yra funkcijos $y = f(x - m)$, kadangi $b = f(a + m - m) = f(a)$. Ką reiškia pastarosios lygybės. Jeigu tašką a pakeičiame tašku $a + m$, $m > 0$ tai funkcijos $y = f(x)$ grafiką perkeliame lygiagrečiai Ox ašiai m vienetų į dešinę, jeigu $m < 0$, tai per $|m|$ vienetų į kairę.

Dabar apjunkime abu atvejus, t.y. panagrinėkime funkcijos $y = f(x - m) + n$ grafiko braižymą, kai žinome $y = f(x)$ grafiką. Taigi, šiuo atveju, paprastai elgiamasi taip: visų pirma gauname funkcijos $y = f(x - m)$ grafiką, o po to braižome $y = f(x - m) + n$ grafiką.



26 pav.

Jeigu žinome funkcijos $y = f(x)$ grafiką ir tarkime (a, b) yra grafiko taškas, tai tada funkcijos $y = kf(x)$ grafikas gaunamas pradinės funkcijos grafiko, atitinkamas grafiko reikšmes dauginant iš skaičiaus k, t,y. taškas (a, kb) priklauso $y = kf(x)$ grafikui. Brėžinyje tai pasireiškia tokiu būdu: jei $k > 1$, tai grafikas ištempiamas, jei $0 < k < 1$, tai grafikas suspaudžiamas, jei $k > -1$, tai grafikas atvaizduojamas simetriškai Ox ašies atžvilgiu ir ištempiamas, jei $-1 < k < 0$, tai atvaizduojamas simetriškai Ox ašies atžvilgiu ir suspaudžiamas.

Pateikime kitą grafikų braižymo algoritmą. Tarkime, koordinačių sistemoje mokame nubraižyti funkcijos $y = f(x)$ grafiką. Tada funkcijos $y = f(x - m) + n$ grafikas gali būti braižomas tokiu būdu:

1) punktyrinėmis linijomis koordinačių sistemoje nubraižome pagalbinę koordinačių sistemą, kurios pradžios taškas yra taške (m, n);

2) į naująją koordinačių sistemą "perkeliame" funkcijos $y = f(x)$ grafiką lyg tai būtų pradinė koordinačių sistema;

3) "pašaliname" pagalbinę koordinačių sistemą.

"Perkeltasis" funkcijos grafikas ir bus ieškomasis.

Teoriniai klausimai

1. Žinoti aibių veiksmus bei jų savybes. Mokėti jas patikrinti naudojant Veno diagramas. Aibių Dekarto sandauga ir jos savybės. Mokėti aibių veiksmus atlikti su diskrečiomis aibėmis bei skaičių intervalais. Aibių rėžiai.
2. Funkcijos samprata. Reiškimo būdai. Funkcijų savybės (monotoniškumas, lygiškumas, periodiškumas.)
3. Bijekcijos samprata. Atvirkštinės egzistavimo sąlygos.
4. Klasikinių f-jų grafikai ir jų transformacijos. D(f), E(f).
5. Nustatyti funkcijų atvirkštines funkcijas, nurodant jų egzistavimo sritis.
6. Specialios funkcijos y=sgn(x), y=[x].
7. Nagrinėti funkcijas apibrėžtas atskirais atvejai.
8. Mokėti sudaryti polinominę $n-$ojo laipsnio polinominę funkciją, kai žinomi $n + 1$ taškai, kurie priklauso šios funkcijos grafikui.

Uždaviniai savarankiškam darbui

1. Tarkime, kad A yra a) nelygybės, B yra b) nelygybės, $C-$ c) nelygybės ir $D-$ d) nelygybės sprendinių aibės. Atlikite tokius aibių veiksmus

$$A \cap B, \;\; B \cup D, \;\; D \setminus (A \cup C), (D \cap C) \cap (A \setminus C); \;\; A^c \setminus (B \setminus D^c).$$

a) $|x - 1| - |2x - 3| \geq |3x - 1| - 5$,

b) $|2x + 5| - |x + 7| \leq x + 2 - |4x - 1|$,

c) $\frac{x^2-5x+4}{2x-4} \leq 0$,

d) $x^2 + 6x - 7 > 0$.

2. Raskite funkcijų apibrėžimo sritis:

$$a) \;\; y = \operatorname{arctg}\frac{x}{1 - |x|} \quad b) \;\; y = \frac{\ln \frac{1}{x^2-1}}{x^2 + x - 2} \quad c) \;\; y = \sqrt{x^2 + x - 2} \cdot \operatorname{arctg}(x - 1).$$

3. Nustatykite duotų funkcijų apibrėžimo sritis $D(f)$ bei reikšmių sritis $E(f)$. Raskite šių funkcijų atvirkštines funkcijas intervaluose, kur atvirkštinė egzistuoja. Nubraižykite šių funkcijų grafikų eskizus remdamiesi klasikinių funkcijų grafikais bei grafikų transformacijomis.

1) $y = 3x - 1$, 2) $y = 3|x| - 1$, 3) $y = 3x^2 - 1$,

4) $y = 5\sqrt{x} - 1$, 5) $y = \frac{x}{x-1}$, 6) $y = x^2 + 2x + 3$,

7) $y = \frac{3x-1}{x+2}$, 8) $y = \frac{4}{x^2+2x+1}$,

9) $f(x) = \frac{5}{x^2+x+3}$.

4. Nustatykite, kurios iš pateiktų funkcijų yra lyginės, kurios nelyginės ir kurios nei lyginės nei nelyginės:

$$1)\ y=\frac{1}{x^2+x}\quad 2)\ y=2^x+2^{-x}\quad 3)\ y=\mathrm{tg}2x.$$

$$4)\ y=\frac{1}{\sqrt{x}}\quad 5)\ y=2^x-2^{-x}\quad 6)\ y=\frac{\sin 2x}{x}.$$

$$7)\ y=|x|-x^2+\cos x\quad 8)\ y=\sin x+\frac{\cos x}{x}\quad 9)\ y=|x+1|+|1-x|.$$

Ats: Lyginės funkcijos: 2), 6), 7), 9); nelyginės 5), 8); nei lyginės nei nelyginės- likusios.

5. Nustatykite ar duotos funkcijos yra periodinės. Jei taip, tai raskite šios funkcijos periodą:

$$1)\ y=\frac{1}{\cos x},\quad 2)\ y=5\cos\frac{2x}{3},\quad 3)\ y=\mathrm{tg}2x,$$

$$4)\ y=\cos\frac{x}{3}+\sin 2x,\quad 5)\ y=\cos 2x-\frac{\pi}{3},\quad 6)\ y=x^2+6\cos\frac{x}{2}$$

Ats: 1) 2π; 2) 3π; 3) $\frac{\pi}{2}$; 4) 6π; 5) π; 7) neperiodinė.

6. Raskite funkciją $f(x)$, bei $f(f(x))$ kai
1) $f(g(x))=x,\ g(x)=2x-2$, 2) $g(x)=3x+1$, o $g(f(x))=\frac{1}{2x}$,
3) $g(f(x))=\frac{x-1}{x-2}$, o $g(x)=1+\frac{1}{x}$

Ats: 1) $f(x)=\frac{x}{2}+1$; $f(f(x))=\frac{x}{4}+\frac{3}{2}$; 2) $f(x)=\frac{1}{6x}-\frac{1}{3}$; $f(f(x))=\frac{5x-1}{3(1-2x)}$;
3) $f(x)=x-2$; $f(f(x))=x-4$;

7. Raskite f(x), kai $f\left(\frac{2x+1}{x-1}\right)=x^2+2x,\ x\neq 1.$

Ats:

$$f(x)=\Big(\frac{1+x}{x-2}\Big)^2+2\Big(\frac{1+x}{x-2}\Big)$$

8. Raskite $g(-1)$, kai $f(x)=2x$ ir $f(g(x))=-x$.
9. Raskite sudėtines funkcijas $f(g(x))$ ir $g(f(x))$, kai
a) $f(x)=x^2+2x$, $g(x)=\sin(3x-5)$.
b) $f(x)=\frac{2x+1}{x-1}$ $g(x)=\mathrm{e}^{2x},\ x\neq 1$.
c) $f(x)=\ln(2x)$ $g(x)=\mathrm{e}^{x^2+2x}$.

10. Sudarykite funkciją $x(\alpha)$, jei duota lygtis

$$\alpha x+4x-1=2(x+3).$$

Raskite α reikšmę, su kuria lygtis neturi šaknų.

Ats:

$$x(\alpha)=\frac{7}{\alpha+2}.$$

11. Tarkime, kad funkcijos apibrėžtos tokiu būdu:

$$(x^2-1)f(x)-f(-x)=x^2(2-x^2)\ \text{ ir }\ 7g(x)-g\Big(\frac{1}{x}\Big)=7x-\frac{1}{x}-9.$$

Apskaičiuokite $f(3)$ ir $g(3)$.

12. Tarkime, kad įmonės mėnesio pajamos R apibrėžiamos tokiu būdu: $R=800p-7p^2$, čia p yra produkto kaina. Nustatykite kokia turi būti produkto kaina, kad įmonės pajamos būtų 10000, jei žinoma, kad produkto kaina turi būti didesnė negu 50?

Ats: 100 .

13. Nubraižykite funkcijų

$$a)\ \ y = [\sin x];\quad b)\ \ y = \mathrm{sgn}(\cos(x+2);\quad c)\ \ y = \ln((x+3)-1);\quad)\ \ dy = 1 + \arcsin(3x-2);$$

$$e)\ \ y = \sqrt{x+3} - 2;\quad d)\ \ y = 3 - \arcsin(1-2x);\quad e)\ \ y = x^2 + 5x - 1;\quad f)\ \ y = 5^{3x-1};$$

$$g)\ \ y = 3 - \cos(2x+5);\quad h)\ \ h(q) = \begin{cases} q, & \text{jei } \ -1 \leq q < 0, \\ 3-q, \text{jei } \ 0 \leq q < 3, \\ 2q^2, \ \text{jei } \ 3 \leq q \leq 5 \end{cases}$$

grafikų eskizus.

14. Tarkime, $c = f(x)$ yra pašto siuntų įkainių funkcija, apibrėžta tokiu būdu:

$$f(x) = \begin{cases} 2, & \text{jei } \ 0 < x \leq 1, \\ 5, \text{jei } \ 1 < x \leq 3, \\ 10, \ \text{jei } \ 3 < x \leq 10, \\ 70, \ \text{jei } \ 10 < x \leq 100. \end{cases}$$

čia x yra siuntinio svoris. Nubrėžkite šios funkcijos grafiką.

15. Medinius samčius gaminančios įmonės šaukštų fiksuoti gamybos kaštai sudaro 95000 , o kintamieji vieno šaukšto kaštai yra 2.20 . Kiek samčių turi parduoti įmonė, kad jos pelnas sudarytų 50000 . Žinoma, kad šaukštas parduodamas už 3.

Ats: 181 250

16. Tarkime, kad vartotojas įsigydamas q produktų, už kiekvieną produktą moka tokią kainą

$$p = \begin{cases} \frac{80-q}{4}, \ \ q \leq 56 \\ 6, \ \ q > 56. \end{cases}$$

Nustatykite, kiek produktų (vienu kartu) turi būti parduota, kad pardavimo pelnas būtų lygus 400 ?

Ats: 40 vnt.

17. Atlikus įmonės produkcijos finansinę analizę buvo nustatyta, kad pagaminus ir pardavus q vienetų vieno artikulo produkcijos, bendros pajamos nuo produkcijos kiekio priklauso tokiu būdu:

$$r(q) = 100\sqrt{q}.$$

Žinoma, kad kintamieji produkcijos vieneto kaštai sudaro 2, o fiksuoti kaštai sudaro 1200. Nustatykite kiek produkcijos vienetų turi būti pagaminta, kad bedrosios pajamos būtų lygios kintamų ir fiksuotų kaštų sumai, kitaip tariant, pelnas būtų lygus nuliui.

18. Įmonė gamina A ir B rūšies produktus. A produkto gamyba kainuoja $2Lt$ brangiau negu B. Žinoma, kad A ir B produktų kaštai sudaro 1500 ir 1000 atitinkamai. Be to A produktų pagaminta 25 vienetais daugiau negu B. Nustatykite kiek kiekvienos rūšies produktų buvo pagaminta.

Ats: $(125, 100)$; arba $(150, 125)$.

19. Tarkime, kad vartotojas gali įsigyti x produktų, o vieno produkto kaina sudaro $f(x) = 1 + \frac{100}{x}$. Nustatykite, kokį minimalų produktų skaičių turi įsigyti vartotojas, kad jo bendrosios išlaidos būtų didesnės už 5000? Nustatykite funkcinį ryšį tarp kainos ir produktų skaičiaus

(raskite funkcijos $f(x)$ atvirkštinę funkciją). Nubrėžkite tiesioginės ir atvirkštinės funkcijų grafikus.

20. Draudimo kompanija nustatė, kad apdraustų asmenų sergamumas (procentais nuo visų) nuo laiko per metus priklauso tokiu būdu:

$$f(t) = 1 - \left(\frac{300}{300+t}\right)^3.$$

Nubrėžkite šios funkcijos grafiko eskizą. Nustatykite kiek turi praeiti laiko, kad sergamumas viršytų 70%.

21. Žinoma, kad asmens statusas (padėtis) priklauso nuo metinių pajamų tokiu būdu:

$$S = f(I) = 0.45(I - 1000)^{0.53},$$

čia S statuso skaitinė charakteristika, I- metinės pajamos. Žinoma, kad pajamos I priklauso nuo studijų laikotarpio t tokiu būdu: $I = g(t) = 7202 + 0.29t^{3.68}$. Raskite funkciją $f(g(t))$. Kokia jos prasmė?

Funkcijos. Privalomos savarankiško darbo užduotys

1. Tarkime, kad įmonės pajamos f, priklausomai nuo darbuotojų skaičiaus n, apibrėžtos tokia funkcija

$$f(n) = -n^2 + 200n - 1000, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Nustatykite ar egzistuoja abipus vienareikšmiška atitiktis tarp darbuotojų skaičiaus ir pajamų, jei laikysime, kad $f(n) \geq 0$. Jei ne, nurodykite darbuotojų skaičiaus intervalus kuriuose ši bijekcija apibrėžta ir raskite atvirkštinę funkciją šioje srityje. Sudarykite funkciją, kuri apibrėžtų darbuotojų skaičiaus priklausomybę nuo pajamų dydžio, kai $n \geq 0$. Nubrėžkite šios funkcijos grafiką.

2. Tarkime, kad būsimoji kapitalo vertė S yra skaičiuojama tokiu būdu:

$$S(k) = (1+r)^k P,$$

čia P pagrindinis kapitalas, $k-$ perskaičiavimo laikotarpių skaičius $r-$ periodo palūkanų norma. Nustatykite ar funkcija $S(k), k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ yra abipus vienareikšmiška apibrėžimo srityje. Jei taip raskite atvirkštinę funkciją ir nurodykite jos apibrėžimo bei reikšmių sritį (laikome, kad P ir r yra fiksuoti dydžiai).

3. Tarkime, kad A yra a) nelygybės, B yra b) nelygybės, $C-$ c) nelygybės ir $D-$ d) nelygybės sprendinių aibės:

a) $x^2 + 10x > 0,$

b) $|2x+6| - |x+7| \leq x + 2,$

c) $\frac{x^2-5x+4}{2x-4} \leq 0,$

d) $x^2 + x - 12 > 0.$

Atlikite tokius aibių veiksmus

$$A \cap B, \quad B \cup D, \quad D \setminus (A \cup C), (D \cap C) \cap (A \setminus C); \; \overline{A} \setminus (B \setminus \overline{D}).$$

e) Grafiškai pavaizduokite aibes

$$A \times B, \quad B \times C.$$

4. Raskite aibių $A, B, \overline{B}, (D \cap C), \overline{D} \setminus A$ tiksliuosius viršutinius bei tiksliuosius apatinius rėžius. Nustatykite kurie iš rėžių priklauso nurodytoms aibėms, o kurie nepriklauso. Aibės A, B, C, D yra apibrėžtos 3 užduotyje.

5. Nustatykite duotųjų funkcijų apibrėžimo bei reikšmių sritis. Raskite šios funkcijos atvirkštinę intervaluose, kuriuose ji egzistuoja. Nubraižykite šių funkcijų grafikų eskizus remdamiesi grafikų transformacijomis. Nurodykite funkcijų reikšmių sritis.
1) $y = 3x - 1$, 2) $y = 3|x| - 1$, 3) $y = 3x^2 - 1$,
4) $y = 5\sqrt{x} - 1$, 5) $y = \frac{x}{x-1}$, 6) $y = 2\cos 2x - 1$, 7) $y = \frac{3x-1}{x+2}$.
8) Raskite funkcijos

$$y = \ln^3\left(\mathrm{arctg}(\sin(\sqrt{x^4}))\right)$$

atvirkštinę, kai $x \in (0;1)$. Ar egzistuoja atvirkštinė srityje $x \in (-1;1)$?

6. Nustatykite, kurios iš pateiktų funkcijų yra lyginės, kurios nelyginės ir kurios nei lyginės nei nelyginės:

$$1)\ y = \frac{1}{x^2 + 2x},\quad 2)\ y = 2^{-x} + 2^{-x},\quad 3)\ y = \mathrm{tg}2x,$$
$$4)\ y = \frac{1}{\sqrt{x+1}},\quad 5)\ y = 4^x - 4^{-x},\quad 6)\ y = \frac{\sin 2x}{x},$$
$$7)\ y = |x| - x^2,\quad 8)\ y = |x+1| + |1-x|.$$

7. Raskite funkciją $f(x)$, bei $f(f(x))$ kai
1) $f(g(x)) = x + 1$, $g(x) = x - 2$;
2) $g(f(x)) = \frac{x-1}{x-2}$, o $g(x) = 1 + \frac{1}{x+2}$.

8. Raskite sudėtines funkcijas $f(g(x))$ ir $g(f(x))$, kai
1) $f(x) = x^2 + 2x$, $g(x) = \sin(3x - 5)$.
2) $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$, $g(x) = \mathrm{e}^{2x}$; $x \neq 1$.

9. Tarkime, kad funkcijos apibrėžtos tokiu būdu:

$$(x^2 - 1)f(x) - f(-x) = x^2(2 - x^2) \text{ ir } 7g(x) - g\Big(\frac{1}{x}\Big) = 7x - \frac{1}{x} - 9.$$

Apskaičiuokite $f(3)$ ir $g(3)$.

10. Tarkime, $c = f(x)$ yra pašto siuntų įkainių funkcija, apibrėžta tokiu būdu:

$$f(x) = \begin{cases} 2, & \text{jei } 0 < x \leq 1; \\ 4 + 2x, & \text{jei } 1 < x \leq 3; \\ 10 + \sqrt{x-3}, & \text{jei } 3 < x \leq 7; \\ 15, & \text{if } 7 < x \leq 100. \end{cases}$$

čia x yra siuntinio svoris. Nubrėžkite šios funkcijos grafiką. Nurodykite apibrėžimo srityje intervalus kur egzistuoja atvirkštinė, bei raskite šias atvirkštines.

11. Įmonė gamina dviračius, kurių (vieneto) kintami gamybos kaštai yra 200. Tuo tarpu fiksuoti kaštai sudaro 600000. Už pagamintą ir parduotą dviratį gaunamos 700 pajamos. Nustatykite, kiek reikia pagaminti ir parduoti dviračių (minimaliai), kad įmonė turėtų pelną.

Pastaba Pelnas = Bendrosios pajamos - bendrieji kaštai, trumpai $P = RT - CT$ ir $CT = C + CV$, čia C yra pastovūs kaštai, CV yra kintami kaštai.

12. Atlikus įmonės produkcijos finansinę analizę buvo nustatyta, kad pagaminus ir pardavus q vienetų vieno artikulo produkcijos, bendros pajamos nuo produkcijos kiekio priklauso tokiu būdu:

$$r(q) = 100\sqrt{q}.$$

Žinoma, kad kintamieji produkcijos vieneto kaštai sudaro 2, o fiksuoti kaštai sudaro 1200. Nustatykite kiek produkcijos vienetų turi būti pagaminta, kad bendrosios pajamos būtų lygios kintamų ir fiksuotų kaštų sumai, kitaip tariant, pelnas būtų lygus nuliui.

13. Draudimo kompanija nustatė, kad apdraustų asmenų sergamumas (procentais nuo visų) nuo laiko per metus priklauso tokiu būdu:

$$f(t) = 1 - \left(\frac{300}{300+t}\right)^3, \quad t \in [0, 365].$$

Nubrėžkite šios funkcijos grafiko eskizą. Nustatykite kiek turi praeiti laiko, kad sergamumas viršytų $0,52$ arba kitaip tariant 52%.

III. SEKOS. EILUTĖS

3.1 Skaičių sekos sąvoka. Nykstamos sekos bei jų savybės

Apibrėžimas *Funkciją $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$, kuria kiekvienam $n \in \mathbb{N}$, priskiriame realųjį skaičių, vadinsime skaičių seka. Kitaip tariant, sunumeruotą realiųjų skaičių aibę*

$$\{x_n, n \in \mathbb{N}\} = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$$

vadinsime skaičių seka. Taisyklę $x_n = f(n)$ vadinsime sekos bendruoju sekos nariu.

Pastaba Seka visiškai apibrėžta, jei žinomas šios sekos bendrasis narys.

Apibrėžimas *Tarkime, kad duota seka $\{x_n,\ n \in \mathbb{N}\} =: \{x_n\}$. Tada bet koks šios begalinės aibės sutvarkytas poaibis vadinamas sekos posekiu.*

Pavyzdys Tarkime, kad seka apibrėžta tokiu būdu:

$$\{x_n\} = \{n^2 + 1,\ n \in \mathbb{N}\} = \{2, 5, 10, 17, 26, 37, \dots, \}.$$

Sudarykime šios aibės poaibį, kai jis sudaromas išrenkant kas antrąjį šios sekos narį:

$$\{x_{2k-1}\} = \{(2k-1)^2 + 1,\ k \in \mathbb{N}\} = \{2, 10, 26, 50, \dots\}.$$

Šis poaibis yra pradinės sekos posekis.

Beje, posekis gali būti traktuojamas kaip savarankiška seka.

Pavyzdys Tarkime, kad sekos bendrasis narys yra $x_n = n^2 + n - 2$. Tada šios sekos nariai yra kvadratinės funkcijos $f(n) = n^2 + n - 2$, apibrėžtos natūraliųjų skaičių aibėje, reikšmės.

Bet kokią seką trumpai žymėsime $\{x_n\}$. Šios aibės elementus vadinsime *sekos nariais* arba *sekos elementais.*

Tad remiantis apibrėžimu, simbolis $\{(-1)^n\}$ žymi aibę

$$\{-1, 1, -1, 1, -1, 1, \dots\},$$

o simboliai $\{1/n^2\}$ ir $\{\frac{1+(-1)^n}{2}\}$ žymi aibes

$$\{1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \dots\}, \{0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots\},$$

atitinkamai.

Tarkime, kad duotos dvi sekos $\{x_n\}$, $\{y_n\}$. Tada šių sekų suma, skirtumu, sandauga bei dalmeniu vadinsime tokias sekas

$$\{x_n + y_n\};\ \{x_n - y_n\};\ \{x_n \cdot y_n\};\ \{x_n / y_n\},$$

atitinkamai. Dalmuo yra apibrėžtas, jeigu visi sekos $\{y_n\}$ nariai nelygūs 0.

Pastebėsime, kad seka yra begalinė skaičių aibė. Tad aibės sąvokos $\sup A$, $\inf A$ naudojamos ir sekoms charakterizuoti. Sekos tikslųjį viršutinį, bei tikslųjį apatinį rėžius žymėsime $\sup x_n$ ir $\inf x_n$.

Pavyzdys Sekos $\{x_n\} = \{\frac{1}{n^2}\}$ visi nariai ne didesni už 1 ir kadangi visi nariai teigiami, tai nemažesni už 0. Nesunku suprasti, kad $\sup x_n = 1$ ir $\inf x_n = 0$, atitinkamai. Sekos elementai susieti su natūraliaisiais skaičiais, todėl natūralu, sąvokas, kurios buvo formuluotos bet kokioms aibėms, perrašyti siejant su natūraliaisiais skaičiais.

Apibrėžimas *Sakysime, kad seka aprėžta, jeigu egzistuoja teigiamas skaičius a toks, kad visiems $n \in \mathbb{N}$ teisinga nelygybė, $|x_n| \leq a$.*

Kitais žodžiais kalbant, seka aprėžta, jei visų sekos narių absoliučios reikšmės neviršija kažkokio skaičiaus, kurį paprastai reikia nustatyti.

Pavyzdys Parodysime, kad seka, kurios bendrasis narys yra

$$x_n = \frac{3n}{4n-2}$$

yra aprėžta.

Remiantis apibrėžimu, reikia parodyti, kad $\forall n \in \mathbb{N}$ egzistuoja skaičius, kurio neviršija visi sekos nariai. Turime, kad

$$x_n = \frac{3n}{4n-2} = \frac{3n}{4n(1-\frac{1}{2n})}.$$

Remdamiesi tuo, kad $0 < \frac{1}{2n} \leq \frac{1}{2}$, visiems $n \in \mathbb{N}$, o tuo pačiu ir $1 - \frac{1}{2n} \geq 1 - \frac{1}{2} = 0,5$, visiems $n \in \mathbb{N}$ gauname, kad

$$x_n = \frac{3n}{4n-2} = \frac{3n}{4n(1-\frac{1}{2n})} \leq \frac{3}{4 \cdot 0,5} = \frac{3}{2}$$

visiems $n \in \mathbb{N}$. Taigi, minėtasis skaičius, kurio neviršija visi sekos nariai $a = 1,5$.

Nusakykime neaprėžtos sekos savoką, naudodami atstumo sąvoką.

Apibrėžimas *Sakysime, kad seka $\{x_n\}$ yra neaprėžta, jeigu visiems $a > 0$ (kokį beparinktume skaičių a,) egzistuoja natūralusis skaičius n toks, kad sekos nariui, kurio numeris n, teisinga nelygybė, $|x_n| > a$.*

Kitaip tariant, kokį skaitinį "barjerą" bepastatytume, visuomet atsiras sekos narių esančių kitoje "barjero" pusėje.

Pavyzdys Seka, kurios bendrasis narys $x_n = n$ yra neaprėžta, kadangi kokį beparinktume skaičių a, visuomet galėsime nurodyti sekos narių, kurie būtų didesni už nurodytą skaičių a. Nesunku suprasti, kad šią savybę turi tie $x_n = n$ nariai, kurių numeriai didesni už skaičių a.

Panagrinėkime dar vieną pavyzdį.

Pavyzdys Parodysime, kad seka

$$x_n = \frac{(1+(-1)^n)n}{4}$$

neaprėžta.

Norint parodyti, kad seka neaprėžta pakanka parodyti, kad parinkus bet kokį skaičių $a > 0$ egzsituoja numeris n toks, kad $|x_n| > a$. Matome, kad narinėjamos sekos nelyginis narys lygus nuliui, tad sprendžiant šį uždavinį pakanka nagrinėti narius su lyginiais numeriais. Tad nagrinėkime šios sekos posekį, kuris sudaromas iš lyginius numerius turinčių sekos narių. Turime, kad

$$x_{2k} = \frac{2 \cdot 2k}{4} = k$$

Tegu a yra bet koks teigiamas skaičius. Tada nesunku suprasti, kad $x_{2k} > a$, jei $k > a$. Pavyzdžiui jei $a = 2000$, tai paėmus sekos narį su numeriu x_{4002} gauname, kad $x_{4002} > 2000$. Kadangi a bet koks tai įrodo, kad sekos nariai, bendrai paėmus yra neaprėžti.

Pavyzdys Tarkime, kad draudimo įmonės pelnas x_n, priklauso nuo darbuotojų skaičiaus n tokiu būdu

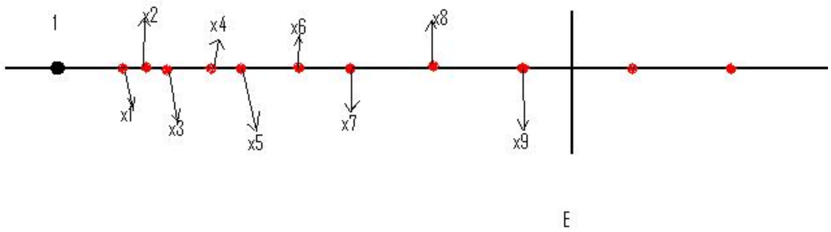
$$x_n = -n^2 + 50n + 51.$$

Neigiamas pelnas- tai nuostoliai. Nustatykime darbuotojų skaičių, kuomet įmonė gaus maksimalų pelną.

Kadangi šią priklausomybę apibrėžianti funkcija yra kvadratinis trinaris, tai nesunkiai nustatome, kad šio trinario maksimali reikšmė bus pasiekiama viršūnės abscisės taške $n = 25$. Aišku, kad ši seka aprėžta ir maksimalus pelnas bus lygus $\sup x_n = f(25) = 676$ vienetai. Iš apačios ši funkcija nėra apibrėžta ir $\inf x_n = -\infty$.

Apibrėžimas *Sakysime, kad seka $\{x_n\}$ yra neaprėžtai didėjanti (mažėjanti), jei bet kokiam teigiamam skaičiui $E > 0 (B < 0)$, egzistuoja skaičius $0 < N = N(E)$ (šis skaičius priklauso nuo skaičiaus E parinkimo) toks, kad visi sekos nariai, kurių numeriai $n \geq N$, tenkina nelygybę: $x_n > E (x_n < B)$.*

Kitaip tariant, jei seka neaprėžtai didėjanti, tai kokį beparinktume skaičių $E > 0$, visada galima nurodyti sekos numerį, kuriuo pradedant visi sekantys sekos nariai bus didesni už laisvai pasirinktąjį skaičių E. Žemiau pateiktame 27 pav. grafiškai iliustruojame apibrėžimą. Matome, kad pasirinkus skaičių E, sekos nariai, kurių numeriai didesni už 9 tenkina nelygybę: $x_n > E$, kai $n > 9$.



27 pav.

Pavyzdys Panagrinėkime seką $x_n = n^3 + 2$. Naudodami skaičiavimus parodykime, kad ši seka neaprėžtai didėjanti.

Pateikime klausimą ir atsakykime į jį: kokiems numeriams esant sekos nariai $n^3 + 2 > E$, čia E didelis, laisvai pasirinktas skaičius. Išsprendę nelygybę gauname, kad

$$n > \sqrt[3]{E - 2} = N(E).$$

Taigi, seka iš tiesų neapibrėžta, kadangi laisvai pasirinktam, kiek norimai dideliam skaičiui E, nurodome skaičių $N(E)$, už kurį turėtų būti didesnis sekos narys tam, kad jis "peržengtų" skaičių E. Jei parinksime $E = 1002$, tai matome, kad pradedant $11-$ uoju sekos nariu visi sekantys bus didesnis už skaičių 1002. Ir t.t.

Pastebėsime, kad ne visos nelygybės gali būti paprastai išsprendžiamos numerio n atžvilgiu. Tuo atveju, kai norima nurodyti numerį, kuriuo pradedant sekos nariai tampa didesni už pasirinktą skaičių, bet tiesiogiai šio numerio rasti negalime, galime naudotis tokiomis skaičių sekų savybėmis:

a) Sakykime, kad seka x_n yra neaprėžtai didėjanti. Jeigu egzistuoja numeris n_0 toks, kad visiems $n > n_0$ išplaukia, kad $y_n > x_n$, tai seka y_n taip pat neaprėžtai didėjanti. Kitaip tariant, jei seka, kurios visi nariai mažesni už atitinkamus kitos sekos narius yra neaprėžtai didėjanti, tai ir seka turinti didesnius narius bus neaprėžtai didėjanti.

b) Sakykime, kad seka x_n yra neaprėžtai mažėjanti. Jeigu egzistuoja numeris n_0 toks, kad visiems $n > n_0$ gauname, kad $y_n < x_n$, tai seka y_n taip pat neaprėžtai mažėjanti.

Pavyzdys Tarkime, kad duota seka $y_n = n^5 + 2n^2 + 1$. Aišku, kad $n^5 + 2n^2 + 1 > n^5$, visiems $n \in \mathbb{N}$. Bet seka $x_n = n^5$ yra neaprėžtai didėjanti, kadangi $\forall E > 0$ parinkus skaičių $N(E) = \sqrt[5]{E}$ gauname, kad kai $n > N(E)$, tai $x_n > E$. Remdamiesi a) savybe gauname, kad ir seka y_n yra neaprėžtai didėjanti.

Atkreipsime skaitytojo dėmesį į tai, kad neaprėžtai didėjančios arba mažėjančios sekos yra neaprėžtos.

Pavyzdys Remdamiesi apibrėžimu parodykime, kad seka

$$\{n^\alpha\},\ \alpha > 0$$

yra neaprėžtai didėjanti.

Parodysime, kad kokį didelį skaičių $E > 0$ beparinktume, visuomet galima nurodyti sekos numerį (tuo pačiu ir narį) kuriuo pradedant visi sekos nariai su didesniais numeriais bus didesni už šį pasirinktą skaičių E.

Tegu $n^\alpha > E$. Tada $n > \sqrt[\alpha]{E} = N(E)$. Taigi, seka neaprėžtai didėjanti.

Žemiau pateiktoje lentelėje parodyta, kaip sekos numeris priklauso nuo pasirinkto skaičiaus E. Kitaip tariant, jei $n > N(E)$, tai būtinai $x_n > E$. Beje, kad demonstruojami skaičiai būtų "gražūs" didelį skaičių E rinksimės tokiu būdu, kad šaknis išsitrauktų, t.y.:

N(E)	200	3000	5^{10}
E	200^α	3000^α	$5^{10\alpha}$

.

Pavyzdys Parodysime, kad seka $x_n = -n^3 + 10n + 100$ yra neaprėžtai mažėjanti.

Pertvarkykime seką taip, kad galėtume ją palyginti su seka, kurią nesunku išspręsti n atžvilgiu. Nesunku matyti, kad

$$x_n = -n^3(1 - \frac{10}{n^2} - \frac{100}{n^3}).$$

Pastebėsime, kad jei $n > 10$, tai $1 - \frac{10}{n^2} - \frac{100}{n^3} > \frac{4}{5}$. Nagrinėjant sekos elgesį mus domina kaip elgiasi seka, kai numeriai dideli. Taigi laikysime, kad $n > 10$. Remdamiesi paskutiniąja pastaba gauname, kad

$$x_n = -n^3(1 - \frac{10}{n^2} - \frac{100}{n^3}) < -\frac{4n^3}{5} = y_n, \quad n > 10.$$

Seka $\{y_n\}$ yra neaprėžtai mažėjanti, nes bet kokiam $E > 0$ gauname, kad $-\frac{4n^3}{5} < -E$ arba $n > \sqrt[3]{\frac{5E}{4}}$. Iš pastarųjų sąryšių išplaukia, kad seka neaprėžtai mažėjanti. Skaičiavimo patogumui galime pažymėti $[\sqrt[3]{\frac{5E}{4}}] = N(\epsilon)$.

Pastaba Norėtume atkreipti skaitytojo, ne per dažnai "draugaujančio" su matematika dėmesį į tai, kodėl taip keistai formuluojamos didėjančių (mažėjančių), o vėliau ir nykstamų sekų sąvokos. Problema yra ta, kad nagrinėdami įvairias sąvokas susiduriame su atstumo sąvoka. Mums visą laiką tenka matuoti ar įvertinti atstumą tarp įvairių dydžių arba atstumą iki nulio, kuris vaidina atskaitos taško vaidmenį. Tad norėdami pasakyti, kad seka didėja, turime naudodami simbolius užrašyti, kad šios sekos nariai, augant numeriams, vis labiau tolsta nuo nulio. Kitaip tariant skaičius E ir atlieka šį vaidmenį, t.y. šiuo skaičiu nurodome, kaip toli "nutolstame" nuo 0. Žemiau pateiksime nykstamumo sąvoką, kurioje bus "matuojamas" sekos narių artumas nuliui.

Apibrėžimas *Sakysime, kad seka $\{x_n\}$ yra nykstama, jei bet kokiam, laisvai parinktam teigiamam skaičiui $\epsilon > 0$, egzistuoja skaičius $N = N(\epsilon)$ toks, kad visi sekos nariai turi savybę $|x_n| < \epsilon$, jei tik $n \geq N$.*

Pavyzdys Seka $\{1/n^\alpha\}(\alpha > 0)$, yra nykstama. Parodykime, kad apibrėžimo reikalavimai yra tenkinami.

Tarkime, kad $\epsilon > 0$ yra bet koks laisvai pasirinktas skaičius. Parodysime, kad galima nurodyti skaičių $N = N(\epsilon)$ tokį, kad visi sekos $\{1/n^\alpha\}$ nariai bus mažesni už šį skaičių, kai tik $n \geq N$. Išsiaiškinkime, kurie sekos nariai turi savybę $1/n^\alpha < \epsilon$ ir ar ši nelygybė priklauso nuo sekos numerio n. Tai padaryti galėsime išsprendę paskutinąją nelygybę. Pastarąją nelygybę, remdamiesi laipsninių funkcijų savybėmis, galime perrašyti taip

$$n > \left(\frac{1}{\epsilon}\right)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Pažymėję $N(\epsilon) = \left(\frac{1}{\epsilon}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$ gauname, kad iš tiesų, jei tik sekos numeriai $n > N(\epsilon)$, tai šiuos numerius turintys sekos nariai $x_n < \epsilon$. Taigi, seka $1/n^\alpha, (\alpha > 0)$ yra nykstama. Naudodami lentelę parodykime, kaip nuo ϵ dydžio priklauso sekos numeris. Kitaip tariant, parodysime, kaip mažinant ϵ kinta numeris, kuriuo pradedant sekos nariai tampa mažesni už šį pasirinktą ϵ :

$N(\epsilon)$	200	3000	5^{10}
ϵ	$200^{-\alpha}$	$3000^{-\alpha}$	$5^{-10\alpha}$

.

Teorema 1. *Tarkime, kad $\{x_n\}$ yra neaprėžtai didėjanti, neturinti nulinių elementų, seka. Tada seka $\{1/x_n\}$ yra nykstama. Teisingas ir atvirkščias teiginys. Jei visi nykstamos sekos $\{y_n\}$ nariai nelygūs nuliui, tai seka $\{1/y_n\}$ yra neaprėžtai didėjanti.*

$\ominus$

Skaitytojui siūlome pačiam įrodyti šią teoremą.

Teorema 2. *Tarkime, kad x_n ir y_n yra dvi sekos, kurių nariai tenkina nelygybę $x_n \leq y_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Jei seka y_n yra nykstama, tai ir seka x_n yra nykstama.*

$\ominus$

Pavyzdys Jei vairuotojas yra drausmingas, tai jo kasmetinė draudimo įmoka mažėja. Žinoma, kad draudimo kompanija negali drausdama drausmingą vairuotoją, jo įmokos sumažinti iki nulio. Tarkime, kad įmokos dydis, bėgant laikui n, su įmokos dydžiu $f(n)$ susietas tokiu būdu:

$$f(n) = \frac{250n^2 + n + 1600}{n^2 + 2}.$$

Parodykime, kad dydis $\alpha_n = f(n) - 250$ yra nykstamas. O tai reiškia, kad laikui bėgant įmokos stabilizuojasi ties 250 suma.

Nesunku suprasti, kad

$$\alpha_n = \frac{n + 1600}{n^2 + 1} = \frac{n}{n^2}\left(1 + \frac{\frac{1600}{n}}{1 + \frac{1}{n^2}}\right) \leq \frac{801}{n},$$

visiems $n \in \mathbb{N}$ (paskutiniąją nelygybę gavome paėmę vietoje n reikšmę, kuri labiausiai padidina nagrinėjamą santykį). Matome, kad seka nykstama, nes esame įrodę, kad bet kokia seka $\frac{1}{n^\alpha}$, $\alpha > 0$ yra nykstama.

Teorema 3. *Dviejų nykstamų sekų suma yra nykstama.*

$\ominus$

Tarkime, kad sekos x_n ir y_n yra nykstamos. Remiantis nykstamumo apibrėžimu gauname, kad koks bebūtų $\epsilon > 0$, egzistuoja numeriai $N_1(\epsilon)$ ir $N_2(\epsilon)$ tokie, kad $|x_n| < \frac{\epsilon}{2}$ jei $n > N_1(\epsilon)$ ir $|y_n| < \frac{\epsilon}{2}$ jei tik $N_2(\epsilon)$. Iš pastarųjų samprotavimų išplaukia, kad jei tik $n > N(\epsilon) = \max\{N_1(\epsilon), N_2(\epsilon)\}$, tai

$$|x_n + y_n| \leq |x_n| + |y_n| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Remiantis nykstamumo apibrėžimu gauname, kad bet kokiam $\epsilon > 0$ galima rasti numerį, šiuo atveju $N(\epsilon)$ nuo kurio pradedant sumos nariai mažesni negu ϵ.

$\oplus$

Skaitytojui siūlome įrodyti žemiau pateiktus teiginius.

Teorema 4. *Nykstama seka yra aprėžta.*

$\ominus$

Teorema 5. *Aprėžtos ir nykstamos sekos sandauga yra nykstama.*

$\ominus$

Teorema 6. *Jei nykstamos sekos elementai lygūs vienam skaičiui, tai tuomet šis skaičius lygus nuliui.*

$\ominus$

Pastebėsime, kad nykstamų sekų santykis nebūtinai yra nykstama seka.

Pavyzdys Tegu $\{x_n\} = \{1/n^2\}$, o $\{y_n\} = \{1/n^3\}$. Tuomet $\{x_n/y_n\} = \{n\}$. Matome, kad pastaroji seka yra neaprėžta.

3.2 Sekos riba. Konverguojančių sekų savybės

Seka yra begalinė skaičių aibė, todėl gana natūralus klausimas - o kaip elgiasi sekos nariai, kai jų numeriai neaprėžtai didėja? Keletą šio klausimo aspektų esame aptarę, nagrinėdami nykstamas bei neaprėžtai didėjančias (mažėjančias) sekas. Pirmuoju atveju turėjome, kad sekos nariai, didėjant numeriui, tampa vis artimesni nuliui, o antruoju atveju, sekos nariai artėja į plius begalybę (minus begalybę). Tačiau liko neaiškumų tuo atveju, kai sekos aprėžtos arba neaprėžtos. Ką galime pasakyti apie tokias sekas.

Apibrėžimas Sakysime, kad skaičius *a yra sekos* $\{x_n\}$ *riba,* kai n artėja į begalybę, jei bet kokiam skaičiui $\epsilon > 0$, egzistuoja skaičius N toks, kad jei tik sekos numeriai $n \geq N$, tai

$$|x_n - a| < \epsilon.$$

Seką, kuri turi ribą, vadinsime *konverguojančia.* Nesunku matyti, kad paskutinį apibrėžimą galime perrašyti taip:

Pastaba *Iš konverguojančios sekos apibrėžimo išplaukia, kad jei seka konverguoja,* tai seka $\{x_n - a\}$ yra nykstama.

Iš sekos apibrėžimo išplaukia, kad bet koks baigtinis sekos narių skaičius nedaro jokios įtakos ribos egzistavimui.

Tai, kad seka konverguoja, o riba yra skaičius a, žymėsime trumpai taip:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a.$$

Pastebėsime, kad neaprėžtai mažėjančias, (neaprėžtai didėjančias sekas) patogu vadinti konverguojančiomis prie $-\infty$ $(+\infty)$. Todėl norėdami pabrėžti, kad seka neaprėžtai didėja (mažėja), žymėsime simboliu

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty \ (\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty).$$

Jei seka konverguoja, tai skirtumas $x_n - a = \alpha_n$ yra nykstama seka. Vadinasi sekos bendrąjį narį galime užrašyti taip:

$$x_n = a + \alpha_n, \tag{1}$$

čia α_n yra nykstama seka, kai $n \to \infty$.

Apibrėžimas Seka neturinti baigtinės ribos bus vadinama *diverguojančia.*

Pateiksime kelis konverguojančių sekų pavyzdžius.

Atkreipsime skaitytojo dėmesį į tai, kad bet kokia nykstama seka yra konverguojanti, kadangi šios sekos riba lygi nuliui.

Pavyzdys Seka $\{(n+2)/n\}$ konverguoja. Be to jos riba yra lygi vienetui. Nesunku matyti, kad

$$\frac{n+2}{n} - 1 = \frac{2}{n}.$$

Remdamiesi (1) lygybe tvirtiname, kad mums pakanka nustatyti, ar seka $2/n$ yra nykstama. Tačiau jau esame 2.1 skyrelyje parodę, kad seka $\frac{1}{n}$ yra nykstama. Remdamiesi 5 Teorema gauname, kad seka $2/n$ yra taip pat nykstama. Taigi, sekos $\{(n+2)/n\}$ riba yra lygi 1.

Pavyzdys Parodykime, kad seka $\{x_n\} = \frac{2n^2}{n^2+2}$ turi ribą lygią 2. Nagrinėkime skirtumą $x_n - 2$ ir parodykime, kad šis skirtumas yra nykstama seka. Turime, kad

$$x_n - 2 = |\frac{-4}{n^2+2}|.$$

Tegu $\epsilon > 0$ bet koks teigiamas skaičius. Kokiems n teisinga nelygybė: $\frac{4}{n^2+2} < \epsilon$? Išsprendę gauname, kad $n > \sqrt{\frac{4}{\epsilon} - 2} := N(\epsilon)$. Matome, kad jei $n > N(\epsilon,)$ sekos nariai tokiems n tenkina nelygybę $|x_n - 2| < \epsilon$. Vadinasi seka $\{x_n - 2\}$ yra nykstama arba $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 2$.

Panagrinėkime, kaip greitai sekos $\{x_n\}$ nariai artėja prie ribinio skaičiaus 2. Sudarome lentelę: ϵ parodo sekos narių atstumą iki ribinio taško, o $N(\epsilon)$ nurodo skaičių (sekos nario numerį), nuo kurio pradedant sekos nariai nuo ribos reikšmės bus nutolę atstumu ne didesniu negu ϵ.

ϵ	$\frac{4}{123}$	$\frac{4}{10002}$	$\frac{4}{1000002}$
$N(\epsilon)$	11	100	1000

.

Pastaba Ateityje, nagrinėsime sekų elgesį, kai $n \to \infty$. Tad kalbėdami apie sekų konvergavimo-divergavimo arba aprėžtumo-neaprėžtumo klausimus kartais sąryšį $n \to \infty$ praleisime.

Be įrodymo pateiksime keletą sekų savybių.

Teorema 7. *Jei seka $\{x_n\}$ konverguoja, tai jos riba vienintelė.*

$\ominus$

Teorema 8. *Konverguojanti seka yra aprėžta.*

$\ominus$

Teorema 9. *Konverguojančių sekų $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ suma yra konverguojanti seka, kurios riba lygi atitinkamų sekų $\{x_n\}$ ir $\{y_n\}$ ribų sumai, trumpai*

$$\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n = a + b.$$

$\ominus$
Turime,

$$x_n = a + \alpha_n,\ y_n = b + \beta_n,$$

čia sekos α_n ir β_n yra nykstamos. Todėl seka

$$\{(x_n - y_n) - (a + b)\} = \{\alpha_n - \beta_n\}$$

yra nykstama. Iš pastarųjų samprotavimų išplaukia teoremos įrodymas.
$\oplus$
Iš paskutinės teoremos išplaukia akivaizdi
Išvada Konverguojančių sekų skirtumas yra konverguojanti seka, kurios riba lygi atitinkamų ribų skirtumui. Trumpai

$$\lim_{n\to\infty}(x_n - y_n) = a - b.$$

Kitos savybės įrodomos remiantis analogiškais samprotavimais.

Teorema 10. *Konverguojančių sekų $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ sandauga yra konverguojanti seka, kurios riba lygi ribų sandaugai, t.y.*

$$\lim_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = a \cdot b.$$

Iš paskutiniosios teoremos išplaukia, kad sekos $\{cx_n\}$ riba lygi $c \cdot a$. Kitaip tariant, jei sekos nariai turi kokį nors bendrą daugiklį, tai jį galime iškelti prieš ribos ženklą.

Teorema 11. *Tarkime, kad seka $\{x_n\}$ turi ribą $b \neq 0$. Tuomet egzistuoja skaičius $N > 0$ toks, kad seka*

$$\left\{\frac{1}{x_n},\ n > N\right\}$$

yra aprėžta.

Teorema 12. *Tarkime, kad sekos $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ turi ribas a ir $b \neq 0$, atitinkamai. Tada sekų $\{x_n\}$ ir $\{y_n\}$ santykio riba yra lygi šių sekų, atitinkamų ribų, santykiui, trumpai*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}.$$

Teorema 13. *Jei konverguojančios sekos $\{x_n\}$ elementai turi savybę: egzistuoja skaičius $N > 0$ toks, kad $x_n \geq b$ $(x_n \leq b)$, kai tik $n > N$, tai tada šios sekos riba a tenkina nelygybę, $a \geq b$, $(a \leq b)$.*

Remiantis sekų savybėmis suskaičiuokime sekų ribas.

Pavyzdys

$$S = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^3 + 2n + 1}{8n^3 + n^2 + 3n}.$$

Skaičiuojant ribas, kai $n \to \infty$, svarbu atkreipti dėmesį į tai, kad skaitiklyje ir vardiklyje reikia iškelti prieš skliaustus greičiausiai augančius narius, t.y.

$$S = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3(2 + \frac{2}{n^2} + \frac{1}{n^3})}{n^3(8 + \frac{1}{n} + \frac{3}{n^2})}.$$

Suprastinę skaitiklyje ir vardiklyje esančius daugiklius n^3 bei remdamiesi sekų santykio bei sumos savybėmis gauname, kad

$$S = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 2 + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2}{n^2} + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^3}}{\lim\limits_{n\to\infty} 8 + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{3}{n^2}}.$$

Esamę įrodę, kad $\frac{a}{n^\alpha}$, čia $a \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$, yra nykstama seka, taigi jos riba lygi nuliui. Remdamiesi šia pastaba gauname, kad sekos riba $S = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$.

Pavyzdys Apskaičiuokime ribą:

$$R = \lim_{n\to\infty} \sqrt{4n^2 + 6n} - 2n.$$

Atkreipsime skaitytojo dėmesį į tai, kad skaičiuojant ribą, kai $n \to \infty$, svarbu gebėti palyginti nagrinėjamus narius, šiuo atveju skirtumo narius. Palyginti bus galima, jei skirtumą sugebėsime užrašyti santykiu. Dažnai tokio pobūdžio riboms skaičiuoti tenka naudoti gerai žinomą formulę:

$$\sqrt[n]{a} - \sqrt[n]{b} = \frac{a - b}{a^{\frac{n-1}{n}} + a^{\frac{n-2}{n-1}} b^{\frac{1}{n}} + a^{\frac{n-3}{n}} b^{\frac{2}{n}} + \cdots + a^{\frac{1}{n}} b^{\frac{n-2}{n}} + b^{\frac{n-1}{n}}}.$$

Tad remdamiesi šia formule gauname, kad

$$R = \lim_{n\to\infty} \sqrt{4n^2 + 6n} - 2n = \lim_{n\to\infty} \frac{4n^2 + 6n - 4n^2}{\sqrt{4n^2 + 6n} + 2n}.$$

Iškėlę skaitiklyje ir vardiklyje greičiausiai augančius narius gauname

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{6n}{2n(\sqrt{1 + \frac{6}{n}} + 1)}.$$

Suprastinę ir skaičiuodami ribą, kai $n \to \infty$, gauname, kad $R = \frac{3}{2}$.

Pastebėsime, kad jei konverguojančios sekos elementai turi savybę $x_n > b$, tai riba a gali būti lygi skaičiui b. Pavyzdžiui, sekos $\{1/n\}$ visi elementai didesni už nulį, tačiau šios sekos riba lygi nuliui.

Teorema 14. *Tarkime, kad sekų $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ elementai tenkina savybę: egzistuoja skaičius N, toks kad $x_n \leq y_n$, kai tik $n > N$. Tada šių sekų ribos a ir b tenkina nelygybę:*

$$\lim_{n\to\infty} x_n \leq \lim_{n\to\infty} y_n.$$

Teorema 15. *(Policininkų principas) Tarkime, kad sekos* $\{x_n\}$, $\{z_n\}$ *turi tą pačią ribą* a. *Be to, sakykime, kad egzistuoja skaičius* $N > 0$ *toks, kad sekos* $\{y_n\}$ *nariams yra teisingos nelygybės* $x_n \le y_n \le z_n$, *kai tik* $n > N$. *Tada seka* $\{y_n\}$ *konverguoja, o jos riba yra skaičius* a.

Pastaba Šis principas gali būti naudojamas siekiant įrodyti, kad seka turi ribą, sudetingesnę seką keičiant paprastesne.

Pavyzdys Įrodykime, kad sekos, kurios bendrasis narys yra

$$x_n = \frac{3n^2 + n + 1}{2n^2 + 5}$$

riba lygi 0,5.

Buvo pastebėta aukščiau, kad pakanka parodyti, kad seka $\alpha_n = \frac{3n^2+n+1}{6n^2-2} - 0,5$ yra nykstama seka.

Turime, kad

$$\alpha_n = \frac{n+2}{6n^2-2} = \frac{n+2}{6n^2-2} = \frac{1}{n}\frac{(1+\frac{2}{n})}{(6-\frac{2}{n^2})}.$$

Kadangi $n \ge 1$, tai

$$1 + \frac{2}{n} \le 3, \text{ ir } 6 - \frac{2}{n^2} \ge 4.$$

Remdamiesi paskutinėmis nelygybėmis gauname, kad

$$\alpha_n \le \frac{3}{4n}.$$

Dešinėje nelygybės pusėje esanti seka nykstama, t.y. jo riba lygi nuliui, o seka $\alpha_n > 0$. Remdamiesi Teorema 15 gauname, kad $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$.

Taigi,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0,5.$$

Apibrėžimas Seką $\{x_n\}$ vadinsime didėjančia (mažėjančia), jeigu visi sekos nariai turi savybę:

$$x_n < x_{n+1} (x_n > x_{n+1}).$$

Seką $\{x_n\}$ vadinsime nemažėjančia (nedidėjančia), jeigu šios sekos elementai turi savybę:

$$x_n \le x_{n+1} (x_n \ge x_{n+1}).$$

Didėjančias bei mažėjančias sekas vadinsime griežtai monotoninėmis, o nemažėjančias bei nedidėjančias sekas vadinsime tiesiog monotoninėmis. Monotoninės sekos yra arba aprėžtos iš apačios, arba iš viršaus.

Teisinga tokia teorema.

Teorema 16. *Jei nemažėjanti (nedidėjanti) seka* $\{x_n\}$ *yra aprėžta iš viršaus (iš apačios), tai ši seka turi ribą.*

Kitaip tariant, jei monotoninė seka aprėžta, tai ji konverguoja.

$\ominus$

Apibendrindami galime teigti, kad monotoninės sekos aprėžtumas yra būtina ir pakankama sekos konvergavimo sąlyga. Pastebėsime, kad konverguojanti seka nebūtinai yra monotoninė!

Paskutinioji teorema yra gana efektyvus ginklas siekiant įrodyti ar nagrinėjamoji seka yra konverguojanti. Jei seka $\{x_n\}$ yra monotoninė (griežtai monotoninė) ir aprėžta, tai remdamiesi paskutiniąja teorema turime, kad seka $\{x_n\}$ turi ribą. Sekančiuose pavyzdžiuose, mes pademonstruosime šios teoremos "veikimą".

Teorema 17. *Seka*

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

konverguoja. Be to $\lim_n x_n = e \approx 2,71\ldots$.

$\ominus$

Parodysime, kad ši seka yra didėjanti ir aprėžta. Tada remiantis 12 Teorema darysime išvadą, kad riba egzistuoja.

Taikydami Niutono-Leibnico formulę gauname, kad

$$x_n = 1 + n \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!} \cdot \frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \cdot \frac{1}{n^3} + \ldots$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-(n-1))}{n!} \cdot \frac{1}{n^n}.$$

Nesunku suprasti, kad

$$x_n = 2 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) + \ldots$$
$$+ \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\ldots\left(1 - \frac{n-1}{n}\right).$$

Matome, kad sekos narys x_{n+1} gali būti užrašytas tokiu būdu:

$$x_{n+1} = 2 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\left(1 - \frac{2}{n+1}\right) + \ldots$$
$$+ \frac{1}{(n+1)!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\left(1 - \frac{2}{n+1}\right)\ldots\left(1 - \frac{n}{n+1}\right).$$

Taikydami nelygybę $(1 - k/n) < (1 - k/(n+1))$ gauname, kad $x_n < x_{n+1}$. Vadinasi seka $\{x_n\}$ didėjanti. Parodysime, kad seka aprėžta. Taikydami nelygybę

$$\frac{1}{k!} < \frac{1}{2^{k-1}}, \text{ kai } k \geq 2,$$

gauname, kad

$$x_n < 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} = 3 - \frac{1}{2^{n-1}} < 3.$$

Taigi, seka $\{x_n\}$ yra aprėžta. Apibendrinę gautus rezultatus matome, kad seka griežtai monotoniška ir aprėžta, taigi seka konverguoja. Šios sekos riba žymima simboliu e. Taigi

$$e := \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \approx 2.71.$$

$\oplus$

Pateiksime keletą 15 teoremos išvadų.

1 Išvada *Tarkime, kad* $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim_{n\to\infty} y_n = b$. *Tada*

$$\lim_{n\to\infty} {x_n}^{y_n} = \lim_{n\to\infty} {x_n}^{\lim_{n\to\infty} y_n} = a^b.$$

2 Išvada *Tarkime, kad* $a > 0$. *Tada teisingi ribiniai sąryšiai*

$$\lim_{n\to\infty} a^n = \begin{cases} 0, 0 < |a| < 1; \\ +\infty, a > 1; \end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}} = 1, \quad \lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}} = 1.$$

Skaitytojui priminsime žinomas sekas ir kai kurias jų savybes.

Apibrėžimas *Aritmetine progresija yra vadinama seka, kurios dviejų gretimų narių skirtumas yra pastovus.*

Sekos narius, turinčius vienetu besiskiriančius numerius, vadiname gretimais.

Taigi, remdamiesi apibrėžimu turime, kad $d = x_i - x_{i-1}, i \in \mathbb{N}$, yra pastovus dydis. Skaičius d yra vadinamas aritmetinės progresijos vardikliu. Aritmetinę progresiją vadinsime didėjančia, jeigu $d > 0$ ir mažėjančia, jeigu $d < 0$.

Nesunku suprasti, kad bet kokį aritmetinės progresijos narį galime išreikšti tokiu būdu:

$$x_n = x_1 + d(n-1).$$

Įrodykite tai. Nesunku parodyti, kad n pirmųjų aritmetinės progresijos narių suma yra lygi

$$S_n = \frac{x_1 + x_n}{2} n, \quad \text{arba} \quad S_n = \frac{2x_1 + d(n-1)}{2}.$$

Siūlome skaitytojui parodyti, kad seka $\{S_n\}$ yra neaprėžta.

Apibrėžimas *Skaičių seką vadinsime geometrine progresija, jeigu dviejų gretimų sekos narių santykis yra pastovus, t.y.* $q = x_i/x_{i-1}$.

Skaičius q yra vadinamas geometrinės progresijos vardikliu. Geometrinė progresija bus didėjanti, jeigu $q > 1$ ir mažėjanti, jeigu $0 < q < 1$. Jeigu $q < 0$, tai seka nei didėjanti nei mažėjanti. Remdamiesi apibrėžimu galime užrašyti formulę, bet kokiam sekos nariui skaičiuoti, kai žinome sekos pirmąjį narį ir vardiklį:

$$y_n = y_1 q^{n-1}.$$

Tikimės skaitytojas pats nesunkiai galėtų parodyti, kad pirmųjų n sekos narių suma gali būti skaičiuojama tokia formule:

$$S_n = \frac{y_1(q^n - 1)}{q-1}, \quad q \neq 1.$$

Kyla natūralus klausimas, ar seka S_n turi ribą? Jei taip, tai kada?

3.3 Posekiai

Tarkime, kad $\{k_n,\ n \in \mathbb{N}\} = \{k_1, k_2, \ldots, k_n, \ldots\} \subset \mathbb{N}$ didėjanti, natūraliųjų skaičių seka. Be to, tegu, $\{x_n\}$ bet kokia seka. Tada seką $\{x_{k_n},\ n \in \mathbb{N}\}$ vadinsime sekos $\{x_n\}$ *posekiu*. Aišku, kad $\{x_{k_n}\} \subset \{x_n\}$. Taigi, sekos $\{x_n\}$ posekis yra tam tikru būdu "išretinta" seka $\{x_n\}$. "Išretinimas" nusakomas seka $\{k_n\}$. Plačiąja prasme, posekis irgi seka ir visos sąvokos, kurios buvo taikomos sekoms bus naudojamos ir posekiams, t.y. monotoniškumas, aprėžtumas ir t.t.

Skaitytojui siūlome įsitikinti pačiam, kad jei seka konverguoja, tai ir bet koks jos posekis konverguoja. Tačiau atvirkščias teiginys yra ne visada teisingas, t.y. jei sekos posekiai konverguoja, tai dar negalime tvirtinti, kad ir seka turi ribą. Tik tuo atveju, kai visi posekiai turi tą pačią ribą, tai ši riba sutampa su visos sekos riba. Tačiau pastebėsime, kad seka turi begalo daug posekių ir akivaizdu, kad neįmanoma patikrinti, ar visi posekiai turi ribas. Tačiau norint įsitikinti, kad seka ribos neturi, tereikia nurodyti bent du posekius, kurie turi skirtingas ribas. (Kodėl ?).

Tarkime, kad posekis konverguoja. Tada šio posekio ribą vadinsime pradinės sekos *ribiniu tašku.*

Panagrinėkime seką $\{x_n\} = \{(-1)^n\}$. Parinkti posekius galime įvairiais būdais, tarkime posekį sudarome naudodami taisyklę

$$k_n = 3n, n \in \mathbb{N}. \tag{2}$$

Matome, kad šiuo atveju seką ir posekį sudaro tie patys elementai, t.y $\{x_{k_n}, n \in \mathbb{N}\} = \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$. Beje, (2) lygybė apibrėžia bijekciją tarp sekos $\{x_n\}$ ir apibrėžtojo posekio. Sakykime, kad $l_n = 2n, m_n = 2n-1,\ n \in \mathbb{N}$. Tada

$$x_{l_n} = \{1, 1, \dots 1, \dots\},\ x_{m_n} = \{-1, -1, \dots, -1, \dots\}.$$

Nesunku suprasti, kad pirmojo posekio riba lygi 1, o antrojo- -1. Kadangi radome bent du posekius, kurių ribos yra skirtingos, tai seka ribos neturi.

Apibrėžimas *Didžiausią (mažiausią) sekos $\{x_n\}$ ribinį tašką vadinsime sekos viršutine riba (apatine riba), kurį žymėsime simboliu* $\overline{\lim}\, x_n$ ($\underline{\lim}\, x_n$).

Auksčiau pateiktame pavyzdyje, sekos viršutinė riba lygi 1, o apatinė riba lygi -1.

Iš paskutiniojo apibrėžimo išplaukia, kad visi sekos ribiniai taškai yra tarp sekos apatinės ir viršutinės, ribų.

Dažnai skaičiuodami sekų ribas mes pertvarkome nagrinėjamas sekas taip, kad jos tampa gerai žinomų sekų posekiais. Remdamiesi šia pastaba pateiksime keletą ribų skaičiavimo taisyklių.

Tarkime, kad $\lim\limits_{n\to\infty} f(n) = \pm\infty$. Tada seka, kurios bendrasis narys yra

$$s_n = \big(1 + \frac{1}{f(n)}\big)^{f(n)}$$

yra sekos $x_n = \Big(1 + \frac{1}{n}\Big)^n$ posekis. Vadinasi $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \mathrm{e}$.

Apskaičiuokime ribas remdamiesi 1, 2 išvadomis bei posekių savybėmis.

Pavyzdys Tarkime, kad duota seka, kurios bendrasis narys

$$x_n = \big(1 + \frac{2}{3n+1}\big)^{4n}.$$

Pertvarkę šią seką tokiu būdu

$$x_n = \Big(\big(1 + \frac{1}{\big(\frac{3n+1}{2}\big)}\big)^{\big(\frac{3n+1}{2}\big)}\Big)^{\big(\frac{2}{3n+1}\big)4n}$$

bei remdamiesi 1 išvada ir ribiniu sąryšiu

$$\lim_{n\to\infty} \big(\frac{2}{3n+1}\big)4n = \frac{8}{3}$$

gauname, kad $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \mathrm{e}^{\frac{8}{3}}$.

Pavyzdys Apskaičiuokime sekos

$$\{x_n\} = \{\big(\frac{n+1}{n-4}\big)^{2n}\}$$

ribą.

Pertvarkome šią seką į formą, kurią turėjo standartinė eksponentinė seka:

$$x_n = (1 + \frac{n+1}{n-4} - 1)^{2n} = \Big((1 + \frac{1}{\frac{n-4}{5}})^{\frac{n-4}{5}}\Big)^{\frac{10n}{n-4}}.$$

Pavyzdys Perėję prie ribos, kai $n \to \infty$ gauname, kad

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \mathrm{e}^{10}.$$

Teoriniai klausimai

1. Skaičių sekos samprata. Aprėžtos ir neaprėžtos sekos. Sekos $\sup x_n, \inf x_n$.
2. Nykstamos sekos ir jų savybės. Šias savybes mokėti įrodyti.
3. Sekų, turinčių ribas, savybės. Šias savybes mokėti įrodyti.
4. Neaprėžtai didėjančios (mažėjančios) sekos. Mokėti įrodyti remiantis apibrėžimu.
5. Monotoniškos ir aprėžtos sekos ("policininkų" principas), skaičius e.
6. Sekų ribų (algoritminis ir pagal apibrėžimą) skaičiavimas.
7. Sekos posekis. Sekos viršutinė ir apatinė ribos. Ryšys su sekos riba.
8. Sekų ribų skaičiavimas.

Uždaviniai savarankiškam darbui

1. Įrodykite, kad seka $\{\frac{n^2+1}{n^2}\}$ yra mažėjanti. Ar ši seka yra nykstama?

2. Įrodykite, kad seka $\{n - 1/(n+3)\}$ yra didėjanti. Ar ši seka aprėžta? Jei taip, raskite šios sekos tiksliuosius viršutinį ir apatinį rėžius.

3. Remdamiesi sekos ribos apibrėžimu įrodykite, kad:

$$a)\ \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^\alpha} = \begin{cases} 0, & \alpha > 0, \\ \infty, & \alpha < 0, \\ 1, & \alpha = 0; \end{cases} \qquad b)\ \lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+1}{2n^2+3} = \frac{3}{2}.$$

4. Apskaičiuokite sekų ribas, kuomet duoti sekų bendrieji nariai:

$$a)\ x_n = \frac{3n^2+n+1}{7n^2+2},\ b)\ x_n = \sqrt{4n^2+2n+3} - (2n+1).$$

Ats: a) $\frac{3}{7}$. b) $-\frac{1}{2}$.

5. Remdamiesi sekos ribos apibrėžimu įrodykite, kad pateiktos yra nykstamos

$$\{\frac{1}{n^2+1}\},\ \{\frac{1}{\sqrt{n}}\},\ \{\frac{3+\sqrt{n}}{n}\},$$

o sekos

$$\{\sqrt{n}\},\ \{n^{\frac{3}{2}}\}$$

yra neaprėžtai didėjančios.

6. Tarkime, kad duotos sekos

$$\text{a)}\ \{\frac{1+(-1)^n}{2} + \frac{(-1)^n}{n}\};\quad \text{b)}\ \{1 + n\sin\frac{\pi n}{2}\};\quad \text{c)}\ \{\frac{n-1}{n+1}\cos\frac{2\pi n}{3}\}.$$

Raskite šių sekų $\inf x_n$, $\sup x_n$, $\liminf x_n, \limsup x_n$.

Ats: a) -1, 1.5, 0, 1. b) $-\infty$, ∞; $-\infty$, ∞. c) -0.5, 1, -0.5, 1.

7. Raskite pateiktų sekų ribas, jeigu jos egzistuoja. Priešingu atveju nurodykite sekų tiksliuosius viršutinius bei apatinius rėžius ir viršutines bei apatines ribas.

$$\text{a)}\ \lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+2n+1}{4n+1};\ \text{b)}\ \lim_{n\to\infty} \frac{(2n-3)^{20}(3n+2)^{30}}{(2n+1)^{50}};\ \text{c)}\ \lim_{n\to\infty} \Big(\frac{\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n}}}}{\sqrt{n+1}}\Big)$$

$$\text{d)}\ \lim_{n\to\infty} ((-1)^n\sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n});\ \text{e)}\ \lim_{n\to\infty} n(\sqrt{n^2+2n} - 2\sqrt{n^2+n} + n);$$

$$\text{f)}\ \lim_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n};\ \text{g)}\ \lim_{n\to\infty} ((n^3+3n^2)^{1/3} - \sqrt{n^2-2n}).$$

h) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{25n^2+2n+9}-(5n+5)\sin\dfrac{\pi n}{4}$; i) $\lim\limits_{n}\dfrac{12n+4}{3n-2}\cos\dfrac{3\pi n}{4}$.

Ats: a) ∞. b) $(1.5)^{30}$. c) 1. d) neegzistuoja. e) -0.25 f) 0. g) 2.
h) $\overline{\lim}x_n=\sup x_n=\infty$, $\underline{\lim}x_n=\inf x_n=-4.8$, i) $\overline{\lim}x_n=4$, $\sup x_n=4.54$, $\underline{\lim}x_n=-4$, $\inf x_n=-8\sqrt{2}$.

8. Žinome, kad jei seka yra aprėžta ir be to monotoninė, tai tada ji turi ribą. Parodykite, kad seka

$$x=\sqrt{6},\ x=\sqrt{6+\sqrt{6}},\ \ldots,x_n=\sqrt{6+\sqrt{6+\ldots\sqrt{6}}},\ldots$$

$n-$ asis narys turi n radikalų, turi ribą, kuri lygi 3.

9. Apskaičiuokite ribas:

$$a)\ \lim_{n\to\infty}\Big(\frac{n^2-1}{n^2+1}\Big)^{\frac{n-1}{n+1}}\quad b)\ \lim_{n\to\infty}\big(1-\frac{2}{n}\big)^n,\quad c)\ \lim_{n\to\infty}\Big(\frac{n+x}{n-x}\Big)^n,\ x\in\mathbb{R}.$$

Ats: a) 1. b) e^{-2}. c) e^{2x}.

Privalomos savarankiško darbo užduotys

1. Įrodykite, kad seka $\{\frac{n^2+3}{n^2}\}$ yra mažėjanti. Ar ši seka yra nykstama?

2. Įrodykite, kad seka $\{\frac{n-1}{n+3}\}$ yra didėjanti. Ar ši seka aprėžta? Jei taip, raskite šios sekos tiksliuosius viršutinį ir apatinį rėžius.

3. Remdamiesi sekos ribos apibrėžimu įrodykite, kad:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+1}{2n^2+3}=\frac{3}{2}.$$

4. Apskaičiuokite sekų ribas, kuomet duoti sekų bendrieji nariai:

$$a)\ x_n=\frac{3n^2+n+1}{7n^2+2},\ b)\ x_n=\sqrt{4n^2+2n+3}-(2n+1).$$

5. Tarkime, kad duotos sekos

$$\text{a)}\ \Big\{\frac{n(1+(-1)^n)}{2n+1}+\frac{(-1)^n}{n}\Big\};\quad \text{b)}\ \{1+n\sin\frac{\pi n}{2}\};\quad \text{c)}\ \Big\{\frac{5n-1}{n+1}(-1)^{n+1}+\frac{3n(-1)^n+2}{n+3}\Big\}.$$

Raskite šių sekų $\inf x_n$, $\sup x_n$, $\liminf x_n, \limsup x_n$.

6. Raskite pateiktų sekų ribas, jeigu jos egzistuoja. Priešingu atveju nurodykite sekų tiksliuosius viršutinius bei apatinius rėžius ir viršutines bei apatines ribas.

$$\text{a)}\ \lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+2n+1}{4n+1};\ \text{b)}\ \lim_{n\to\infty}\frac{(2n-3)^{20}(3n+2)^{30}}{(2n+1)^{50}};\ \text{c)}\ \lim_{n\to\infty}\Big(\frac{\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n}}}}{\sqrt{n+1}}\Big);$$

$$\text{d)}\ \lim_{n\to\infty}((-1)^n\sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n});\ \text{e)}\ \lim_{n\to\infty}((n^3+3n^2)^{1/3}-\sqrt{n^2-2n}).$$

7. Žinoma, kad įmonės pelnas skaičiuojamas tokiu būdu:

$$p_n=\frac{20n^2-19}{2n^2-1}$$

čia n metai, o pelnas yra sąlyginiai mln.. Nustatykite ar pelno seka p_n yra didėjanti ar mažėjanti funkcija. Po kelerių metų pelnas nuo 10 sąlyginių vienetų skirsis 0,005 sąlyginiais vienetais.

8. Draudimo firmos nuostoliai s_n, $n-$ firmos darbo metai, išreiškiami tokia formule:

$$s_n = \frac{300n}{4n^2+2}.$$

Nustatykite, kiek metų turi prabėgti, kad tolimesni (vėlesnių metų) metiniai nuostoliai būtų ne didesni negu $0,1\%$ pirmųjų metų nuostolių.

9. Tarkime, kad drausmingo vairuotojo įmoka, su prabėgusiais metais apibrėžta seka:

$$f(n) = \frac{250n^2+n+2849}{n^2+2}.$$

Nustatykite po kelerių metų draudimo įmoka bus mažesnė už 280 sumą.

10. Buvo nustatyta, kad pajamų skirtumas tarp vidutines pajamas bei mažas pajamas gaunančių asmenų apibrėžtas tokia seka:

$$s_n = \sqrt{n^2+100n} - (n+1).$$

Nustatykite ar laikui bėgant šis skirtumas augs, stabilizuosis ar išnyks?

11. Sakykime, kad banko sąskaitoje esanti pinigų suma kaupiama remiantis tokia formule:

$$S(n) = \left(1+\frac{0.05}{n+2}\right)^{nt}P,$$

čia $t-$ metų skaičius, o $n-$ perskaičiavimų skaičius metuose. Nustatykite kiek kartų pasikeis pradinė suma po 10 metų, jei žinoma, kad perskaičiavimų skaičius metuose neaprėžtai didelis?

3.4 Eilutės sąvoka

Tarkime, kad duota skaičių seka $\{x_n\}$. Naudodami šios sekos elementus sudarykime reiškinį (formaliai sudėkime visus sekos narius)

$$x_1 + x_2 + \dots x_n + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} x_k. \tag{3}$$

Pastarąjį reiškinį vadinsime *skaičių eilute* arba tiesiog *eilute.* (3) eilutės elementus x_n, $n \in \mathbb{N}$, vadinsime eilutės nariais.

(3) eilutės pirmųjų n narių sumą vadinsime šios eilutės $n-$ ąja daline suma ir žymėsime

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} x_k.$$

$n-$oji dalinė sumų seka bus vadinama *dalinių sumų seka.* Pastebėsime, kad kiekviena eilutė gali būti susieta su dalinių sumų seka ir be to, kiekvieną seką $\{S_n\}$ atitinka eilutė, kurios elementus apibrėžia seka: $S_n - S_{n-1} = x_n, n > 1$ ir $x_1 = S_1$.

Apibrėžimas *Sakysime, kad* (3) *eilutė konverguoja, jeigu dalinių sumų seka* $\{S_n\}$ *turi ribą* S. *Šią ribą vadinsime* (3) *eilutės suma. Žymėsime:*

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} x_k.$$

Jeigu seka $\{S_n\}$ *ribos neturi, tai eilutę vadinsime diverguojančia.*

Pavyzdys Panagrinėkime eilutę:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \Big(\frac{1}{3}\Big)^{k-1}.$$

Beje, ši eilutė yra skaitytojui žinoma geometrinės progresijos narių suma.

Šios eilutės dalinių sumų sekos bendrasis narys yra lygus

$$S_n = 1 + \frac{1}{3} + \cdots + \Big(\frac{1}{3}\Big)^{n-1} = \frac{1 - \big(\frac{1}{3}\big)^n}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{2} - \frac{\big(\frac{1}{3}\big)^n}{1 - \frac{1}{3}}.$$

Matome, kad šios eilutės dalinių sumų seka konverguoja, o jos riba lygi $3/2$.

Pavyzdys Parodysime, kad eilutė

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^{(k-1)}$$

diverguoja. Suskaičiavę dalinių sumų sekos bendrąjį narį turime:

$$S_n = 1 + 2 + \cdots + 2^{n-1} = 2^n - 1.$$

Akivaizdu, kad ši dalinių sumų seka diverguoja, tuo pačiu diverguoja ir eilutė.

Pavyzdys Panagrinėkime eilutę

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1}.$$

Šios eilutės dalinių sumų seką sudaro elementai:

$$\{S_n\} = \{-1, 0, -1, 0, \ldots, \}.$$

Matome, kad sekos $\{S_n\}$ posekių $\{S_{2k-1}, k \in \mathbb{N}\}$ ir $\{S_{2k}, k \in \mathbb{N}\}$ ribos yra -1 ir 0, atitinkamai. Kadangi bent dviejų posekių ribos nesutampa, tai tada seka ribos neturi. Vadinasi eilutė diverguoja.

Žinome, kad sekos konvergavimui jokios įtakos nepadarysime, jeigu atmesime bet kokį baigtinį sekos narių skaičių. Tą patį galime pasakyti ir apie eilutė konvergavimą, būtent, atmetus baigtinį eilutės narių skaičių (pridėjus bet kokį baigtinį narių skaičių), eilutės konvergavimo arba divergavimo savybė nuo to nepriklauso. Žinoma, sumos reikšmė nuo to priklauso!

Pastebėsime dar vieną svarbią savybę, kurią turi eilutės: jei eilutė

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_n$$

konverguoja, tai seka $r_n = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} x_n -$ nykstamas dydis. Paskutinioji seka vadinama eilutės liekana. Skaitytojui siūlome įrodyti šią savybę.

Teorema 18. *Jei* (3) *eilutė konverguoja, tai konverguoja ir eilutė*

$$\sum_{k=1}^{\infty} c x_k.$$

Šios teoremos įrodymas išplaukia iš ribų savybių.

Teorema 19. *Jei eilutė* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$ *konverguoja, tai* $x_n \to 0$, *kai* $n \to \infty$. *Vadinasi, jei eilutės bendrasis narys neartėja į nulį, kai* $n \to \infty$, *tai eilutė diverguoja. (Priminsime, kad tiesioginė ir priešinga atvirkštinei teoremos yra ekvivalentūs teiginiai.)*

$\ominus$

Kadangi $x_n = S_n - S_{n-1}$ ir dalinės sumos turi ribas, tai

$$\lim_{n\to\infty} a_n = S - S = 0,$$

čia S yra eilutės suma.

$\oplus$

3.5 Eilučių konvergavimo požymiai

Eilutės, kurių visi nariai neneigiami, yra vadinamos *teigiamomis eilutėmis*. Sakysime, kad eilutė yra griežtai teigiama, jeigu jos visi nariai yra teigiami. Nesunku suprasti, kad teigiamų eilučių dalinių sumų sekos yra monotoniškai didėjančios funkcijos. Teisinga tokia

Teorema 20. *Teigiamoji eilutė konverguoja tada ir tik tada, kai jos dalinių sumų seka yra aprėžta.*

Šio teiginio įrodymas išplaukia iš, jau nagrinėtų, sekų savybių.

Teorema 21. *(Koši kriterijus) Tam kad eilutė*

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k$$

konverguotų, būtina ir pakankama salyga yra tokia: laisvai parinktam $\epsilon > 0$ *egzistuoja toks* $N = N(\epsilon)$, *su kuriuo teisinga nelygybė*

$$|x_{m+1} + x_{m+2} + \cdots + x_n| < \epsilon$$

jei tik $n > m > N$.

$\ominus$

Turime, kad

$$|x_{m+1} + x_{m+2} + \cdots + x_n| = |S_n - S_m|.$$

Bet dešinioji šios lygybės pusė nykstamas dydis (sekoms teisingas Koši kriterijus), vadinasi teoremos tvirtinimas teisingas.

$\oplus$

Išvada *Jei eilutė*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_n|. \tag{4}$$

konverguoja, tai konverguoja ir eilutė $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$.

Šio teiginio įrodymą paliekame skaitytojui.

Apibrėžimas *Sakysime, kad eilutė* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$ *konverguoja absoliučiai, jei (4) konverguoja. Sakysime, kad eilutė* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$ *konverguoja reliatyviai, jeigu ši eilutė konverguoja, o (4) eilutė diverguoja.*

Teorema 22. *Tarkime, kad duotos dvi eilutės*

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k, \sum_{k=1}^{\infty} y_k.$$

Be to tarkime, kad visiems $k \in \mathbb{N}$ teisingos nelygybės $|x_k| \leq y_k$. Tada, jei eilutė

$$\sum_{k=1}^{\infty} y_k, \quad \textit{konverguoja, tai eilutė} \sum_{k=1}^{\infty} x_k$$

konverguoja absoliučiai.

Jei $0 \leq x_k \leq y_k$ visiems $k \in \mathbb{N}$ ir

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k, \quad \textit{diverguoja, tai diverguoja ir eilutė} \sum_{k=1}^{\infty} y_k.$$

$\ominus$

Pažymėkime eilučių

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k \text{ ir } \sum_{k=1}^{\infty} y_k$$

dalines sumas S_n ir Q_n, atitinkamai. Iš teoremos prielaidų išplaukia, kad $S_n \leq Q_n$. Vadinasi, jeigu dalinių sumų seka $\{Q_n\}$ aprėžta, tai aprėžta ir seka $\{S_n\}$ ir atvirkščiai, jeigu dalinių sumų seka $\{S_n\}$ yra neaprėžta, tai neaprėžta ir seka $\{Q_n\}$. Remdamiesi sekų konvergavimo teoremomis gauname šios teoremos įrodymą.

$\oplus$

Teorema 23. *Tarkime, kad eilutė $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ yra teigiama, o eilutės $\sum_{k=1}^{\infty} y_k$ nariai, pradedant kokiu nors numeriu, yra visi teigiami. Be to tarkime, kad egzistuoja baigtinė riba*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{x_k}{y_k} = s. \tag{5}$$

Tada minėtosios eilutės arba abi konverguoja arba abi diverguoja.

$\ominus$

Turime, kad (5) riba egzistuoja. Vadinasi, bet kokiam teigiamam skaičiui $\epsilon > 0$, egzistuoja skaičius $N = N(\epsilon)$ toks, kad kai $n \geq N$, tai teisinga nelygybė:

$$s - \epsilon < \frac{x_k}{y_k} < s + \epsilon.$$

Vadinasi, visiems $n \geq N$, teisinga nelygybė $x_k < (s+\epsilon)y_k$. Bet jei eilutė $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ konverguoja, tai konverguoja ir eilutė $\sum_{n=1}^{\infty} (s+\epsilon)y_n$ (konstantą galime iškelti prieš ribos ženklą!). Iš 18 Teoremos išplaukia paskutiniosios teoremos įrodymas.

$\oplus$

Pavyzdys Remdamiesi 20 teorema gauname, kad eilutė

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k + k}$$

yra konverguojanti, kadangi

$$\frac{1}{2^k + k} \leq \frac{1}{2^k}.$$

Pavyzdys Parodysime, kad eilutė

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

diverguoja. Įvertinkime skirtumą

$$S_{2n} - S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} > n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Matome, kad neišpildytos 21 Teoremos (Koši kriterijaus) sąlygos. Vadinasi eilutė diverguoja.

Pavyzdys Eilutė

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$$

konverguoja, jei tik $k > 1$ ir diverguoja, jei tik $k \leq 1$.

Tarkime, kad n tenkina nelygybę $2^n - 1 > m$. Tada

$$S_m < S_{2^n-1} = 1 + \Big(\frac{1}{2^k} + \frac{1}{3^k}\Big) + \Big(\frac{1}{4^k} + \cdots + \frac{1}{7^k}\Big)$$

$$+\Big(\frac{1}{8^k} + \cdots + \frac{1}{15^k}\Big) + \cdots + \Big(\frac{1}{(2^{n-1})^k} + \cdots + \frac{1}{(2^n-1)^k}\Big)$$

$$\leq 1 + \Big(\frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^k}\Big) + \Big(\frac{1}{4^k} + \cdots + \frac{1}{4^k}\Big)$$

$$+\Big(\frac{1}{8^k} + \cdots + \frac{1}{8^k}\Big) + \cdots + \Big(\frac{1}{(2^{n-1})^k} + \cdots + \frac{1}{(2^{n-1})^k}\Big)$$

$$\leq \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{\left(2^{k-1}\right)^i} < \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{\left(2^{k-1}\right)^i} = \frac{2^{k-1}}{2^{k-1}-1}.$$

Gauname, kad bet kokiam dideliam m, S_m yra neaprėžtai didėjanti ir aprėžta, kai $k > 1$.

Teorema 24. *(Koši požymis) Tarkime, kad*

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} |x_n|^{1/n} < 1.$$

Tada eilutė (3.1) *konverguoja absoliučiai. Jeigu*

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} |x_n|^{1/n} > 1,$$

tai tada eilutė diverguoja.

$\ominus$

Pažymėkime

$$q = \overline{\lim}_{n\to\infty} |x_n|^{1/n}.$$

Tarkime, kad $q < 1$. Vadinasi, egzistuoja skaičius α, $q < \alpha < 1$. Remdamiesi viršutinės ribos apibrėžimu ir ribų teoremomis nelygybėse gauname, kad egzistuoja teigiamas skaičius N toks, kad visiems $n > N$ teisingos nelygybės:

$$|x_n|^{1/n} < \alpha, \quad \text{arba} \quad |x_n| < \alpha^n.$$

Iš paskutiniosios nelygybės išplaukia, kad (3) eilutės nariai yra mažesni už geometrinės progresijos $\{\alpha^n\}$ narius. Bet šios geometrinės progresijos vardiklis $\alpha < 1$. Žinome, kad tokios progresijos narių suma yra baigtinė, kitaip tariant eilutė

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha|^k$$

konverguoja. Bet tuomet ir (3) eilutė konverguoja ir dar daugiau, konverguoja absoliučiai.

Tarkime, kad $q > 1$. Tuomet egzistuoja sekos $\{|x_n|^{1/n}\}$ posekis $\{|x_{n_k}|^{1/n_k}\}$, kurio riba $q > 1$. Vadinasi egzistuoja skaičius N toks, kad visiems $k > N$ teisingos nelygybės: $|x_{n_k}|^{1/n_k} > 1$. Iš paskutiniųjų sąryšių išplaukia, kad visiems $k > N$, $|x_{n_k}| > 1$. Bet paskutinysis sąryšis reiškia, kad egzistuoja begalo daug sekos narių, kurie didesni už 1, taigi sekos bendrasis narys neartėja į nulį, t.y. neišpildyta būtina eilutės konvergavimo sąlyga, todėl (3) eilutė diverguoja.

$\oplus$

Teorema 25. *(Dalambero požymis) Jeigu*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} < 1,$$

tai (3) *eilutė absoliučiai konverguoja, o jeigu*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} > 1,$$

tai (3) *eilutė diverguoja.*

$\ominus$

Pažymėkime

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} = q.$$

Pastebėsime, kad jei $q < 1$, tai tada egzistuoja skaičius α toks, kad $q < \alpha < 1$. Be to egzistuoja skaičius N toks, kad visiems $n > N$ teisingos nelygybės $|x_{n+1}|/|x_n| < \alpha$. Tada teisinga nelygybė:

$$|x_{n+1}| < \alpha|x_n|, \ \forall n > N \in \mathbb{N}.$$

Bet tada, (4) eilutės nariai $n > N$ yra mažesni už geometrinės progresijos $\{\alpha^{n-N}|x_N|\}$, kurios vardiklis yra α, narius. Pastebėsime, kad eilutės pirmųjų $1, \ldots, N$ narių suma jokios įtakos konvergavimui nedaro. Kadangi geometrinės progresijos, kurios vardiklis mažesnis už vienetą, begalinė suma konverguoja, tai konverguoja ir (4) eilutė, o tuo pačiu ir (3) eilutė.

Tarkime, kad

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} = q > 1.$$

Taigi, egzistuoja skaičius $N \in \mathbb{N}$ toks, kad $|x_{n+1}| > |x_n|$, jei tik $n > N$. Išplaukia, kad seka $\{|x_n|, n > N\}$ didėjanti. Todėl $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \geq |a_{N+1}| > 0$. Kadangi neišpildyta būtina eilutės konvergavimo sąlyga, tai (3) eilutė diverguoja.

$\oplus$

Teorema 26. *(Leibnico požymis) Jei teigiamų skaičių seka* $\{x_n\}$ *mažėja, ir* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, *tai eilutė*

$$x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} x_n \tag{6}$$

konverguoja.

$\ominus$

Nagrinėsime (6) eilutės dalinių sumų seką $\{S_{2n}, n \in \mathbb{N}\}$. Šios sekos bendrąjį narį perrašykime taip

$$S_{2n} = (x_1 - x_2) + \cdots + (x_{2n-1} - x_{2n}) \leq (x_1 - x_2) + \cdots + (x_{2n-1} - x_{2n})$$
$$+(x_{2n+1} - x_{2n+2}) = S_{2n+2}.$$

Kadangi $x_{2n+1} \geq x_{2n+2}$, tai seka $\{S_{2n}\}$ didėja. Be to

$$S_{2n} = x_1 - (x_2 - x_3) - \cdots - (x_{2n-1} - x_{2n}) - x_{2n} \leq x_1.$$

Tad nagrinėjamoji seka dar ir aprėžta iš viršaus. Žinome, kad didėjanti ir aprėžta iš viršaus seka turi ribą. Pažymėkime $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_{2n}$. Gauname, kad eilutės bendrasis narys yra nykstamas, todėl teisinga lygybė

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} (S_{2n} + a_{2n+1}) = S.$$

Taigi, abu posekiai turi tą pačią ribą S. Remdamiesi sekos ribos apibrėžimu gauname, kad jei $\epsilon > 0$ bet koks laisvai parinktas skaičius, tai egzistuoja skaičiai N_1 ir N_2 tokie, kad

$$|S_{2n} - S| < \epsilon, \text{ jei } 2n > N_1 \text{ ir } |S_{2n+1} - S| < \epsilon, \text{ jei } 2n + 1 > N_2.$$

Tada $|S_k - S| < \epsilon$ visiems $k > \max\{N_1, N_2\}$, o tai reiškia, kad $\lim\limits_{k\to\infty} S_k = S$.

Teoriniai klausimai

1. Skaičių eilutės samprata. Eilutės suma.
2. Eilučių sumavimas naudojant dalinių sumų sekas.
3. Palyginimo (su laipsnine eilute), Dalambero, Koši konvergavimo požymiai, kai eilutės nariai teigiami. Absoliutus konvergavimas.
4. Realiatyvus konvergavimas. Leibnico požymis.
5. Konvergavimo intervalo radimas. Skaičiuoti paprasčiausių eilučių sumas. Tikrinti eilučių konvergavimą.

Uždaviniai savarankiškam darbui

1. Raskite pateiktų eilučių sumas:

$$\text{a)} \quad \sum_{n=3}^{\infty} \frac{\sqrt{5}+\sqrt{7}}{6^n} \quad \text{b)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n - 7^n}{35^n};$$

c)

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{6\cdot 7} + \ldots \frac{1}{n(n+1)};$$

d)

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4\cdot 7} + \cdots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} + \ldots;$$

e)

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{2\cdot 5} + \cdots + \frac{1}{n(n+3)} + \ldots;$$

Ats: a) $\frac{\sqrt{5}+\sqrt{7}}{180}$; b) $-\frac{1}{12}$; c) 1; d) $\frac{1}{3}$; e) $\frac{11}{18}$;

2. Naudodami eilučių konvergavimo požymius nustatykite ar duotos eilutės konverguoja:

$$\text{a)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1000^n}{n!} \quad \text{b)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} \quad \text{c)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2^{n^2}}; \quad \text{d} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n n!}{n^n}$$

$$\text{e)}\ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{n^5}{2^n+3^n};\ \text{f)}\ \sum_{n=2}^{\infty}\Big(\frac{n-1}{n+1}\Big)^{n(n-1)};\ \text{g)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{\Big(1+1/n\Big)^n};$$

$$\text{h)}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt{n}}{n+100};\ \text{i)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2+n}\ \ \text{j)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{2+n}$$

Ats: a) *taip*; b) *taip*; c) *taip*; d) *ne*; e) *taip*; f) *taip*; g) *ne*. h) *taip*; i) *taip*; j) *ne*.

3. Nustatykite nežinomųjų x reikšmes, kurioms eilutės konverguoja:

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{2^n+3^n};\ b)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}\ \ c)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx^n}{n!}.$$

Ats: a) $|x|<3$; b) $-1\le x<1$; c) $x\in(-\infty,\infty)$.

Privalomos savarankiško darbo užduotys

1. Raskite pateiktų eilučių sumas:

$$\text{a)}\ \sum_{n=3}^{\infty}\frac{\sqrt{7}}{6^n};\ \ \text{b)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n-5^n}{45^n};$$

c)

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{6\cdot 7}+\dots\frac{1}{n(n+1)};$$

d)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-2)(n+1)}.$$

2. Naudodami eilučių konvergavimo požymius nustatykite ar duotos eilutės konverguoja:

$$\text{a)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{100^n}{n!};\ \ \text{b)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!}{n^{2n}};$$

$$\text{c)}\ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{n^2}{2^n+3^n};\ \ \text{d)}\ \sum_{n=2}^{\infty}\Big(\frac{2n-1}{2n+1}\Big)^{n(n-1)};\ \ \text{e)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{\Big(1+1/n\Big)^n};$$

$$\text{f)}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{n^2+100};\ \ \text{g)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2+n}.$$

3. Nustatykite nežinomųjų x reikšmes, su kuriomis eilutės konverguoja:

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{2^n+3^n};\ \ b)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n^n};\ \ \text{c)}\ \sum_{n=1}^{\infty}x^n\Big(\frac{3n+2}{3n+8}\Big)^{n(n+3)}.$$