3. SUDĖTINĖS PALŪKANOS

3.1 Pagrindinės sąvokos

Pastaba Kalbėdami apie finansinius išteklius (pinigus), kaip ir aukščiau, nurodysime tik pinigų nominalą, bet nenurodysime konkrečios valiutos. T.y. nerašysime $220Lt$, o rašysime tiesiog 220.

Pastaba Uždavinių bei pavyzdžių atsakymai dažnai bus netikslūs skaičiai, bet mes paprastai rašydami atsakymus naudosime lygybės ženklą paklaidos tikslumu.

Priminsime, kad palūkanos yra *k*apitalizuojamos, jei pasibaigus nustatytam laiko tarpui, jos pridedamos prie pagrindinio kapitalo.

Apibrėžimas *S*udėtinių palūkanų perskaičiavimo periodu (arba tiesiog perskaičiavimo periodu) vadinsime laiko intervalą, kuriam pasibaigus palūkanos kapitalizuojamos.

Pastaba Pastebėsime, kad paprastųjų palūkanų atveju palūkanos nebuvo kapitalizuojamos, palūkanos buvo skaičiuojamos tik nuo pagrindinio kapitalo.

Apibrėžimas Palūkanas vadinsime *sudėtinėmis,* jeigu jos skaičiuojamos kiekvieno palūkanų perskaičiavimo periodo pabaigoje nuo vertės, buvusios palūkanų periodo pradžioje ir atlikus perskaičiavimą palūkanos yra kapitalizuojamos.

Tarkime, kad $P-$ pradinis kapitalas, $S_k = S$ būsimoji kapitalo vertė, po k perskaičiavimo periodų, $r-$ metinė palūkanų norma, $m-$ perskaičiavimo periodų per metus skaičius, $i = \frac{r}{m}-$ perskaičiavimo periodo palūkanų norma.

Tada

$$S_1 = P(1+i), \quad S_2 = S_1 + iS_1 = S_1(1+i) = P(1+i)^2, \ldots,$$

$$S_k = P(1+i)^k.$$

Lygybę

$$S = P(1+i)^k,$$

vadinsime pagrindine sudėtinių palūkanų formule.

Nesunku suprasti, kad seka $\{S_k\}$ yra geometrinė progresija, kurios vardiklis yra lygus $q = 1+i$.

Jeigu žinome būsimąjį kapitalą ir palūkanų normą, tai dabartinį kapitalą, kai perskaičiavimo periodų yra k, galime apskaičiuoti taip:

$$P = \frac{S}{(1+i)^k}.$$

Apibrėžimas Palūkanų, kurios perskaičiuojamos daugiau negu vieną kartą per metus normą, vadinsime *nominaliąja* palūkanų norma.

Apibrėžimas Palūkanų normą tenkančią perskaičiavimo periodui vadinsime *faktine* palūkanų norma.

Nominaliąją palūkanų normą paprastai žymėsime raide r, palūkanų perskaičiavimo periodų skaičių per metus, raide m, o faktinę palūkanų normą paprastai i. Tada $i = r/m$.

Pastaba Paprastai finansiniuose skaičiavimuose, bankų ataskaitose, nurodant skolinimosi kaštus ir t.t. yra nurodoma metinė palūkanų norma, kuri dar kartais vadinama *efektyviąja* palūkanų norma. Efektyvioji ir nominalioji normos nėra ta pati sąvoka. Efektyvioji norma yra metinė palūkanų norma, kuria remiantis sukaupiamos tokios pačios sudėtinės palūkanos kaip ir su nominaliąja, kuri perskaičiuojama m kartų per metus. Šias sąvokas plačiau nagrinėsime šio skyrelio pabaigoje.

Pastaba Dažnai faktine bet kokio laikotarpio palūkanų norma yra vadinamas pagrindinio kapitalo P ir palūkanų I, sukauptų tame laikotarpyje, santykis:

$$i = \frac{I}{P}.$$

Simboliu i_k pažymėkime $k-$ojo laiko intervalo faktinę palūkanų normą. Tada

$$i_k = \frac{I_k}{P_{k-1}} = \frac{P_k - P_{k-1}}{P_{k-1}}. \tag{7}$$

Tarkime, kad i yra sudėtinių palūkanų perskaičiavimo periodo norma. Tada faktinė $k-$ojo periodo palūkanų norma yra

$$i_k = \frac{P_k - P_{k-1}}{P_{k-1}} = \frac{P(1+i)^k - P(1+i)^{k-1}}{P(1+i)^{k-1}} = i. \tag{8}$$

Taigi, sudėtinių palūkanų atveju faktinė palūkanų norma yra pastovi ir lygi periodo palūkanų normai.

Paskaičiuokime paprastųjų palūkanų faktinę palūkanų normą. Turime

$$i_k = \frac{P(1+ik) - P(1+i(k-1))}{P(1+i(k-1))} = \frac{i}{1+i(k-1)}.$$

Iš paskutiniosios lygybės išplaukia, kad faktinė palūkanų norma mažėja, didėjant perskaičiavimo periodų skaičiui. Priežastis yra tame, kad paprastųjų palūkanų atveju visuose to paties ilgio intervaluose palūkanų dydis yra vienodas, tačiau vienodo dydžio vertės skirtingais laiko intervalais nėra lygios.

Pavyzdys 3000 suma padėta į taupomąją sąskaitą. Koks bus sąskaitos balansas po 7 metų, jei nominalioji palūkanų norma yra 6 procentai, o palūkanos perskaičiuojamos kas pusmetį.

Turime, kad $P = 3000$ ir $m = 2$. Tada $n = 7 \cdot 2 = 14$. Perskaičiavimo periodo norma yra $\frac{0.06}{2} = 0.03$. Tad turime, kad

$$S = (1+0.03)^{14} 3000 \approx 4537.$$

Pavyzdys Kiek laiko teks laikyti saskaitoje 600 kad suma taptų lygi 900 jei nominali palūkanų norma 8 procentai, perskaičiuojami kas ketvirtį?

Turime $m = 4$ ir $i = \frac{0.08}{4}$. Tegu n yra bendras perskaičiavimo periodų skaičius, iki suma $P = 600$ padidės iki sumos $S = 900$. Taikydami būsimosios vertės skaičiavimo formulę gauname, kad

$$900 = 1.02^n 600.$$

Tad $1.02^n = 1.5$. Logaritmuodami šią lygybę gauname, kad

$$n = \frac{\ln 1.5}{\ln 1.02} \approx \frac{0.40547}{0.01980} \approx 20.478.$$

Gauname, kad bendras perskaičiavimo periodų skaičius yra 20.478. Tuomet metų skaičius- $20.478/4 = 5.1195$, arba 5 ir 1 mėnuo. Kadangi perskaičiavimo periodį skaičius turi būti keturių kartotinis, tai galutinis laikotarpis 5 penkeri metai ir 4 mėn.

Iš paskutiniojo uždavinio matyt, kad nagrinėjant praktinius uždainius dažnai tenka susidurti su situacija, kad laikotarpiai kuriuose nagrinėjamas uždavinys, nėra perskaičiavimo periodo kartotinis.

3.2 Sudėtinių palūkanų skaičiavimas tiksliu metodu. Nuolatinis kaupimas

Nagrinėsime perskaičiavimo bei diskontavimo problematiką sudėtinių palūkanų atveju, kai laikotarpis yra racionalus dydis. Kitaip tariant nagrinėsime situaciją, kai laiko intervalas nėra perskaičiavimo periodų sveikas kartotinis.

Jei investavimo laikotarpis yra tolydus, t.y. t yra laikas reiškiamas metais, o i faktinė palūkanų norma, tai

$$S = \big((1+\frac{r}{m})^m\big)^t = P\big(1+i\big)^{mt}P.$$

Vadinasi, $S = S(t)$ ir ši funkcija yra rodiklinė, kintamojo t funkcija. Žemiau gana dažnai naudosime šią formulę.

Panagrinėkime tokį pavyzdį:

Pavyzdys Raskime vertės 100000, kuri buvo investuota dviems metams ir devyniems mėnesiams su 15% palūkanų norma būsimąją vertę, jei palūkanos perskaičiuojamos kas metus. Turime, kad $P = 100000$; $i = 0.15$, $n = 2,75$. Tada

$$S = (1,15)^{2,75}100000 = 146865.$$

Pavyzdys Tegu 350000 suma buvo investuota 2001 rugpjūčio 31d., o investicijų pabaigos data yra 2004 Birželio 30 d., su 15% nominaliąja palūkanų norma, kurios perskaičiuojamos kas ketvirtį. Raskime paskolos galutinę vertę. Turime, kad

$P = 350000$; $i = 0,00375$. Matome, kad investavimo laikotarpis yra dveji metai ir 10 mėnesių. Ketvirčių skaičius šiame laikotarpyje yra $n = 11,(3)$. Tada būsimoji vertė:

$$S = (1,0375)^{11,3333}3500000 = 531210.$$

Pavyzdys Tarkime, kad 300000 paskola turi būti grąžinama po 27 mėnesių nuo dabar. Rasime paskolos vertę dabar, jei palūkanų norma 16%, kurios perskaičiuojamos kas pusmetį.

Turime, kad $S = 300000$, $i = 0.08$, $n = \frac{27}{12} \cdot 2 = 4,5$. Tada

$$P = \frac{S}{1,08^{4,5}} = 212185.$$

Kaip ir paprastųjų palūkanų atveju laikome, kad metuose yra 365 dienos.

Pavyzdys Tarkime, kad asmuo investavo 18000 trejiems metams, su 10 procentų palūkanomis, kurios perskaičiuojamos kas dieną. Raskime investicijų būsimąją vertę.

Turime, kad

$$S = (1+i)^n P = 18000(1+\frac{0,1}{365})^{1095}.$$

Tada

$$S = 18000 \cdot 1,3498025 = 24296,45.$$

Pažymėkime simboliu t laiką, reiškiamą metais. Tarkime, kad per metus yra atliekama m perskaičiavimų. Tada bendras perskaičiavimo periodų skaičius yra lygus $n = mt$. Naudodami sudėtinių palūkanų formulę gauname, kad būsimasis kapitalas gali būti skaičiuojamas tokiu būdu:

$$S = P\big(1+\frac{r}{m}\big)^{mt}. \tag{9}$$

Sudėtines palūkanas, kai perskaičiavimo periodas yra nykstamas dydis, vadinsime *nuolatinėmis sudėtinėmis palūkanomis.*

(89) formulėje pereikime prie ribos, kai $m \to \infty$. Gauname,

$$S(t) = \lim_{m\to\infty}\Big(\big(1+\frac{r}{m}\big)^{\frac{m}{r}}\Big)^{tr} = \mathrm{e}^{tr}.$$

Šios formulės dėka galime skaičiuoti būsimąjį kapitalą, kai "pinigų kaupimo procesas" yra nuolatinis.

Pavyzdys Nustatykite, per kiek laiko pinigų suma laikoma banko sąskaitoje padvigubės jei palūkanos 10 procentų, kaupiamos tolydžiai.

Naudodami būsimosios vertės skaičiavimo formulę gauname, kad

$$S = P\mathrm{e}^{0,1t},$$

čia t metų dalys.

Naudodami sąlygos prielaidas gauname, kad

$$2P = P\mathrm{e}^{0,1t}.$$

Dalindami abi lygybės puses iš P gauname tokią lygybę

$$0,1t = \ln 2.$$

Išprendę t atžvilgiu turime, kad $t \approx 6,9315$.

Tad esant 10 procentų palūkanų normai, pinigų suma sąskaitoje padvigubės maždaug po 6,9 metų, jei palūkanos kaupiamos tolydžiai (nuolat).

3.3 Diskontas sudėtinių palūkanų atveju

Tarkime, kad faktinė palūkanų norma yra i, o pagrindinis kapitalas P. Dažnai skolinimosi sandoriai sudaromi naudojant *diskonto sąvoką*. Šiuo atveju skolinimosi kaštai vadinami *diskontu*, kurį žymėsime raide D. Diskontas yra procentai nuo būsimosios vertės S. Kaip ir paprastų palūkanų atveju *diskonto normą* žymėsime simboliu d.

Tarkime, kad skolinimosi intervalas yra vieneri metai, o diskonto norma d. Tada skolinimosi kaštai yra $D = Sd$, arba

$$d = \frac{S-P}{S}.$$

Matome, kad esant vienam skolinimosi laikotarpiui, kai faktinė laikotarpio palūkanų norma i, arba diskonto d, tiek paprastųjų, tiek sudėtinių palūkanų atveju pradinė vertė ta pati.

$$P = (1-d)S.$$

Tegu d yra diskonto norma. Šią diskonto normą vadinsime *faktine diskonto norma*. Faktinė diskonto norma ir faktinė palūkanų norma i yra susietos lygybe:

$$d = \frac{i}{1+i}.$$

Tada pradinė vertė

$$P = \frac{S}{(1+i)^n} = (1 - \frac{i}{1+i})^n S =: \nu^n S.$$

Dydis

$$\nu = \frac{1}{1+i}$$

yra vadinamas *sudėtinio diskonto daugikliu*.

Skirtumą $S-P$ vadinsime *diskontu* ir žymėsime

$$D = S - P = (1-\nu^n)S.$$

Pastebėsime, kad diskontas gali būti traktuojamas kaip skolinimosi kaštai arba skolinimo pajamos. Taip priklauso nuo to, kurio subjekto atžvilgiu- skolininko ar investuotojo atžvilgiu tai nagrinėjama.

Aptarsime tokią problemą: koks būsimosios vertės S dydis, jei diskonto norma d, o diskontas yra D. Iš paskutiniosios lygybės išplaukia atsakymas į suformuluotą klausimą:

$$S = \frac{D}{1-\nu^n}, \quad d = i\nu.$$

Pavyzdys Nustatykite, kokią pinigų sumą reikėtų investuoti penkeriems metams, jei palūkanų norma 6 procentai, palūkanos kaupiamos tolydžiai siekiant, kad sąskaitoje susidarytų 9000 suma.

Šiuo atveju turime, kad

$$P = Se^{-rt} = 9000e^{-0,06\cdot 5} \approx 6667.$$

3.4 Verčių lyginimas sudėtinių palūkanų atveju

Pinigų vertė (to paties nominalo) skirtingais laiko momentais yra skirtinga. Nesunku suprasti, kad tarkime 1000 litų dabar ir ta pati suma prieš 10 metų turi skirtingas vertes. Šiame skyrelyje nagrėsime problemą- kaip palyginti vertes įvairiais laiko momentais. Spręsdami šią problemą naudosime analogiškas sąvokas kaip ir paprastųjų palūkanų atveju.

Nagrinėjant šį klausimą tenka fiksuoti laiko padėtį (atskaitos tašką) kurio atžvilgiu bus lyginamos vertės. Šį tašką vadinsime *pagrindiniu terminu.* Vertė pagrindinio termino taške vadinama *pagrindine verte,* Kitas vertes vadinsime *terminuotomis vertėmis.* Terminuotos vertės gali užimti dvi padėtis pagrindinės vertės atžvilgiu:

1) Terminuota vertė yra prieš pagrindinę vertę. Šiuo atveju lygindami šias vertes naudosime būsimosios vertės skaičiavimo formulę:

$$S = (1+i)^n P;$$

2) Terminuota vertė yra už pagrindinę vertę. Šiuo atveju lygindami šias vertes naudosime diskonto formulę:

$$P = (1+i)^{-n} S.$$

Pavyzdys 400000 skola išmokama po trejų metų nuo dabar. Tarkime, kad pinigų vertė 14% kurie perskaičiuojami kas pusmetį. Raskite šios vertės vertę

1) po septynerių metų nuo dabar;

2) dabar.

Turime $P = 400000, \quad i = 0,07, \quad n = 8.$

1) Šiuo atveju terminuotą vertę turime skaičiuoti po ketverių metų nuo skolos apmokėjimo. Taigi teks naudoti būsimosios vertės skaičiavimo formulę:

Tada

$$S = (1+0,07)^8 \cdot 400000 = 687274.$$

2) Šiuo atveju turime, kad terminuota vertė yra prieš pagrindinę vertę. Taigi, jei $S = 400000, \quad i = 0,07, \quad n = 6$, tai

$$P = (1+0,07)^{-6} \cdot 400000 = 266537.$$

Pavyzdys 10000 mokėjimas yra atliekamas kiekvieno ketvirčio pabaigoje, penkis ketvirčius iš eilės. Apibrėžkite šiems penkiems ketvirčiams ekvivalentų mokėjimą, šiuo metu, jei nominali palūkanų norma 15% palūkanos perskaičiuojamos kas ketvirtį.

Šis vienintelis mokėjimas yra prieš visus penkis mokėjimus, tada pažymėję šį mokėjimą raide P gauname, kad

$$P = 10000(1,0375)^{-1} + 10000(1,0375)^{-2} + 10000(1,0375)^{-3} +$$

$$10000(1,0375)^{-4} + 10000(1,0375)^{-5} = 44832,5.$$

Panagrinėkime sudėtingesnę problemą, t.y. kai reikia rasti keletą ekvivalenčių mokėjimų nurodytiems mokėjimams.

Pavyzdys Skola buvo išmokoma tokiomis dalimis: 100000 dabar ir 200000 sumokėta po vienerių metų nuo dabar. Jei tą pačią skolą apmokėsime 150000 mokėjimu po trijų mėnesių nuo dabar ir paskutinį mokėjimą atliksime po atuonių mėnesių nuo dabar. Nustatykite koks šis paskutinis mokėjimas, jei nominali palūkanų norma 18% perskaičiuojama kas ketvirtį.

Pasirinkę pagrindiniu terminų paskutinio mokėjimo datą matome, kad visi kiti trys mokėjimai yra prieš pagrindinį terminą. Tad naudodami būsimosios vertės skaičiavimo formulę gauname:

$$S_1 + S_2 = S_3 + x; \quad \text{kai} \quad S_1 = (1,045)^6 100000 = 130000;$$
$$S_2 = (1,045)^2 200000 = 218000; \; S_3 = (1,045)^5 150000 = 186900.$$

Arba $= 161104$.

Pavyzdys Nustatykite vienodų mokėjimų dydį, kurie turi būti atliekami penkis ketvirčius, tam kad būtų padengtas 300000 įsiskolinimas (dabar). Palūkanos 16% perskaičiuojamos kas ketvirtį?

Turime, kad pagrindinis terminas yra dabar. Pažymėję vienodas įmokas simboliu x gauname:

$$300000 = x(1,04)^{-1} + x(1,04)^{-2} + x(1,04)^{-3} + x(1,04)^{-4} + x(1,04)^{-5}.$$

Išsprendę lygtį gauname, kad $x = 67388$.

Apibrėžimas Laiko momentas, kuomet vienas mokėjimas yra ekvivalentus terminuotų mokėjimų sumai bus vadinamas sulyginimo terminu (*equate date*).

Pavyzdys Vykdant finansinius įsipareigojimus atliekami tokie mokėjimai: 200000 po 6 mėn, 300000 po 15 mėn. ir 500000 po 24 mėn. Nustatykite sulyginimo terminą, kuomet vienintelis 100000 mokėjimas pakeitų tris nurodytus mokėjimus, jei palūkanų norma 18% perskaičiuojamos kas mėnesį?

Tarkime, kad pagrindinis terminas - dabar. Turime $i = 0.0125$. Sudarę lygtį gauname, kad

$$100000(1,0125)^{-n} = 200000(1,0125)^{-6} + 300000(1,0125)^{-15} + 500000(1,0125)^{-24}.$$

Tada

$$(1,0125)^{-n} = 0,805732, \quad \text{arba} \quad -n\ln(1,0125) = \ln 0,805732.$$

Turime, kad $n = 17,388$. Vadinasi sulyginimo terminas yra $17,4$ mėn. nuo dabar arba 529 dienos nuo dabar.

Apibendrinkime aukščiau aptartas situacijas. Tarkime, kad turime žinomų mokėjimų seką $P_1, P_2, \ldots P_k$, yra prieš pagrindinį terminą ir su pagrindinio termino momentu susieta tokia laiko seka $v_1, \ldots, v_k$ ir žinoma mokėjimų seka $Q_1, Q_2, \ldots Q_l$, kuri yra prieš po pagrindinuio termino ir su pagrindinio termino momentu susieta tokia laiko seka $u_1, \ldots, u_l$ šią mokėjimų seką norime pakeisti kita mokėjimų seka, tarkime $X_1, \ldots, X_s$, kuri yra prieš pagrindinį terminą su tokia laiko intervalų, iki pagrindinio termino, seka $t_1, \ldots, t_s$ ir seka $Y_1, \ldots, Y_n$, kuri yra po pagrindinio termino su tokia laiko intervalų, iki pagrindinio termino, seka $T_1, \ldots, T_n$. Laikome, kad faktinė palūkanų norma yra i ir palūkanos perskaičiuojamos m kartų per metus. Tada turi galioti tokia verčių lygybė:

$$\sum_{j=1}^{k} P_j \cdot (1+i)^{mv_j} + \sum_{j=1}^{l} \frac{Q_j}{(1+i)^{mu_j}} = \sum_{j=1}^{s} X_j \cdot (1+i)^{mt_j} + \sum_{j=1}^{n} \frac{Y_j}{(1+i)^{mT_j}}.$$

Iš pastarojo sąryšio matyti, kad pagrindinis terminas, sudėtinių palūkanų atveju gali būti pasirenkamas visiškai laisvai. Nuo šio termino pasirinkimo nepriklauso nominaliosios vertės $X_k, Y_i, \; k = 1, \ldots s, \; i = 1, \ldots, n$.

3.5 Ekvivalenčios palūkanų normos. Efektyvioji palūkanų norma

Šiame skyrelyje aptarsime problematiką, kurios esmė tokia, kaip gauti tą pačią būsimąją vertę, jei palūkanos yra skirtingo pobūdžio. Arba kaip siejasi įvairios palūkanų normos, jei per tą patį laikotarpį sukaupia tą pačią būsimąją vertę. Visų pirma panagrinėkime plačiai naudoją sąvoką.

Apibrėžimas Dvi palūkanų normas, tame pačiame laikotarpyje vadinsime ekvivalenčiomis, jei šiame laikotarpyje su bet kuria iš šių palūkanų normų yra sukaupiama ta pati būsimoji vertė.

Apibrėžimas Efektyviąja palūkanų norma e, atitinkančia nominaliąją palūkanų normą r, kai perskaičiavimo periodų skaičius per metus lygus m, vadinsime tokį skirtumą:

$$e = \left(1 + \frac{r}{m}\right)^m - 1 = (1+i)^m - 1.$$

Pastebėsime, kad efektyvioji palūkanų norma, yra metinė palūkanų norma, kuri reiškia tą patį sąlyginio vieneto prieaugį kaip ir nominalioji, kuomet perskaičiavimų skaičius lygus m. Jei duota efektyvioji palūkanų norma, tai suprantama, kad tai metinė palūkanų norma perskaičiuojama kartą per metus.

Iš efektyviosios palūkanų normos apibrėžimo išplaukia, kad efektyvioji palūkanų norma yra ekvivalenti nominaliąjai, kuri perskaičiuojama m kartų per metus.

Pastebėsime, kad

1)Nominalioji palūkanų norma sutampa su efektyviąja, jei per metus tėra vienas perskaičiavimas;

2) Efektyvioji norma didėja, daugėjant perskaičiavimo periodų skaičiui per metus. Tad fiksuotai nominaliąjai normai maksimali efektyvioji bus tada, kai palūkanos perskaičiuojamos tolygiai.

Pavyzdys Raskime metų efektyviąją palūkanų normą, atitinkančią 6 procentų nominaliąją palūkanų normą, perskaičiuojamą kas pusmetį.

Remdamiesi formule gauname, kad

$$e = \left(1 + \frac{0,06}{2}\right)^2 = 0,0609.$$

Pavyzdys Tarkime, kad pinigai investuoti su 8 procentų metinėmis palūkanomis, kurios perskaičiuojamos kas ketvirtį. Raskime efektyviąją palūkanų normą. Turime, kad $m = 4$, $r = 0,08$ ir $i = \frac{0,08}{4} = 0,02$. Tada

$$e = (1+i)^n - 1 = (1,002)^4 - 1 = 0,0824.$$

Taigi, jei palūkanos 8 procentų ir perskaičiuojamos kas ketvirtį, tai tą pačią vertę gausime, jei kaupsime su 8,24 procentų metinėmis palūkanomis, kurios perskaičiuojamos kas metus.

Pavyzdys Tarkime, kad pinigai investuojami su 8 procentų palūkanomis, kurios perskaičiuojamos kas ketvirtį. Raskime efektyviąją palūkanų normą. Turime: $n = 4$, $r = 0,08$ and $i = \frac{0,08}{4} = 0,02$. then

$$e = (1+i)^n - 1 = (1,002)^4 - 1 = 0,0824.$$

Pavyzdys Nustatykime, per kiek laiko padvigubėtų pagrindinis kapitalas P, jei žinoma efektyvioji i.

Tegu $n-$ metų skaičius. Remdamiesi prielaida turime, kad $2P = (1+i)^n P$. Tada

$$2 = (1+e)^n. \text{ Turime, kad, } \ln 2 = n \ln(1+e),\ n = \frac{\ln 2}{\ln(1+e)} \approx \frac{0.69315}{\ln(1+i)}.$$

Tegu $i = 0,06$ Tada $n \approx 11,9$.

Pavyzdys Raskite banko nominaliąją palūkanų normą, jei žinoma, kad efektyvioji palūkanų norma, su kuria uždirbamos tolydžios palūkanos yra 7 %.

Turime,

$$r = 0,07, \quad e = \ln(1+r) \approx 0.067, \quad \text{arba}, \ 6,7\%.$$

3.6 Paprastų ir sudėtinių palūkanų ekvivalentumas

Tegu $_s$, i d_s, d yra paprastųjų ir sudėtinių palūkanų ir diskonto normos perskaičiavimo laikotarpyje, atitinkamai, o k šių laikotarpių skaičius. Tegu $r-$ nominali palūkanų norma, m perskaičiavimo skaičius per metus ir n metų skaičius, kuriam kaupiamas kapitalas.

Turime, kad jei palūkanos ekvivalenčios, tai būsimoje vertė tame pat laikotarpyje yra vienoda. Jei perskaičiavimo laikotarpių skaičius yra $k-$ tai

$$1 + ki_s = (1+i)^k.$$

Iš pastarosios lygybės išplaukia palūkanų normų sąryšiai, t.y.:

$$i_s = \frac{(1+i)^k - 1}{k}, \quad i = \sqrt[k]{1+ki} - 1.$$

Apibendrinę gauname, kad jei m yra perskaičiavimų skaičius per metus ir turime iš viso n metų, tai

$$i_s = \frac{(1+\frac{i}{m})^{mn} - 1}{n}, \quad i = m(\sqrt[mn]{1+ni_s} - 1).$$

Raskime palūkanų normų i, r, d sąryšius, čia i, d yra perskaičiavimo laikotarpio normos, o $r-$ nominalioji norma. Lygindami vertes gauname, kad

$$1 + i = (1 + \frac{r}{m})^m.$$

Tada

$$i = (1+\frac{r}{m})^m - 1, \quad r = m(\sqrt[m]{1+i} - 1).$$

Lygindami vertes su i ir d viename perskaičiavimo laikotarpyje gauname jau turėtą lygybę:

$$i = \frac{d}{1-d}, \quad d = \frac{i}{1+i}.$$

Jei d_s yra paprasto diskonto norma (metinė) ir r sudėtinių palūkanų norma (metinė), tada praėjus n metų turime tokius sąryšius:

$$d_s = \frac{1-(1+r)^n}{n}, \quad r = \sqrt[n]{1-nd_s} - 1).$$

Susieję d_s su $i = \frac{r}{m}$, $n-$ metų skaičius, gauname:

$$d_s = \frac{1-(1+\frac{r}{m})^{mn}}{n}, \quad r = m(\sqrt[mn]{1-di_s} - 1).$$

Tarkime, kad palūkanos paprastos. Aptarkime paprastųjų palūkanų bei paprastojo diskonto ekvivalentumo problemą įvairiose laiko bazėse, t.y. kai yra laikoma, kad dienų skaičius metuose yra nebūtinai įprastinis.

Tarkime, kad i_1, d_1 yra palūkanų ir diskonto norma bazėje K_1 ir i_2, d_2 yra palūkanų ir diskonto norma bazėje K_2. Čia K_1, K_2 yra dienų skaičius metuose. Susiekime palūkanų bei diskonto normas skirtingose bazėse, paprastų palūkanų atveju. Iš lygybės

$$1 + \frac{n}{K_1} i_1 = 1 + \frac{n}{K_2} i_2 \Rightarrow \qquad i_1 = \frac{K_1}{K_2} \cdot i_2.$$

Analogiškai samprotaudami gauname, kad

$$d_1 = \frac{K_1}{K_2} d_2.,$$

Remdamiesi (10) sąryšiu gauname, kad

$$i_1 = \frac{d_1}{1 - td_1} = \frac{\frac{K_1}{K_2} d_2}{1 - \frac{n}{K_1} \frac{K_1}{K_2} d_2} = \frac{K_1 d_2}{K_2 - nd_2}$$

arba

$$i_2 = \frac{K_2 d_1}{K_1 - nd_1}.$$

Analogiškai elgdamiesi, gauname ir diskonto normos sąryšius su palūkanų norma skirtingose bazėse, t.y.

$$d_1 = \frac{K_1 i_2}{K_2 + ni_2}.$$

Pavyzdys Raskite diskonto normą, kai dienų bazė $K = 360$, dienų skaičiui $n = 255$ kuri būtų ekvivalenti 40% paprastų palūkanų normai, bazėje $K = 365$.

$$d_s = \frac{360 \cdot 0,4}{365 + 255 \cdot 0,4} \approx 0,3.$$

Pavyzdys Jums pasiūlytos dvi investavimo galimybės. Viena finansinė įstaiga siūlo investuoti į kaupimo fondą, kuris moka $13,5\%$ kurios perskaičiuoja kas pusmetį, o antroji finansinė įstaiga siūlo mokėti 14% metinių palūkanų ir trečioji siūlo $13,25\%$ palūkanų, kurios perskaičiuojamos kas mėnesį. Kuris finansinis pasiūlymas yra pelningiausias?

Palyginkime visus šiuos tris finansinius pasiūlymus projektų palūkanas lygindami su efektyviosiomis palūkanomis. Turime, kad

1) Pirmosios įstaigos palūkanos ekvivalenčios tokioms efektyviosioms palūkanoms: $i = 0,0675,\ m = 2$. Tada

$$e_1 = (1 + 0.0675)^2 - 1 = 13,956.$$

2) Antrosios įstaigos palūkanos ekvivalenčios tokioms efektyviosioms palūkanoms: $i = 0,14,\ m = 1$. Tada

$$e_2 = 14.$$

3) Trečiosios įstaigos palūkanos ekvivalenčios tokioms efektyviosioms palūkanoms: $i = 0,01104,\ m = 12$. Tada

$$e_3 = (1,01104)^{12} - 1 = 14,085.$$

Matome, kad trečiosios įstaigos siūlomos palūkanos yra geriausios.

Uždaviniai savarankiškam darbui

Pastaba Atsakymai apvalinami!

1. Nustatykite galutinę investuotos sumos vertę, jei investuosime 50000 penkiolikai metų su $13,5\%$ sudėtimis palūkanomis kurios perskaičiuojamos kas:
(a) metus?
(b) ketvirtį?
(c) mėnesį?
Ats: (a) 334124 (b) 366354 (c) 374547

2. Raskite 10000 sumos, su 16.5% palūkanomis, kurios perskaičiuojamos kas mėnesį būsimąją vertę po:

(a) ketverių metų?
(b) aštuonerių su puse metų?
(c) po dvidešimties metų?
Ats: (a) $19261., 12$ (b) $40266., 93$ (c) $265099, 04$

3. Močiutė paliko anūkei palikimą (sąskaitą banke) ir sutartyje nurodė, kad šiuo palikimu anūkė galės disponuoti tik tada, kai jis padvigubės. Po kelerių metų anūkė galės disponuoti palikimu, jei žinoma, kad metinė palūkanų norma 10% ir palūkanos perskaičiuojamos kas metus.
Ats: $8m.$

4. Nominali palūkanų norma 8% perskaičiuojamos kas mėnesį. Raskite kapitalo prieaugį, kuris susidarys po $3, 5$ metų. Atsakymą pateikite procentais.
Ats: $\approx 32\%$

5. Nustatykite pagrindinio kapitalo vertę jei žinoma, kad per keturis metus ir aštuonis mėnesius, kai palūkanų norma 15% ir palūkanos perskaičiuojamos kas ketvirtį, būsimoji vertė yra 1400000.
Ats: 704180

6. SEB bankas siūlo taupyti trejus metus su $15, 25\%$ kurios perskaičiuojamos kas metus, o Swed-bankas trejus metus su $14, 5\%$, kurios perskaičiuojamos kas ketvirtį. Tarkime, kad 500000 buvo investuoti. Kokia būsimoji vertė susidarys, jei:
(a) Investuosime į SEB banko projektą?
(b) Swedbanko projektą?
Ats: (a) 765408 (b) 766557

7. Kokiai nominaliai palūkanų normai esant pagrindinis kapitalas padvigubės, jei:
(a) palūkanos perskaičiuojamos kas ketvirtį, šešerius metus ir devynis menesius;
(b) palūkanos perskaičiuojamos kas mėnesį, devynerius metus ir du mėnesius, palūkanos perskaičiuojamos kas mėnesį.
Ats: (a) $10, 02\%$ (b) $7, 585\%$

8. A.B. į banko sąskaitą padėjo 17500 2002 Kovo 1, su 10% sudėtinėmis palūkanomis, kurios perskaičiuojamos kas ketvirtį. 2002 Rugsėjo 1 d. palūkanų norma pasikeitė į 12% palūkanos perskaičiuojamos kas mėnesį ir 2006 Birželio 1 dieną palūkanų norma dar kartą pasikeitė į 11% palūkanos buvo perskaičiuojamos kas pusmetį. Nustatykite sąskaitos balansą 2012 Gruodžio 1 dieną. Metodas tikslus.
Ats: 55374

9. Tarkime, kad asmuo iš banko pasiskolino 20000 sumą, penkeriems metams. Nominali palūkanų norma yra 8%, palūkanos perskaičiuojamos kas keturis mėnesius. Rasti paskolos būsimąją vertę, jei žinoma, kad po trejų metų asmuo grąžins 30% susidariusios skolos. Kiek palūkanų asmuo sumokės bankui per penkerius metus?
Ats: ≈ 20800; ≈ 8420.

10. Asmuo nusprendė kas metus, trejus metus iš eilės, į sąskaitą padėti 20000. Palūkanų norma yra 13%, palūkanos perskaičiuojamos kas ketvirtį. Kokia pinigų suma susidarys sąskaitoje po ketverių metų, kai buvo atlikta pirmoji įmoka.
Ats: 88552

11. A.B. tikėdamasis sutaupyti buto pirmąjam įnašui gavo pasiūlymą- bankas mokės 14% sudėtines palūkanas, kurios bus perskaičiuojamos kas ketvirtį. A.B. 1984 Vasario 1 dieną į sąskaitą padėjo 25000. 1985 Vasario 1 dieną padėjo dar 20000 ir 1986 Vasario 1 dieną 15000. Nustatykite sąskaitos balansą 1994 Rugpjūčio 1 dieną.
Ats: 228265

12. A.B. paėmė 80000 paskolą. Šią paskolą nusprendė dengti tokiais mokėjimais: 30000 bus grąžinama po penkiolikos mėnesių, 40000 po trisdešimties mėnesių ir paskutinis mokėjimas po

ketverių metų.a Palūkanų norma yra 15% pirmaisiais dviem metais, 16% likusiam laikotarpiui. Visais atvejais palūkanos perskaičiuojamos kas ketvirtį. Raskite paskutinio mokėjimo dydį.

Ats: 50517

13. Žinoma kad palūkanų norma yra $14,8\%$ ir palūkanos perskaičiuojamos kas ketvirtį. Raskite 40000 sumos diskontuotą vertę ir sudėtinio diskonto dydį, jei žinoma kad vertė bus diskontuojama septyneri metai ir šešeri mėnesiai iki būsimosios vertės termino.

Ats: 13449; 26551

14. Tarkime, kad po šešių mėn. nuo dabar bus į sąskaitą pervedama 100000, po aštuoniolikos mėnesių- 120000 ir po trisdešimties mėnesių 150000. Žinoma, kad per visą šį laikotarpį už sąskaitoje esančius pinigus yra mokama 16% palūkanos, kurios perskaičiuojamos kas ketvirtį. Nustatykite šioms trims įmokoms ekvivalenčią įmoką, atliktą po dviejų metų.

Ats: 395007

15. Žinoma, kad po metų, nuo dabar, vyriausybei teks pasiskolinti 100000000 su 13% palūkanomis, kurios perskaičiuojamos kas pusmetį. Tarkime, kad šią vienkartinę paskolą svarstoma pakeisti 60000000 paskola po šešerių mėnesių ir dar viena paskolos dalimi po šešiolikos mėnesių. Nustatykite šios paskolos dydį, jei antrosios paskolos palūkanos yra 18% perskaičiuojamos kas mėnesį.

Ats: 34595400

16. Skola buvo apmokėta šiandien 40000, 50000 po aštuoniolikos mėnesių ir 90000 po trejų metų. Koks turi būti vienkartinis skolos apmokėjimas, jeigu jį atliksime po dviejų metų nuo dabar, jeigu palūkanų norma 16% palūkanos perskaičiuojamos kas ketvirtį?

Ats: 185755

17. Tarkime, kad biržos makleris nupirko naftos už 10^{10} dolerių. Šiuos pinigus jis pasiskolinio pusei valandos. Kokią pinigų sumą uždirbs bankas per šį laikotarpį, jei nominali palūkanų norma yra 6%.

Ats: ≈ 34300

18. 200000 suma investuota tims metams ir keturiems mėnesiaims su $12,5\%$ palūkanomis, kurios perskaičiuojamos kas pusmetį. Raskite palūkanų dydį.

Ats: 99610

19. Nustatykite nominaliąją palūkanų normą, kuri perskaičiuojama kas pusmetį ir kuri ekvivalenti efektyviąjai $16,2\%$ palūkanų normai.

Ats: $15,109\%$

20. Raskite terminuotą datą (equated date), kurioje 130000 mokėjimas būtų ekvivalentus dviejų mokėjimų: 50000 atlikto šeši mėnesiai prieš dabar ir 60000 atlikto dabar, jei palūkanų norma 15%, palūkanos perskaičiuojamos kas mėnesį.

Ats: 10,665 mėn. arba (325 dienos)

21. Nustatykite kokia pinigų suma susidarys sąskaitoje po septynerių metų, jei pradžioje sąskaitos balansas yra 70000, palūkanų norma 18.5% palūkanos perskaičiuojamos tolydžiai.

Ats: 255570

22. Raskite efektyviąją palūkanų normą, kuri būtų ekvivalenti palūkanų normai $16,75\%$, kuri būtų perskaičiuojama tolydžiai.

Ats: $18,236\%$

23. Raskite dabartinę vertę, jei:

(a) būsimoji vertė 1000000 po dešimties metų, palūkanų norma 20% palūkanos perskaičiuojamos tolydžiai;

(b) būsimoji vertė 700000 po keturių metų ir keturių mėnesių, palūkanų norma $15,5\%$ palūkanos perskaičiuojamos tolydžiai.

Ats: (a) 135335 (b) 357600

24. Raskite efektyviąją palūkanų normą ekvivalenčią nurodytoms, dviejų po kablelio ženklų tikslumu, jei:

(a) palūkanos $16,5\%$ perskaičiuojamos kas mėnesį;

(b) pradinis kapitalas 2000 per septynerius metus padidėja iki 6800 palūkanos perskaičiuojamos kas ketvirtį;

(c) palūkanos 19% perskaičiuojamos tolydžiai.

Ats: (a) $17,81\%$ (b) $19,10\%$ (c) $20,92\%$

25. (a) Nustatykite nominaliąją palūkanų normą, perskaičiuojamą kas mėnesį, kuri būtų ekvivalenti $18,5\%$ palūkanų normai, perskaičiuojamai kas ketvirtį.

(b) Kokia turi būti nominali palūkanų norma, kuri perskaičiuojama kas ketvirtį, kad ji būtų ekvivalenti efektyviąjai 20% palūkanų normai?

Ats: (a) $18,22\%$ (b) $18,65\%$

26. Vykdant finansinius įsipareigojimus tenka dabar sumokėti 2000, po šešių mėnesių 2500 ir po vienerių metų dar 4000. Kokiu laiko momentu šie trys mokėjimai gali būti pakeisti vienu 8000 mokėjimu, jei palūkanų norma 18%, palūkanos perskaičiuojamos kas mėnesį?

Ats: n = 3,1637199 mėnesiai arba (97 dienos)

27. 1990 Gruodžio 1d. buvo pasiskolinta 10000, su 15% palūkanų norma, kurios perskaičiuojamos kas pusmetį. Skolos grąžinimo terminas 1993 Gruodžio 1 diena. 1992 Gruodžio 1 dieną padengiant dalį skolos buvo sumokėta 7500. Kada reikėtų sumokėti antrą įmoką, kurios dydis 7500 jei pinigų vertė yra 18%, pinigai perskaičiuojami kas ketvirtį ?

Ats: n = 15.289101 ketvirčiai nuo dabar (3 metai 301 dienos - 1994 Rugsėjo 28 dieną.)

28. Skola gali būti apmokama tokiu būdu: 70000 po šešių mėnesių; 50000 po penkiolikos mėnesių ir 90000 po dviejų metų. Kita galimybė - vieans mokėjimas po vienerių metų nuo dabar. Koks šio mokėjimo dydis, jei palūkanų norma 14.5%, palūkanos perskaičiuojamos tolydžiai?

Ats: 201335

29. Vykdant finansinius įsipareigojimus yra galimybė mokėti 200000m po vienerių metų ir 400000 po penkių metų. Pasikeitus kontrakto sąlygoms, tenka mokėti 300000 po dviejų metų ir paskutinio mokėjimo dydis 450000. Kokiu laiko momentu nuo dabar turi būti atliktas antrasis mokėjimas, jei palūkanų norma 15.5%, palūkanos perskaičiuojamos tolygiai.

Ats: 7.742 metai (7 metai ir 271 dienos)

30. Nustatykite paprastųjų palūkanų normą, kuri būtų ekvivalenti sudėtinių palūkanų normai, perskaičiuojamai kas ketvirtį, penkerių metų ir 8 mėn. laikotarpyje, jei nominali palūkanų norma 14% .

Ats: 20,8%

Privalomos namų darbų užduotys

Pastaba Jei nepaminėta kitaip bus laikoma, kad skaičiuojant sudėtines palūkanas bus naudojamas tikslusis metodas.

1. Kredito unija siūlo taupyti penkerius metus su 12% palūkanų norma, kurios perskaičiuojamos kas ketvirtį, o Šiaulių bankas penkerius metus su 10%, kurios perskaičiuojamos kas mėnesį. Tarkime, kad asmuo norėtų investuoti į vieną iš šių projektų. Kurį projektą pasirinkti? Kokią investuoto kapitalo dalį (procentais) sudaro palūkanos?

2. Kokiai nominaliai palūkanų normai esant pagrindinis kapitalas padvigubės, jei:

(a) palūkanos perskaičiuojamos kas ketvirtį, o laiko intervalas šešeri metai ir devyni mėnesiai;

(b) palūkanos perskaičiuojamos kas mėnesį, o laiko intervalas, devyneri metai ir du mėnesiai.

3. A.B. į banko sąskaitą padėjo 17500 2002 Kovo 1, su 10% sudėtinėmis palūkanomis, kurios perskaičiuojamos kas du mėnesius. 2002 Rugsėjo 1 d. palūkanų norma pasikeitė į 8%, palūkanos perskaičiuojamos kas mėnesį ir 2006 Gegužės 1 dieną palūkanų norma dar kartą pasikeitė į 5%,

palūkanos buvo perskaičiuojamos kas pusmetį. Nustatykite sąskaitos balansą 2012 Gruodžio 1 dieną, jei 2005 Sausio 1 dieną į sąskaitą padėjo 5000 papildomą sumą, o 2008 Spalio 1 dieną nuo sąskaitos nuėmė 30% susidariusios sumos.

4. Žinoma, kad po metų, nuo dabar, vyriausybei teks pasiskolinti 100000000 su 12% palūkanomis, kurios perskaičiuojamos kas pusmetį. Tarkime, kad šią vienkartinę paskolą svarstoma pakeisti 60000000 paskola po šešerių mėnesių nuo dabar ir dar viena paskolos dalimi po šešiolikos mėnesių. Nustatykite šios paskutinės paskolos dydį.

5. Raskite laiko momentą (equated date), kuomet 130000 mokėjimas būtų ekvivalentus dviejų mokėjimų: 50000 atlikto šeši mėnesiai prieš dabar ir 60000 atlikto šiandien, jei nagrinėjamo laikotarpio palūkanų norma 15%, palūkanos perskaičiuojamos kas mėnesį.

6. Raskite dabartinę vertę, jei:

(a) būsimoji 1000000 vertė po dešimties metų ir vieno mėnesio, palūkanų norma 20% palūkanos perskaičiuojamos tolydžiai;

(b) būsimoji 700000 vertė po keturių metų ir keturių mėnesių, palūkanų norma 15.5% palūkanos perskaičiuojamos tolydžiai.

7. Nustatykite tikslų laiko intervalą, kuriam laikotarpiui reikėtų kaupti pradinį kapitalą, iki jis padidės 175% , jei žinoma, kad palūkanos perskaičiuojamos kas keturis mėnesius, o efektyvioji palūkanų norma yra 12% .

8. Šiuo metu paimta skola grąžinama tokiu būdu: 40000 po 13 mėn, 80000 po 18 mėn. ir 90000 po 38 mėn. Nustatykite terminą, kuomet vienintelis 220000 mokėjimas pakeistų tris nurodytus mokėjimus, jei palūkanų norma 10%, jos perskaičiuojamos kas ketvirtį?

9. Raskite paprastų palūkanų normą $n = 160$ dienų skaičiui, kai šios normos dienų bazė $K = 365$, kuri būtų ekvivalenti 10% paprastų palūkanų normai, bazėje $K = 360$.

10. Raskite paprastojo diskonto normą $n = 345$ dienų skaičiui, šios normos dienų bazė $K = 365$, kuri ekvivalenti 16% paprastų palūkanų normai, bazėje $K = 360$.

11. Tarkime, kad palūkanų norma 12% palūkanos perskaičiuojamos kas mėnesį. Nustatykite efektyviąją palūkanų normą ekvivalenčią duotąjai.

12. A.B. paėmė 180000 paskolą ketveriems metams. Šią paskolą nusprendė dengti tokiais mokėjimais: 60000 bus grąžinama po vienerių metų, po trisdešimt mėnesių bus grąžinama 80000 ir paskutinis mokėjimas 120000 po ketverių metų. Nustatykite palūkanų normą, kuriai esant šiais mokėjimais būtų galima padengti paskolą, jei palūkanos perskaičiuojamos kas du mėnesius.

13. Nustatykite, kokia buvo nominali palūkanų norma, jei žinoma, kad padėta į banką pinigų suma per 10 metų padidėjo 50%, be to žinoma, kad palūkanos perskaičiuojamos kas 3 mėn.

14. Kapitalas 125000 per 7,25 metus padidėja iki būsimosios 280000 vertės. Kokia nominali palūkanų norma, jei palūkanos perskaičiuojamos kas mėnesį?

15. Nustatykite palūkanų nominaliąją normą, jei palūkanos perskaičiuojamos kas ketvirtį ir per devynerius metus ir šešis mėnesius 42000 sumos būsimoji vertė yra 100000.

16. Nustatykite tikslų laiko intervalą, kuriam laikotarpiui reikėtu kaupti pradinį kapitalą, kad esant 10% palūkanų normai kapitalo vertė padidėtų 175% , kai palūkanos perskaičiuojamos kas keturis mėnesius.

17. Nustatykite metinę paprastųjų palūkanų normą, kuri būtų ekvivalenti 14% metinei sudėtinių palūkanų normai, dešimties metų laikotarpyje. Kaip pasikeis ši norma jei sudėtinės 14% palūkanos bus perskaičiuojamos kas ketvirtį?

18. Raskite nominaliąją palūkanų normą, jei žinoma, kad palūkanos perskaičiuojamos kas mėnesį ir ši norma ekvivalenti 10%, dviejų metų laikotarpio paprastųjų palūkanų normai.

19. Nustatykite, kiek kartų per metus turi būti perskaičiuojamos sudėtinės palūkanos, kad 12% paprastosios palūkanos būtų ekvivalenčios 10% nominaliajai normai trejų metų laikotarpyje?

20. Raskite paprasto diskonto normą, jei žinoma, kad 10% nominali palūkanų norma, palūkanos perskaičiuojamos kas ketvirtį, yra ekvivalenti šiai diskonto normai 8 metų laikotarpyje.

21. Nustatykite paprastųjų palūkanų normą bazėje 365, 1.25 metų laikotarpyje, kuri būtų ekvivalenti paprastųjų palūkanų normai bazėje 330.

22. Nustatykite paprastųjų palūkanų normą bazėje 360, kuri būtų ekvivalenti paprastojo diskonto normai bazėje 340, $n = 120$ dienų laikotarpiui.

Pasikartokite sąvokas, mokėkite jas taikyti:

1) Palūkanų ir diskonto normos, perskaičiavimo ir diskonto periodai sudėtinių palūkanų atveju; 2) Faktinė palūkanų norma, diskonto norma , nominali palūkanų norma, diskonto daugiklis; 3) Būsimoji vertė, dabartinė (diskontuota) vertė sudėtinių palūkanų atveju; 4) Būsimosios ir dabartinės vertės skaičiavimo formulės, būsimosios ir dabartinės vertės skaičiavimas taikant tikslųjį metodą bei tolydžiai perskaičiuojant palūkanas; 5) Verčių lyginimas sudėtinių palūkanų atveju; 6) Efektyvioji palūkanų norma, ekvivalenčių palūkanų normų skaičiavimas.