III. MATRICOS. DETERMINANTAI

3.1 Matricos

Realiųjų skaičių lentelę

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

vadinsime $m \times n$ eilės matrica. Trumpai šią lentelę žymėsime taip:

$$A = \Big(a_{ij}\Big); (i = 1, \dots, m),\ (j = 1, \dots, n).$$

Kartais matricas žymėsime ir taip:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \dots \\ \alpha_m \end{pmatrix} = \big(\beta_1, \dots, \beta_n\big),$$

čia

$$\alpha_i;\ \ (i = 1, \dots, m)$$

yra $n-$ mačiai vektoriai eilutės, o

$$\beta_j;\ \ (j = 1, \dots, n)$$

yra $m-$ mačiai vektoriai stulpeliai.

Vektorius eilutė $\big(a_1, \dots, a_n\big)$ yra $1 \times n$, o stulpelis

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix} - \ m \times 1$$

eilės, matricos.

Matricą, kurios eilučių ir stulpelių skaičius vienodas, vadinsime kvadratine. Kvadratinės matricos eile vadinsime eilučių arba stulpelių skaičių.

Kvadratinės matricos elementai $a_{11}, a_{22} \dots, a_{nn}$ vadinami pagrindinės įstrižainės elementais, o elementai $a_{1n}, a_{2n-1} \dots, a_{n1}-$ šalutinės įstrižainės elementais.

Matricų aibėje, panašiai kaip ir vektorių aibėje, yra apibrėžiama transponavimo operacija. Tarkime, kad duota matrica

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Tada matricą

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

vadinsime, matricos A, transponuotąja matrica. Nesunku pastebėti, kad transponavimo operacija sukeičia pradinės matricos eilutes ir stulpelius vietomis. Taigi, jei pradinės matricos eilė $m \times n$, tai transponuotosios matricos eilė yra $n \times m$.

Kvadratinė matrica turinti savybę:

$$a_{ik} = a_{ki},\ i, j = 1, \dots, n$$

vadinama simetrine, o matrica, kurios elementams galioja sąryšiai

$$a_{ik} = -a_{ki},\ i, j = 1, \dots, n$$

vadinama asimetrine.

Matricą, kurios visi elementai lygūs nuliui, vadinsime nuline ir žymėsime simboliu O.

Kvadratinę matricą, kurios visi pagrindinės įstrižainės elementai lygūs vienam, o kiti elementai lygūs nuliui, vadinsime vienetine. Ją žymėsime simboliu E_n, kur indeksas apačioje reiškia matricos eilę, taigi

$$E_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

3.2 Matricų veiksmai

Aibę $m \times n$ eilės matricų, kurių elementai realūs skaičiai, žymėsime simboliu

$$\mathcal{R}_{m\times n} = \{(a_{ij}); (i = 1, \dots, m),\ (j = 1, \dots, n)\}.$$

Dvi tos pat eilės matricas vadinsime lygiomis, jeigu jų atitinkami elementai yra lygūs ir atvirkščiai, t.y. $(a_{ij}) = (b_{ij})$ tada ir tik tada, kai $a_{ij} = b_{ij}$.

Dviejų matricų $A = (a_{ij}),\ B = (b_{ij}) \in \mathcal{R}_{m\times n}$ suma vadinsime matricą $C = (c_{ij}) \in \mathcal{R}_{m\times n}$, kurios elementai nusakyti tokiu būdu:

$$(c_{ij}) = (a_{ik} + b_{ik});\ (i = 1, \dots, m),\ (j = 1, \dots, n).$$

Matricos $A = (a_{ij})$ ir realaus skaičiaus l sandauga vadinsime matricą

$$lA = (la_{ij});\ (i = 1, \dots, m),\ (j = 1, \dots, n).$$

Taigi, aibė $\mathcal{R}_{m\times n}$ yra uždara šios aibės elementų sudėties ir daugybos iš skaičiaus atžvilgiu. Nurodysime kai kurias matricų veiksmų savybes. Šias savybes įrodyti siūlome pačiam skaitytojui.

1) Matricų sudėtis yra komutatyvi sudėties atžvilgiu:

$$A + B = B + A.$$

2) Matricų sudėtis asociatyvi:

$$(A + B) + C = A + (B + C).$$

3) Matricinė lygtis

$$A + X = B$$

turi vienintelį sprendinį

$$X = (b_{ij} - a_{ij});\ (i = 1, \dots, m),\ (j = 1, \dots, n).$$

Nesunku matyti, kad $A + O = A,\ A + (-1)A = O$. Kitaip tariant, matricų aibėje galioja analogiška "kėlimo į kitą pusę keičiant ženklą priešingu" taisyklė, kaip ir skaičių aibėje.

4) Matricos ir realaus skaičiaus sandauga komutatyvi: $lA = Al$.

5) Tarkime, kad $l, t \in \mathcal{R}$ ir A, B kokios tai tos pačios eilės matricos. Tuomet teisingi sąryšiai:

a) $l\big(A + B\big) = lA + lB$,

b) $(l + t)A = lA + lB$,

c) $(lt)A = l\big(tA\big)$.

Tarkime, kad $A = \big(a_{ij}\big)$ yra $m \times s$ eilės, o $B = \big(b_{ij}\big)$ yra $s \times n$ eilės, matricos. Tada matricų A ir B sandauga, žymėsime AB, vadinsime matricą $C = AB = \big(c_{ij}\big)$; $(i = 1, \ldots, m)$, $(j = 1, \ldots, n)$, čia elementas c_{ij} skaičiuojamas tokiu būdu:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{s} a_{ik} b_{kj};\ (i = 1, \ldots, m), (j = 1, \ldots, n).$$

Taigi, norint apskaičiuoti matricos C elementą c_{ij} mums teks matricos A, $i-$ osios eilutės elementus, padauginti iš atitinkamų matricos B $j-$osios eilutės elementų, o po to visas sandaugas sudėti.

Iš paskutiniojo apibrėžimo aišku, kad daugybos operacija galima tik tarp matricų, kurios turi savybę: pirmojo daugiklio stulpelių skaičius yra lygus antrojo daugiklio eilučių skaičiui. Iš pastarųjų samprotavimų aišku, kad kvadratinių matricų aibė uždara ir daugybos atžvilgiu.

Daugyba priešingai negu sudėtis, bendrai paėmus, nėra komutatyvi t.y., $AB \neq BA$. Siūlome skaitytojui tuo įsitikinti, atlikus daugybos operaciją tarp dviejų, žemiau pateiktų matricų:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ ir } B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1 **Teorema** Bet kokiai $n-$os eilės matricai teisinga lygybė:

$$AE_n = E_n A = A.$$

Be to, vienetinė matrica yra vienintelė.

$\ominus$

Pažymėkime

$$\delta_{ik} = \begin{cases} 1, & k = j, \\ 0, & k \neq j. \end{cases}$$

Tuomet vienetinę $n-$ os eilė matricą galime pažymėti taip

$$E_n = \big(\delta_{ij}\big);\ (i = 1, \ldots, n),\ (j = 1, \ldots, n).$$

Ateityje kvadratinės matricos indeksų kitimo aibės nenurodysime, laikydami, kad $i, k, j \in \{1, \ldots, n\}$. Tad tarkime, kad $A = \big(a_{ik}\big)$.

Pažymėję $AE_n = \big(c_{ik}\big)$ turime, kad

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \delta_{jk} = a_{ik} \delta_{kk} = a_{ik};\ (i, k = 1, \ldots, n).$$

Antra vertus, pažymėję

$$E_n A = \big(d_{ik}\big)$$

turime, kad

$$d_{ik} = \sum_{j=1}^{n} \delta_{ij} a_{jk} = \delta_{ii} a_{ik} = a_{ik},\ (i, k = 1, \ldots, n).$$

Iš paskutiniųjų lygybių išplaukia pirmosios teoremos dalies įrodymas.

Parodysime, kad vienetinė matrica $n-$ os eilės matricų aibėje yra vienintelė.

Tarkime priešingai, t.y. egzistuoja kita matrica, pažymėkime ją $E = \big(e_{ij}\big)$ tokia, kad $AE = EA = A$. Pasirinkime matricą A taip, kad visi jos elementai būtų lygūs nuliui, išskyrus pagrindinės įstrižainės elementus t.y. $a_{ss} \neq 0$. Tuomet iš lygybės $AE = A$ gauname

$$a_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} e_{jk} = \begin{cases} a_{ii} e_{ik} = 0, \ i \neq k, \\ a_{ii} e_{ii} = a_{ii}, \ i = k. \end{cases}$$

Vadinasi, $e_{ik} = 0$ kai $i \neq k$ ir $e_{ii} = 1$. Antra vertus, iš lygybės $EA = A$ gauname

$$a_{is} = \sum_{j=1}^{n} e_{ij} a_{js} = \begin{cases} e_{ss} a_{is} = 0, \ i \neq s, \\ e_{ss} a_{ss} = a_{ss}, \ i = s. \end{cases}$$

Todėl $e_{is} = 0$, kai tik $i \neq s$. Imdami $s = 1, \ldots, n$, gauname, kad matricos E visi pagrindinės įstrižainės elementai yra vienetai, o likę - nuliai. O tai reiškia, kad $E_n = E$.

$\oplus$

2 **Teorema** Kvadratinių matricų daugyba yra asociatyvi, bei distributyvi, t.y.

$$\big(AB\big)C = A\big(BC\big) \text{ ir } A\big(B + C\big) = AB + BC.$$

$\ominus$

Pažymėkime, $AB = \big(l_{km}\big)$. Aišku, kad $l_{km} = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{kj} b_{jm}$. Tegu,

$$\big(AB\big)C = \big(d_{pq}\big).$$

Tuomet

$$d_{pq} = \sum_{j=1}^{n} l_{pj} c_{jq} = \sum_{j=1}^{n} \big(\sum_{t=1}^{n} a_{pt} b_{tj}\big) c_{jq} \tag{1}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \sum_{t=1}^{n} a_{pt} \big(b_{tj} c_{jq}\big).$$

Pažymėkime, $BC = \big(f_{km}\big)$. Taigi

$$f_{km} = \sum_{j=1}^{n} b_{kj} c_{jm}.$$

Be to, pažymėję

$$A\big(BC\big) = \big(g_{iq}\big) \text{ turėsime, } g_{iq} = \sum_{p=1}^{n} a_{ip} f_{pq} =$$

$$\sum_{p=1}^{n} a_{ip} \sum_{j=1}^{n} b_{pj} c_{jq} = \sum_{p=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ip} \big(b_{pj} c_{jq}\big)$$

Iš paskutinosios ir (1) lygybių išplaukia, kad kvadratinių matricų daugyba yra asociatyvi.

Distributyvumo savybę siūlome skaitytojui įrodyti savarankiškai.

$\oplus$

3 **Teorema** Bet kokios eilės matricų aibėje teisinga lygybė

$$\big(AB\big)^T = B^T A^T.$$

$\ominus$

Tarkime, kad matrica A yra $m \times s$ eilės, o matrica B yra $s \times n$ eilės. Pažymėkime

$$\big(AB\big)^T = D = \big(d_{ik}\big) \text{ ir } AB = C = \big(c_{ik}\big).$$

Atkreipsime dėmesį, kad $d_{ik} = c_{ki}$; $(i = 1, \ldots, n,\ k = 1, \ldots, m)$. Be to $c_{ki} = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{kj} b_{ji}$.

Dauginame matricas B^T ir A^T. Visų pirma pažymėkime

$$B^T A^T = \big(h_{ik}\big).$$

Tuomet

$$h_{ik} = \sum_{j=1}^{n} \overline{b}_{ij} \overline{a}_{jk} = \sum_{j=1}^{n} b_{ji} a_{kj},$$

čia $\overline{b}_{ik},\ \overline{a}_{ik}$ yra atitinkami matricų $B^T,\ A^T$ elementai. Gavome, kad $h_{ik} = d_{ik}$. Bet tai ir reikėjo įrodyti.

$\oplus$

4 **Teorema** Teisinga nelygybė

$$\text{rang (AB)} \le \min\{\text{rang } A, \text{rang } B\}.$$

$\ominus$

Tarkime, kad matricos $A = \big(a_{ij}\big)$ eilė yra $m \times s$, o matricos $B = \big(b_{jk}\big)$ eilė $s \times n$. Pažymėkime matricų A, B, ir AB rangus raidėmis r_A, r_B ir r, atitinkamai. Kadangi

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{s} a_{ik} b_{kj};\ (i = 1, \ldots, m),\ (j = 1, \ldots, n)$$

tai

$$\begin{pmatrix} c_{1j} \\ c_{2j} \\ \ldots \\ c_{mj} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum\limits_{k=1}^{s} a_{1k} b_{kj} \\ \sum\limits_{k=1}^{s} a_{2k} b_{kj} \\ \ldots \\ \sum\limits_{k=1}^{s} a_{mk} b_{kj} \end{pmatrix} =$$

$$\sum_{k=1}^{s} b_{kj} \begin{pmatrix} c_{1k} \\ c_{2k} \\ \ldots \\ c_{mk} \end{pmatrix},\ (j = 1, \ldots, n).$$

Iš paskutiniosios lygybės išplaukia, kad matricos AB stulpeliai yra matricos A stulpelių tiesiniai dariniai. Kadangi matricos A rangas lygus r_A, o visi matricos AB stulpeliai yra matricos A stulpelių tiesiniai dariniai, tai iš rango apibrėžimo išplaukia, kad bet kurie $r_A + 1$ matricos stulpeliai yra tiesiškai priklausomi. Taigi $r \le r_A$. Analogiškai

$$\big(c_{i1}, c_{i2}, \ldots, c_{in}\big) = \big(\sum_{k=1}^{s} a_{ik} b_{k1}, \sum_{k=1}^{s} a_{ik} b_{k2}, \ldots, \sum_{k=1}^{s} a_{ik} b_{kn}\big) =$$

$$\sum_{k=1}^{s} a_{ik} (b_{k1}, b_{k2}, \ldots, b_{kn});\ (i = 1, \ldots, m).$$

Paskutiniosios lygybės reiškia, kad matricos AB eilutės yra matricos B eilučių tiesiniai dariniai. Vadinasi, $r \le r_B$.

$\oplus$

3.3 Kvadratinių matricų determinantai

Pirmos eilės matricos (a) determinantu vadinsime skaičių a.

Antros eilės kvadratinės matricos

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

determinantu, kurį žymėsime tokiu būdu:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},$$

vadinsime skaičių

$$|A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Trečios eilės kvadratinės matricos

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

determinantu, kurį žymėsime

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

vadinsime skaičių

$$|A| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$

$$\big(a_{13}a_{22}a_{31} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{11}a_{23}a_{32}\big).$$

Tarkime, kad duota $n-$ os eilės kvadratinė matrica

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Tada šios matricos determinantą žymėsime simboliu

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Prieš nurodydami $n-$ os eilės determinanto skaičiavimo taisykles, pateiksime keletą savokų.

Apibrėžimas $n-$ os eilės matricos determinanto $|A|$ elemento a_{ij} minoru (žymėsime M_{ij}) vadinsime determinantą, kuris lieka iš šios matricos determinanto išbraukus į$-$ ąją eilutę bei $j-$ąjį stulpelį.

Pavyzdžiui

$$M_{11} = \begin{vmatrix} a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Apibrėžimas Matricos elemento a_{ij} adjunktu vadinsime skaičių

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

Tarkime, kad duota $n-$ os eilės matrica. Tada jos determinantu vadinsime skaičių

$$|A| = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} = a_{j1}A_{j1} + a_{j2}A_{j2} + \cdots + a_{jn}A_{jn},$$

$(j = 1, \ldots, n)$ jeigu jis egzistuoja. Beje, pastarosios lygybės vadinamos determinanto skleidimu pagal $j-$ąjį stulpelį arba $j-$ ąją eilutes, atitinkamai.

Šiuo "neefektyviu " apibrėžimu mes šiek tiek rizikuojame, kadangi neatsakome į klausimą ar šis apibrėžimas nėra tuščias ir antra, ar skaičiuojant visuomet reikia skaičiuoti sumas visiems $(j = 1, \ldots, n)$. Iš karto nuraminsime skaitytoją, patvirtindami, kad taip iš tiesų šis apibrėžimas yra turiningas ir kas svarbiausia, kad minimas skaičius iš ties yra vienintelis visiems $(j = 1, \ldots, n)$. Apie tai plačiau, jei skaitytojas susidomėtų, galima rasti A. Matuliauskas "Algebra" arba P. Survilos ir K. Bulotos knygoje "Algebra ir skaičių teorija".

Determinantų savybės.

1. Iš pastarojo apibrėžimo išplaukia, kad $|A| = |A^T|$.

2. Aišku, kad jei bent vienos determinanto eilutės arba stulpelio visi elementai lygūs nuliui, tai šis determinantas lygus nuliui.

3. Sukeitus determinanto eilutes vietomis, determinanto ženklas pasikeičia į priešingą, tačiau absoliuti jo reikšmė nesikeičia. Tai išplaukia iš tokių samprotavimų. Žinome, kad

$$|A| = a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + \cdots + (-1)^{1+n}a_{1n}M_{1n}.$$

Sukeitę determinanto eilutes vietomis, tarkime pirmąją su antrąja, ir skaičiuodami determinanto reikšmę pagal antrąją eilutę turime, kad

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$-a_{11}M_{11} + a_{12}M_{12} - \cdots + (-1)^n a_{1n}M_{1n}.$$

Tai ir įrodo nagrinėjamo teiginio teisingumą.

4. Jei determinantas turi bent dvi vienodas eilutes arba stulpelius tai jo reikšmė lygi nuliui. Pastarasis tvirtinimas yra tiesioginė 3. savybės išvada. Pastebėsime, kad sukeitę dvi vienodas eilutes vietomis gausime determinantą, kuris turi skirtis nuo pradinio ženklu, tačiau akivaizdu, kad tuo pat metu jo reikšmė turi būti tokia pat kaip ir pradinio (juk sukeitėme vienodas eilutes) determinanto. Vadinasi šijuo atveju lygybė galima vieninteliu atvejis, t.y. kai determinanto reikšmė lygi nuliui.

5. Iš determinanto eilutės (stulpelio) galime iškelti bendrą daugiklį. Tai išplaukia iš determinanto apibrėžimo.

6. Apibendrindami dvi paskutiniąsias savybes galime tvirtinti, kad jei determinantas turi dvi proporcingas eilutes (stulpelius), tai jo reikšmė lygi nuliui.

7. Jei vienos determinanto eilutės elementus padauginsime iš kitos eilutės adjunktų ir sudėsime, tai ši suma bus lygi nuliui, pavyzdžiui

$$a_{k1}A_{j1} + \cdots + a_{in}A_{jn} = 0.$$

Žinome, kad

$$|A| = a_{j1}A_{j1} + a_{j2}A_{j2} + \cdots + a_{jn}A_{jn}.$$

Užrašykime sumą

$$D = a_{k1}A_{j1} + a_{k2}A_{j2} + \cdots + a_{kn}A_{jn}.$$

Nesunku suprasti, kad paskutinioji suma reiškia determinantą, kurio $j-$ oji ir $k-$ oji eilutės sutampa. Bet žinome, kad toks determinantas lygus nuliui.

8. Jeigu determinanto kokią norw eilutę (stulpelį) padauginsime iš skaičiaus nelygaus nuliui ir sudėsime su kita eilute (stulpeliu) tai naujai gautas determinantas lygus pradiniam. Pastarasis tvirtinimas yra tiesioginė 6. savybės išvada. Siūloma ją patikrinti skaitytojui pačiam.

8. Paskutiniąją išvadą galime papildyti tokiu teiginiu: Jei determinanto kokia nors eilutė yra kitų eilučių tiesinis darinys, tai šis determinantas lygus nuliui.

Determinanto skaičiavimas remiantis jo savybėmis.

Determinanto eilučių (stulpelių) elemetariaisiais pertvarkiais vadinsime a) eilučių (stulpelių) keitimą vietomis, b) eilučių (stulpelių) dauginimą iš skaičiaus nelygaus nuliui ir c) eilučių (stulpelių) sudėtį. Remdamiesi aukščiau išvardintomis savybėmis galime tvirtinti, kad elementarieji pertvarkiai matricą keičia kita ir tokia, kad pradinės ir pakeistosios matricos determinantai sutampa.

Skaitytojui paliekame įsitikinti, kad matricos A determinantą visuomet galime perrašyti žemiau nurodytu būdu:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}. \tag{2}$$

3.4 Atvirkštinė matrica. Kramerio metodas

Apibrėžimas Sakysime, kad kvadratinė matrica yra reguliari, jeigu jos rangas lygus matricos eilei. Priešingu atveju sakoma, kad matrica singuliari.

Apibrėžimas Matricą A^{-1} vadinsime matricai A atvirkštine matrica, jeigu

$$A^{-1}A = AA^{-1} = E.$$

Taigi, norint rasti matricos atvirkštinę tenka spresti tokią lygčių sistemą:

$$\begin{cases} AX = E_n \, (1) \\ YA = E_n, \, (2) \end{cases} \tag{3}$$

čia X ir Y nežinomos matricos. Vadinasi, jei paskutiniosios lygčių sistemos sprendiniai sutampa, tai atvirkštinė egzistuoja. Pasirodo, kad teisinga tokia

5 **Teorema** Jeigu egzistuoja (3) sistemos bent vienos iš lygčių sprendinys, tai egzistuoja ir kitos lygties sprendinys. Dar daugiau, šie sprendiniai sutampa.

$\ominus$

Sakykime, kad egzistuoja (3) sistemos (1) lygties sprendinys $X = A'$. Padauginkime, iš matricos A', (2)- ąją šios sistemos lygtį iš dešinės. Gauname

$$YAA' = E_nA'.$$

Bet $AA' = E_n$ ir $YE_n = Y$. Taigi, $Y = A'$. Samprotaudami analogiškai galime parodyti, kad ir $X = A'$.

$\oplus$

Kyla klausimas, ar kiekviena matrica turi atvirkštinę?

6 **Teorema** Tam, kad matrica turėtų atvirkštinę būtina ir pakankama, kad ji būtų reguliari.

$\ominus$ Tarkime, kad atvirkštinė matrica egzistuoja. Žinome, kad matricos E_n rangas lygus n. Remdamiesi 4 teorema gauname, kad rang$(AA^{-1}) \leq$ rang$A$. Taigi, $n \leq$ rang$A$. Antra vertus, kvadratinės matricos rangas ne didesnis už jos eilę. Gauname, kad matricos A rangas lygus n, taigi, matrica A reguliari.

Įrodysime atvirkštinį teiginį. Tarkime, kad matricos A rangas lygus n. Matricinę lygtį $AX = E$ užrašykime taip:

$$\begin{pmatrix} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{1j}x_{j1} & \dots & \sum\limits_{j=1}^{n} a_{1j}x_{jn} \\ \dots & \dots & \dots \\ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{nj}x_{j1} & \dots & \sum\limits_{j=1}^{n} a_{nj}x_{jn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Naudodamiesi matricų lygybės apibrėžimu, pakeiskime pastarąją lygybę tokia lygčių sistema:

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_{jk} = 0; \ i \neq k, \ (i = 1, \dots, m), \\ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{kj}x_{jk} = 1; \ (k = 1, \dots, n). \end{cases} \tag{4}$$

Pastaroji sistema reiškia n tiesinių lygčių sistemų su n nežinomaisiais, aibę. Pastebėkime, kad visų šių sistemų koeficientų matricos sutampa ir lygios matricai A. Kadangi matricos A rangas yra lygus n, tai visos šios sistemos turi sprendinius, tarkime

$$\big(x_{j1}, x_{j2}, \dots, x_{jn}\big); \ \ (j = 1, \dots, n).$$

Šiuos sprendinius surašę į matricą ir turėsime ieškomąją atvirkštinę matricą.

$\oplus$

Atkreipsime skaitytojo dėmesį į tai, kad paskutinioji teorema pasiūlo metodą, kaip būtų galima apskaičiuoti matricos atvirkštinę. Bet šis metodas turi ir trūkumą, kadangi norint rasti, kad ir trečios eilės matricos atvirkštinę, tektų spręsti tris lygčių sistemas. Tačiau nėra to blogo kas neišeitų į gera! Prisiminkime modifikuotą Gauso metodą tiesinių lygčių sistemoms spręsti ir tai kas buvo aukščiau pasakyta. Visos mūsų lygčių sistemos turi tas pačias matricas ir sistemos skiriasi tik laisvųjų narių stulpeliais. O tai reiškia, kad visoms sistemoms atliekami tie patys eleminavimo žingsniai (suvedimas į trikampį pavidalą) skiriasi tik operacijų rezultatai atliekami su laisvųjų narių stulpeliais. Tikimės, kad skaitytojas nesunkiai supras, kad (4) sistemų visumą galime perrašyti taip:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots\dots & \dots & \dots & \dots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Kitaip tariant prie sistemų bendrosios matricos šalia prirašėme vienetinę matricą. Beje, kiekvienas vienetinės matricos stulpelis kartu su sistemos matrica nusako tam tikrą t.l. sistemą. Gautoji matrica yra $n \times 2n$ eilės. Jau žinome, kad eilučių elementariųjų pertvarkių dėka, pastarąją matricą galime pertvarkyti į tokią:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots\dots & \dots & \dots & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & 1 & c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix}.$$

Tada matricos A atvirkštinė yra tokia

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix}$$

(kodėl?).

7 **Teorema** Jeigu egzistuoja matricų A, ir B atvirkštinės matricos, tai egzistuoja ir jų sandaugos atvirkštinė, kuri skaičiuojama tokiu būdu:

$$\big(AB\big)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

$\ominus$

Patikrinkime, ar iš tiesų $B^{-1}A^{-1}$ yra matricos AB atvirkštinė. Taigi, pakanka suskaičiuoti

$$\big(AB\big)\big(B^{-1}A^{-1}\big) = A\big(BB^{-1}\big)A^{-1} = AA^{-1} = E_n.$$

$\oplus$

8 **Teorema** Jeigu egzistuoja matricos A atvirkštinė, tai egzistuoja ir jos transponuotosios matricos atvirkštinė. Be to, transponuotosios atvirkštinė yra lygi atvirkštinės transponuotąjai, trumpai

$$\big(A^T\big)^{-1} = \big(A^{-1}\big)^T.$$

$\ominus$

Aišku, kad

$$\big(AA^{-1}\big)^T = E_n^T.$$

Todėl $\big(A^{-1}\big)^T A^T = E_n^T = E_n$. Tuo ir baigiame teoremos įrodymą.

$\oplus$

9 **Teorema** Jei tiesinės lygčių sistemos matrica reguliari, tai jos sprendinys yra skaičiuojamas tokiu būdu:

$$X = A^{-1}\begin{pmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix},$$

arba

$$X^T = \big(b_1, \dots, b_n\big)\big(A^{-1}\big)^T,$$

čia

$$\beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix},$$

yra laisvųjų narių stulpelis.

$\ominus$

Nesunku suprasti, kad tiesinių lygčių sistemą, naudodami matricas, galime perrašyti taip

$$AX = \beta, \text{ kur } X \text{ nežinomųjų stulpelis.}$$

Kadangi matrica A reguliari, tai ji turi atvirkštinę. Iš čia ir išplaukia teoremos įrodymas.

$\oplus$

Pasirodo, matricos reguliarumas priklauso nuo to ar matricos determinantas nulis ar ne.

10 **Teorema** Matrica A yra reguliari tada ir tik tada, kai $|A| \neq 0$.

$\ominus$

Tarkime, kad matrica reguliari. Tuomet jos rangas lygus n. Dar daugiau, elementariųjų pertvarkių dėka, šią matricą galime transformuoti į matricą

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Jau žinome, kad paskutiniosios matricos determinantas yra lygus 1 (žr. (2) lygybę).

Įrodysime atvirkštinį teiginį. Tarkime, kad matricos determinantas nelygus nuliui. Elementariųjų pertvarkių pagalba matricos determinantą galime transformuoti į determinantą

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

kuris lygus pradinės matricos determinantui, beje, pagrindinės įstrižainės visi elementai nelygūs nuliui. Pastebėsime, kad paskutinįjį determinantą atstovaujanti matrica

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

reguliari, kadangi jos rangas lygus n.

$\oplus$

Išvada Jei matrica singuliari, tai jos determinantas lygus nuliui.

Remdamiesi paskutiniąja teorema, 6 teoremą perrašome taip:

11 **Teorema** Matrica A turi atvirkštinę tada ir tik tada, kai $|A| \neq 0$. Dar daugiau, atvirkštinė gali būti skaičiuojama tokios formulės pagalba

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

$\ominus$

Pirmoji teoremos dalis tiesioginė 10 teoremos išvada. Parodykime, kad pateiktoji matrica iš tiesų yra matricai A atvirkštinė. Tam pakanka parodyti, kad matricos A ir nurodytos matricos sandauga yra vienetinė matrica. Skaičiuokime:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$\Big(\frac{1}{|A|} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{kj} \Big) = \delta_{ik};\ (i, k = 1, \dots, n).$$

Iš paskutiniosios lygybės išplaukia, kad nurodyta matrica yra atvirkštinė.

$\oplus$

Tarkime, kad turime tiesinių lygčių sistemą

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i = b_j;\ (j = 1, \dots, n),$$

kurios matricos determinantas nelygus nuliui. Pastebėsime, kad pastarąją lygčių sistemą galime užrašyti matricine forma taip:

$$AX = \beta,\ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix},\ \beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Kadangi matricos determinantas nelygus nuliui, tai egzistuoja šios matricos atvirkštinė A^{-1}. (5) lygybės abi puses padauginę iš kairės iš atvirkštinės matricos gauname,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Antra vertus,

$$A^{-1} \begin{pmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} =$$

$$\frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} \sum\limits_{j=1}^{n} A_{j1} b_j \\ \dots \\ \sum\limits_{j=1}^{n} A_{jn} b_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Iš paskutiniosios lygybės išplaukia, kad

$$x_k = \frac{1}{|A|} \sum_{j=1}^{n} A_{jk} b_j =: \frac{|A_k|}{|A|}, \ k = 1, \dots, n. \tag{6}$$

Apibendrindami pastebėsime, kad $k-$ asis nežinomasis yra lygus t.l.sistemos matricos, kurios $k-$asis koeficientų stulpelis pakeistas laisvųjų narių stulpeliu, determinanto (kurį pažymėjome simboliu A_k) ir tiesinių lygčių sistemos matricos determinanto, santykiui, $k = 1, \dots, n$.

(6) formulės yra vadinamos Kramerio formulėmis lygčių sistemai spręsti.

Ir pabaigai pastebėsime, kad homogeninė t.l.s. turi nenulinį sprendinį tada ir tik tada, kai jos matricos determinantas yra lygus nuliui. Šios pastabos įrodymą paliekame skaitytojui.

3.5 Leontjevo modelis

Laikysime, kad gamybinę sistemą sudaro n ūkio subjektų, kuriuos pažymėkime simboliais $U_1, \dots, U_n$. Kiekvienas iš šių subjektų gamina kokią nors vieną produkcijos rūšį, P_j; $(j = 1, \dots, n)$. Gaminamos produkcijos kiekius pažymėkime $x_1, \dots, x_n$ atitinkamai. Tada vektorių

$$\alpha = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \text{vadinsime gamybos plano vektoriumi.}$$

Papildomai tarkime, kad gamybos technologija yra tokia, kad dalis gaminamos produkcijos yra sunaudojama vietinėms reikmėms. Tarkime, kad šie sunaudojami kiekiai yra $y_1, y_2, \dots, y_n$ atitinkamai. Tada

$$\beta = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}, \text{vadinsime produkcijos sanaudų vektoriumi.}$$

Skirtumą $\alpha - \beta = \gamma$ vadinsime grynosios produkcijos vektoriumi, t.y.

$$\gamma = \begin{pmatrix} x_1 - y_1 \\ x_2 - y_2 \\ \dots \\ x_n - y_n \end{pmatrix}.$$

Tarkime, kad minėtosios produkcijos poreikiai yra tokie $c_1, \dots, c_n$. Tada

$$\delta = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_n \end{pmatrix}, \text{ vadinsime paklausos vektoriumi.}$$

Atsakykime, į tokį klausimą: kada ekonominė sistema yra subalansuota, t.y. kada grynosios produkcijos kiekiai sutampa su paklausa? Kitaip tariant, kada $\gamma = \delta$?

Tarkime, kad produkcijos P_i vienetui pagaminti, kuris naudojamas ekonominės sistemos vidaus poreikiams, yra sunaudojama visos produkcijos P_j dalis a_{ij} čia $i, j = 1, \dots, n$. Skaičiai a_{ij} yra vadinami technologiniais koeficientais, o matrica

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

vadinama technologine matrica. Taigi, norint kad gamyba fukcionuotų, vidiniam vartojimui reikalingas toks produkcijos kiekis:

$$\beta = A\alpha.$$

Tada grynosios produkcijos vektorių galime išreikšti taip:

$$\gamma = \alpha - \beta = \alpha - A\alpha.$$

Prisiminkime, kad $\alpha = E_n\alpha$. Tada $\alpha - A\alpha = E_n\alpha - A\alpha = \big(E_n - A\big)\alpha$. Taigi, balanso lygtį $\gamma = \delta$ galime perrašyti taip

$$\big(E_n - A\big)\alpha = \delta.$$

Bet paskutinioji lygybė reiškia tokią lygčių sistemą:

$$\begin{cases} (1 - a_{11})x_1 - a_{12}x_2 - \dots - a_{1n}x_n = c_1, \\ -a_{21}x_1 + (1 - a_{22})x_2 - \dots - a_{2n}x_n = c_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ -a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 - \dots + (1 - a_{nn})x_n = c_n. \end{cases}$$

Galime padaryti tokią išvadą: norint sudaryti subalansuotą ekonominės sistemos gamybinės veiklos planą $\overline{\alpha}$, reikia išspręsti paskutiniąją lygčių sistemą. Pastarosios sistemos sprendinys ir galėtų būti laikomas planu $\overline{\alpha} = (\overline{x_1}, \dots, \overline{x_n})$, jeigu visos sprendinio komponentės $\overline{x_j}$, $(j = 1, \dots, n)$ yra neneigiamos. Neigiamos komponentės turėdamos matematinę prasmę, šia savybe nepasižymi ekonomikoje. Tad planas $\overline{\alpha}$ turi būti ne tik lygties $\big(E_n - A\big)\alpha = \delta$ sprendiniu, bet ir visos sprendinio komponentės turi būti neneigiamos. Apibendrinkime tai. Sakysime, kad ekonominė sistema, su technologine matrica A yra produktyvi, jeigu balanso lygtis $\big(E_n - A\big)\alpha = \delta$ turi sprendinį $\overline{\alpha}$, kurio visos komponentės neneigiamos, koks bebūtų produkcijos paklausos vektorius δ. Mes žinome, kad būtina ir pakankama balanso lygties sprendinio egzistavimo sąlyga yra tokia: balanso lygties matrica yra reguliari. Yra žinoma, kad

12 **Teorema** ekonominė sistema, kurios technologinė matrica A, yra produktyvi tada ir tik tada, kai atvirkštinė matrica $\big(E_n - A\big)^{-1}$ egzistuoja ir visi šios matricos elementai yra teigiami.

Ekonominės sistemos produktyvumo paieškos uždavinys yra vadinamas Leontjevo modeliu.

Aukščiau aptartas ekonominis modelis buvo išvystytas amerikiečių ekonomisto W. W. Leonteff. Technologinė matrica nurodo sąryšius tarp įvairių ekonominių subjektų per tam tikrą laiko momentą. Beje, šie sąryšiai yra išreikšti procentiniai santykiais. Kiek kitaip apžvelkime aukščiau formalizuotą ūkinę sistemą. Tarkime, kad ūkinę sistemą sudaro trys gamybiniai subjektai A, B, C kurie tuo pat metu yra ir gamintojai ir vartotojai. Be šių subjektų galimi ir kiti išoriniai vartotojai, nepriklausantys šiai gamintojų sistemai. Kita vertus be šių trijų gamintojų gali būti ir kiti šiai trijų gamintojų sistemai nepriklausantys gamintojai, beje šie gtamintojai savo produkciją siūlo vartotojams, bet subjektai A, B, C šios pagamintos produkcijos nevartoja. Vartotojų sektorius kaip ir gamintojų sektorius sutampa. Tai gali būti žemės ūkis, atskiro pramonės šakos, namų ūkis, vyriausybė ir kt. Aptartą modelį aprašome tokia matrica:

	A	B	C	KV
A	50	70	200	360
B	90	30	270	320
C	120	240	100	1050
KG	420	370	940	4960

čia KV- kiti vartotojai ir KG- kiti gamintojai. Matricos eilutėse nurodoma, kaip atitinkamų gamybinių subjektų produkcija yra vartojama kitų subjektų. Pavyzdžiui, gamybinio subjekto A 50 sąlyginių vienetų suvartoja pats subjektas A, 70 vienetų suvartoja subjektas B, 200 vienetus subjektas C ir $360-$ kiti vartotojai. Matricos stulpeliuose yra nurodoma kiek, kitų gamybos sektorių, produkcijos suvartoja fiksuotas sektorius. Pavyzdžiui subjektas B suvartoja 70 subjekto A produkto sąlyginių vienetų, 30- subjekto B (paties) vienetų, 240- subjekto C vienetų ir 370 kitų gamintojų gaminamos produkcijos vienetų. Jei nagrinėjama sistema subalansuota, tai eilutės bei atitinkamuose stulpeliuose bendra produktų vienetų suma turi sutapti. Atkreipsime dėmesį, kad pirmosios eilutės bei pirmojo stulpelio sumos lygios 680. Akivaizdu, kad padidinus vieno kurio nors subjekto gamybinius pajėgumus turi augti ir kitų subjektų gamybiniai pajėgumai, o tuo pačiu ir vartojimas ir atvirkščiai, jei ūkinė sistema yra subalansuota.

Pastebėsime, kad pateiktos ūkinės sistemos technologinė matrica yra tokia:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{5}{68} & \frac{7}{71} & \frac{20}{151} \\ \frac{9}{68} & \frac{3}{71} & \frac{27}{151} \\ \frac{12}{68} & \frac{24}{71} & \frac{10}{151} \end{pmatrix}.$$

Ūkinėje sistemoje yra gamintojai ir vartotojai. Beje, gamintojai tuo pačiu ir vartotojai. Technologinėje matricoje koeficientai nurodo kokią visos pagamintos produkcijos dalį suvartoja, gamybos procese, ūkinis subjektas. Atkreipsime dėmesį, kad KG (kiti gamintojai) tenkina tik ūkinės sistemos poreikius ir nedalyvauja išorinių poreikių tenkinimo procese. Vadinasi padidėjus vartojimui tuo pačiu turi didėti ir gamyba, tuo tarpu technologinės matricos koeficientai, esant subalansuotai ekonominei sistemai turi išlikti pastovūs, kadangi sąlyginiam vienetui pagaminti reikalinga kitų produktų dalis nepasikeičia. Tad galima teigti, kad technologinė matrica yra ūkinę sistemą charakterizuojantis dydis. Tad norint nustatyti gamybos lygį (planą), padidėjus vartojimui tereikia išspręsti balanso lygtį.

Panagrinėkime aptartą teorinę konstrukciją konkrečiu pavyzdžiu. Tarkime ūkinę sistemą sudaro du gamybiniai subjektai, o sistema aprašoma tokia matrica:

	A	B	Kiti poreikiai	*Galutiniai poreikiai*
A	240	500	460	1200
B	360	200	940	1500
Kiti gamybos faktoriai	600	800	–	
Bendra apimtis	1200	1500		

Matome, kad šios ūkinės sistemos produkcijos išoriniai poreikiai yra tokie: A produkcijos 460, o produkcijos $B-$ 940.

Sudarykime šios sistemos technologinę matricą. Turime, kad

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{3} \\ \frac{3}{10} & \frac{2}{15} \end{pmatrix}.$$

Tarkim, kad A produktų poreikis padidėjo nuo 460 iki 500, o produktų B poreikis nuo 940 iki 1200. Panagrinėkime kaip pasikeis gamybos apimtis.

Aišku, kad šiuo atveju atitinkamų gaminamų produktų skaičius (poreikis) X_A, X_B gali būti užrašytas tokiomis lygtimis:

$$X_A = \frac{1}{5}X_A + \frac{1}{3}X_B + 500;$$

$$X_B = \frac{3}{10}X_A + \frac{2}{15}X_B + 1200.$$

Užrašykime šią sistemą matricine lygtimi. Turime, kad

$$\begin{pmatrix} X_A \\ X_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{3} \\ \frac{3}{10} & \frac{2}{15} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X_A \\ X_B \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 500 \\ 1200 \end{pmatrix},$$

arba

$$X = A \cdot X + C, \quad X = \begin{pmatrix} X_A \\ X_B \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 500 \\ 1200 \end{pmatrix}.$$

Spręsdami šią matricų lygtį gauname plano lygtį:

$$X = (E - A)^{-1}C.$$

Tęsdami skaičiavimus gauname, kad

$$E - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{3}{10} & \frac{13}{15} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{1}{3} \\ \frac{3}{10} & \frac{2}{15} \end{pmatrix}.$$

$$(E - A)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{130}{89} & \frac{50}{89} \\ \frac{45}{89} & \frac{120}{89} \end{pmatrix}.$$

Tada

$$X = (E - A)^{-1}C = \begin{pmatrix} \frac{130}{89} & \frac{50}{89} \\ \frac{45}{89} & \frac{120}{89} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 500 \\ 1200 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1404.5 \\ 1871 \end{pmatrix}.$$

Sudarykime technologinę lentelę esant naujam gamybos planui. Turime, kad

	A	B	Kiti poreikiai	*Galutiniai poreikiai*
A	$280,9$	$623,6$	500	$1404,5$
B	$421,35$	$249,5$	1200	1871
Kiti gamybos faktoriai	$702,25$	$1003,1$	–	
Bendra apimtis	$1404,5$	1871		

3.6 Mažiausių kvadratų metodas

Tarkime, kad tiesinė lygčių sistema

$$AX = Y$$

yra nesuderinta. Tada tiesinė lygčių sistema

$$A^T AX = A^T Y$$

yra vadinama sistemos $AX = Y$ *normaliąja sistema.* Jei normalioji sistema yra suderinta, tai šios sistemos sprendiniai yra vadinami sistemos $AX = B$ mažiausių kvadratų sprendiniais.

Pavyzdys Tarkime plokštumoje duoti n taškų

$$(x_1, y_1); \ldots, (x_n, y_n).$$

Problema tokia: rasti $k-$ ojo laipsnio polinomą

$$y = a_k x^k + a_{k-1} x^{k-1} + a_1 x + a_0$$

"geriausiai" reprezentuojantį šiuos duomenis. Kitaip tariant rasime $k-$ ojo laipsnio polinomą tokį, kad atstumų nuo šių taškų iki polinomo grafiko kadratų suma būtų minimali.

Sudarome lygčių sistemą polinomo koeficientams rasti darydami prielaidą, kad šiam polinomui priklauso minėti taškai.

$$\begin{cases} a_k x_1^k + a_{k-1} x_1^{k-1} + a_1 x_1 + a_0 = y_1, \\ a_k x_2^k + a_{k-1} x_2^{k-1} + a_1 x_2 + a_0 = y_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_k x_n^k + a_{k-1} x_n^{k-1} + a_1 x_n + a_0 = y_n. \end{cases}$$

Užrašę matricų lygtimi turime, kad $AX = Y$, čia

$$A = \begin{pmatrix} x_1^k & x_1^{k-1} & \ldots & x_1 & 1 \\ x_2^k & x_2^{k-1} & \ldots & x_2 & 1 \\ .. & & & & \\ x_n^k & x_n^{k-1} & \ldots & x_n & 1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} a_k \\ a_{k-1} \\ \ldots \\ a_0 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \ldots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Įdomu tai, kad ši sistema, bendrai nagrinėjant, sprendinių neturi, kadangi laisvai pasirinkus taškus plokštumoje nereikia tikėtis, kad šie taškai priklausys polinomo grafikui. Sudarome šios sistemos normaliąją sistemą, kuri jau turės sprendinius, o sprendiniai kaip tik ir bus ieškomi polinomo koeficientai. Normalioji sistema yra tokia:

$$CX = A^T Y, \quad C = A^T A = \begin{pmatrix} x_1^k & x_2^k & \dots & x_n^k \\ x_1^{k-1} & x_2^{k-1} & \dots & x_n^{k-1} \\ \dots. \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1^k & x_1^{k-1} & \dots & x_1 & 1 \\ x_2^k & x_2^{k-1} & \dots & x_2 & 1 \\ .. \\ x_n^k & x_n^{k-1} & \dots & x_n & 1 \end{pmatrix}$$

Tada ieškomus koeficientus randame tokiu būdu:

$$\begin{pmatrix} a_k \\ a_{k-1} \\ \dots \\ a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} = C^{-1} A^T Y.$$

Panagrinėkime pavyzdį.

Pavyzdys Duoti trys taškai $(1,1)$; $(2,3)$; $(3,2)$. Naudodami mažiausių kvadratų metodą raskite tiesės lygtį $ax+b=y$ geriausiai aproksimuojančią šiuos duomenis.

Sudarome sistemą $AX = Y$, čia:

$$\begin{cases} a+b=1, \\ 2a+b=3 \\ 3a+b=2; \end{cases}$$

arba

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Padauginę abi lygybės puses iš matricos A^T gauname:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Atlikę matricų aritmetinius veiksmus gauname

$$\begin{pmatrix} 14 & 6 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Tada

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = C^{-1} \begin{pmatrix} 13 \\ 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ -6 & 14 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 13 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Arba

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

gauname, kad mažiausių kvadratų tiesė yra tokia:

$$y = \frac{1}{2}x + 1.$$

Temos teoriniai klausimai

1. Matricų veiksmai. Veiksmų savybės.
2. Kvadratinių matricų determinantai. Determinantų eilučių (stulpelių) savybės.
2. Reguliarios (siguliarios) matricos. Atvirkštinės matricos egzistavimo sąlygos.
3. Matricų lygtys.
4 Teorema apie matricų sandaugos rangą.
5. Tiesinių lygčių sistemų sprendimas taikant atvirkštinės matricos metodą ir Kramerio metodą.
6. Leontjevo modelis.
7. Mažiausių kvadratų metodas.

Uždaviniai savarankiškam darbui

Matricos ir determinantai

1. Duota matrica

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -2 & 14 & 6 \\ 6 & 2 & 3 & -2 \\ 5 & 4 & 1 & 0 \\ 8 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Nustatykite matricos eilę.
b) Kam lygi suma

$$a_{21} + a_{34} + a_{42} + a_{33}?$$

c) Raskite šios matrios pagrindinės ir šalutinės įstrižainių elementų skirtumą.

Ats: a) matricos eilė 4×4 arba tiesiog ketvirtos eilės matrica.
b) 7.
c) -11.

2. Tarkime, kad matrica A yra 3×4 eilės, kurios elementai apibrėžti tokiu būdu:

$$A = \left(a_{ij}\right); \quad a_{ij} = (-1)^{i+j}(2i + 3j).$$

Sudarykite šią matricą.

Ats:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -8 & 11 & -14 \\ -7 & 10 & -13 & 16 \\ 9 & -12 & 15 & -18 \end{pmatrix}$$

3. Kompanija parduoda trijų rūšių kilimėlius A, B, C, kurie be to yra raudonos, žalios, mėlynos bei violetinės spalvos. Mėnesio pardavimų ataskaitą kompanija surašo į matricą, kurios eilutėse rašo atitinkamų rūšių A, B, C pardavimų kiekius, o stulpeliuose nurodo spalvos kodą- raudoną, žalią, mėlyną, violetinį, atitinkamai. Žemiau yra pateiktos Sausio bei Vasario pardavimų ataskaitos:

$$S = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 7 & 6 & 0 \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & 4 \\ 2 & 3 & 3 & 2 \\ 4 & 0 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

a) Kiek žalių B rūšies kilimėlių buvo parduota Sausio mėnesį?
b) Kiek B rūšies kilimėlių buvo parduota vasario mėnesį?

c) Kurį mėnesį buvo daugiausia parduota violetinių kilimėlių?

d) Kurios rūšies ir kurios spalvos kilimėlių buvo parduota vienodai per abu mėnesius?

e) Kurį mėnesį daugiausia parduota B rūšies kilimėlių?

f) Kiek iš viso buvo parduota kilimėlių sausio mėnesį?

g) Sudarykite abiejų mėnesių pardavimų matricą G.

h) Raskite metinių pardavimų matricą M, jei žinoma, kad ji sudaroma tokiu būdu: 100% didesni visų rūšių ir spalvų sausio pardavimai plius 200% didesni vasario mėnesio pardavimai.

Ats: a) 7; b) 3; c) $Vasario$; d) B; mėlyni e) $Vasario$; f) 35; g)

$$G = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 6 & 7 \\ 6 & 7 & 8 & 6 \end{pmatrix}.$$

h)

$$S = \begin{pmatrix} 4 & 18 & 14 & 16 \\ 6 & 11 & 15 & 16 \\ 16 & 14 & 18 & 18 \end{pmatrix}.$$

4. Apskaičiuokite AB, BA bei, jei įmanoma $AB - BA$, kai

$$\text{a)} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 5 & -7 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{b} \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$\text{c)} \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Įsitikinkite, kad

$$(AB)^T = B^T A^T.$$

Ats: a) *skirtumas* negalimas b)

$$\text{b)} \quad AB - BA = \begin{pmatrix} -4 & -5 \\ -19 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{b)} \quad AB - BA = \begin{pmatrix} 4 & 22 & -9 \\ -1 & -5 & -8 \\ 3 & 12 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. Jei įmanoma apskaičiuokite sandaugas AB, kai

$$a) \; A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ -1 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 1 & -4 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix};$$

$$b) \; A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix};$$

$$c) \; A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

$$d)\ \ A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -4 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 5 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix};$$

Ats: a) sandauga negalima. $b)$ (32).

$$\text{c)}\ \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 12 \\ 3 & 18 \end{pmatrix} \qquad \text{d)}\ \begin{pmatrix} 16 & -3 & 11 \\ 10 & -1 & 0 \\ -7 & -4 & 10 \end{pmatrix}$$

6. Apskaičiuokite $A(BC)$ jei

$$a)\ \ A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Įsitikinkite, kad $A(BC) = (AB)C$.

Ats:

$$\begin{pmatrix} -4 & -9 \\ 6 & 19 \end{pmatrix}.$$

7. Apskaičiuokite $A(B + C)$ jei

$$a)\ \ A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Įsitikinkite, kad $A(B + C) = AB + BC$.

Ats:

$$\begin{pmatrix} -4 & 1 \\ -5 & 17 \end{pmatrix}.$$

8. Raskite matricą $3(A - 2I)$, jei I vienetinė antros eilės matrico, o

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Ats:

$$3(A - 2I) = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

9. Tarkime, kad duotos matricos:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix},\quad B = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \end{pmatrix},\quad C = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix},\quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$F = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \end{pmatrix},\ ,\quad G = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

$$H = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix},\quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Atlikite tokius matricų veiksmus:

a) AB; b) CF; c) DG; d) EC;
e) $DI - \frac{1}{3}G$; f) $3A - 2BC$; g) $2I - \frac{1}{2}GH$; h) $(DC)A$.

Ats:

$$\text{a)} \begin{pmatrix} -4 & 11 & -2 \\ 3 & -12 & 3 \end{pmatrix}, \quad \text{b)} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad \text{c)} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 3 \\ 3 & 12 & 3 \end{pmatrix}. \quad \text{d)} \begin{pmatrix} 7 \\ 23 \end{pmatrix},$$

$$\text{e)} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}; \quad \text{f)} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\text{g)} \begin{pmatrix} -1 & -20 \\ -2 & 23 \end{pmatrix} \qquad \text{h)} \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}; \quad \text{g)} \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 2 & 17 \\ 1 & 31 \end{pmatrix}.$$

10. Remiantis sutartimi firma privalo pastatyti 5 rastinius (RA), 7 karkasinius (KA) bei 12 mūrinių (MU) namų. Šią sutartį galima apibrėžti matrica $A = (5 \quad 7 \quad 12)$. Šiems pastatams pastatyti reikia metalo (M), medienos (W), stiklo (S), gipso gaminių (G), darbo jėgos (D). Trumpiniais žymime atitinkamų poreikių vienetų skaičių. Susiekime kiekvieną pastatą su medžiagų poreikiais tokia matrica

	M	W	S	G	D
RA	5	20	16	7	17
KA	7	18	12	9	21
MU	6	25	8	5	13

a) Apskaičiuokite visų medžiagų bendruosius poreikius.
b) Nustatykite kiekvieno namo bendrąją sąmatinę vertę, jeigu M vienetas kainuoja 1500 Lt, W- 800 Lt, S- 500 Lt,G- 100 Lt, D-1000 Lt.
c) Nustatykite visų namų bendrąsias statybos išlaidas.

Ats: a) 146 526 260 158 388; b) 49200 52800 46500 c) 1173600.

11. Panagrinėkime supaprastintą ekonominę sistemą, kurią sudaro trys pramonės šakos, tarkime žemės ūkis (Z), pramonė (P) bei aptarnavimo sfera (A) bei trys sąlyginiai vartotojai $1, 2, 3$. Nesunku suprasti, kad ne tik išoriniai vartotojai, bet ir šios atskiros pramonės šakos gali būti kitų šakų produktų vartotojai. Šiuo atveju laikome, kad pramonės šaka nėra savo produkcijos vartotoja, bet nesunju suprast, kad bendrai paėmus taip galėtų būti. Tegu D_1, D_2, D_3- yra trijų vartotojų poreikių matricos, o D_Z, D_P, D_A- yra pramonės šakų 1×3 eilės vartojimo matricos. Pavyzdžiui tarkime, kad

$$D_1 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}, \quad D_2 = (0 \quad 17 \quad 1), \quad D_3 = (4 \quad 6 \quad 12)$$

ir

$$D_Z = (0 \quad 1 \quad 4), \quad D_2 = (20 \;\; 0 \;\; 8), \quad D_3 = (30 \;\; 5 \;\; 0).$$

Tarkime, kad sąlyginis žemės produkcijos kainuoja 10000 Lt, pramonės- 20000 Lt, o aptarnavimo sferos - 40000LT.

a) Nustatykite bendrą visų pramonės šakų gaminamos produkcijos poreikių matricą.

b) Nustatykite kokias išlaidas turi kiekviena atitinkama ūkio šaka bei atitinkami išoriniai vartotojai esant nurodytoms sąlyginių vienetų kainoms bei pirkimų kiekiams;

c) Nustatykite kiekvienos pramonės šakos gautą pelną.

Ats:

$$\text{a)} \quad \begin{pmatrix} 57 & 31 & 30 \end{pmatrix}; \quad \text{b)} \quad \begin{pmatrix} 180000 & 520000 & 400000 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 270000 & 380000 & 640000 \end{pmatrix},$$

$$\text{c)} \quad \begin{pmatrix} 390000 & 100000 & 800000 \end{pmatrix}.$$

12. Apskaičiuokite $AX + B - C$, kai

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad X = \frac{1}{9} \cdot \begin{pmatrix} 12 & -27 & 11 \\ -3 & 18 & -5 \\ -6 & -5 & -7 \end{pmatrix}.$$

Ats: a) $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

13. a) Raskite visas antros eilės matricas, kurių kvadratas yra lygus nulinei matricai. b) Raskite visas antros eilės matricas, kurių kvadratas lygus vienetinei matricai.

Ats: a)

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \sqrt{ab} & a \\ -b & -\sqrt{ab} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -\sqrt{ab} & a \\ -b & \sqrt{ab} \end{pmatrix}.$$

b)

$$\begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ a & \pm 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \pm 1 & a \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}.$$

14. Raskite pateiktų matricų atvirkštines, naudodami Gauso-Žordano metodą, jeigu egzistuoja:

$$\text{a)} \; A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 3 & 2 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \quad \text{b)} \; B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \\ 5 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{c)} \; C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ats:

$$\text{a)} \; A^{-1} = -\frac{1}{44} \cdot \begin{pmatrix} 10 & -14 & -6 \\ -12 & 8 & 16 \\ -7 & 1 & -9 \end{pmatrix}; \quad \text{b)} \; B^{-1} = -\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 17 & -9 & -3 \\ -7 & 12 & 4 \\ -10 & 0 & 9 \end{pmatrix};$$

$$\text{c)} \; C^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & -5 \\ -6 & 2 & 4 & 10 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

15. Išspręskite matricų lygtį $AX = B$, naudodami Gauso-Žordano metodą:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}; \ B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ats:

$$X = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 22 & -6 & 5 \\ -31 & 13 & -5 \\ -6 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

16. Apskaičiuokite determinantus:

$$a) \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 3 & 2 \\ -1 & -2 & 2 \end{vmatrix}; \ b) \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \\ 5 & 0 & 2 \end{vmatrix}; \ c) \begin{vmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

$$d) \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 & 9 \\ -5 & 6 & 10 & -11 \\ 0 & 0 & 4 & -7 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \end{vmatrix}; \ e) \begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 3 & 2 \end{vmatrix}; \ f) \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 4 & 2 & 3 \\ 5 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 4 & 2 & 35 \end{vmatrix}.$$

Ats: a) -44; b) -2 c) 47. d) -351; e) 33 f) 24.

17. Apskaičiuokite determinantus:

$$a) \begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 & 6 & 2 \\ 1 & 3 & 5 & 6 & 2 \\ -2 & 4 & 10 & -3 & 4 \\ -4 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ -2 & -3 & 6 & -6 & -2 \end{vmatrix}; \ b) \begin{vmatrix} 4 & 2 & 0 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 3 & 2 & 4 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 2 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 3 & 5 \\ 4 & 2 & 3 & 4 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Ats: a) 106; b) -108

18. Apskaičiuokite matricos atvirkštinę, naudodamiesi atvirkštinės matricos skaičiavimo formule (naudojant adjunktus):

$$a) \ A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \ b) \ B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ -3 & 2 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ats:

$$\text{a)} \ A^{-1} = -\frac{1}{11} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -5 & -2 \\ -3 & 4 & 6 \\ 2 & 4 & -5 \end{pmatrix}; \qquad \text{a)} \ B^{-1} = \frac{1}{8} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -4 & 0 & 0 & 4 \\ -2 & 2 & -5 & 3 \\ 10 & -2 & 9 & -7 \end{pmatrix}.$$

19. Išspręskite pateiktas matricų lygtis:

$$\text{a)} \ AB^2XA^{-2} + B = E, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$\text{b)}\ B^{-2}ABXB^{-1}A = E, \quad A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$\text{c)}\ AX + B = C, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \ .$$

Ats:

$$\text{a)}\ X = B^{-2}A^{-1}(E - B)A^2 = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 12 & 8 \\ -7 & -6 \end{pmatrix}.$$

$$\text{b)}\ X = B^{-1}A^{-1}B^2A^{-1}B = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} -58 & -169 \\ 34 & 99 \end{pmatrix}.$$

$$\text{c)}\ X = A^{-1}(C - B) = -\frac{1}{10} \cdot \begin{pmatrix} -6 & 7 & 23 \\ 12 & 6 & -16 \\ 2 & 11 & 9 \end{pmatrix}.$$

20. Naudodami Kramerio metodą apskaičiuokite:

$$a)\ \begin{cases} 2x + 3y = -11, \\ 3x - 4y = 9, \end{cases} \qquad b)\ \begin{cases} 4x + 2y - z = 5, \\ x - 3y + 8z = -7, \\ -5x - y + z = -6; \end{cases}$$

$$c)\ \begin{cases} 4x + y - 3z = 3, \\ x - 3y + 5z = 0, \\ 7x + 3y - 9z = -4; \end{cases} \qquad d)\ \begin{cases} 4x + 2y - z + t = 11, \\ 2x - y + 8z - 1 = 9, \\ -5x + 13y + 2z - 4t = -3, \\ x + y + 3z + t = 8. \end{cases}$$

Ats: a) $(-1, -3)$; b) $(1, 0, -1)$; c) $(1, 2, 1)$; d) $(2, 1, 1, 2)$.

21. Naudodami Kramerio metodą nustatykite, kokios turi būti parametrų m, n reikšmės, kad sistema

$$1)\ \begin{cases} 3x - 2y + z = -2, \\ x - y + 4z = n, \\ 5x + my - 2z = -3; \end{cases}$$

turėtų a) vieninteli sprendinį, b) neturėtų sprendinių, c) turėtų begalo daug sprendinių?

Ats: a) $m \neq -3$; b) $m = -3,\ n \neq -1$; c) $m = -3,\ n = -1$.

22. Kokia turi būti parametro reikšmė, kad sistema turėtų vieninteli sprendinį

$$2)\ \begin{cases} x + y + z + mu = 5, \\ x + y + mz + u = 1, \\ x + my + z + u = 1, \\ mx + y + z + u = 1. \end{cases}$$

Ats: $m \neq 1$.

23. Tarkime, kad ekonominę sistemą sudaro du gamintojai. Jų produkcijos paklausos matrica ir technologinė matrica, atitinkamai, yra tokie

$$a)\ C = \begin{pmatrix} 560 \\ 780 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0.7 & 0.2 \\ 0.3 & 0.5 \end{pmatrix};$$

$$b)\ C = \begin{pmatrix} 520 \\ 640 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0.7 & 0.5 \\ 0.2 & 0.4 \end{pmatrix}.$$

Ar egzistuoja gamybos optimalus planas? Jei taip raskite šį planą. Sudarykite su 6iuo planu susietą technologinę lentelę.

Ats: a) $\begin{pmatrix} 4844 \\ 4466 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 7900 \\ 3700 \end{pmatrix}$.

24. Tarkime, kad ekonominės sistemos gamintojų technologinės ir atitinkamos poreikių matricos yra tokios:

$$a)\ A = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0.5 & 0 & 0.425 \\ 0 & 0.75 & 0.5 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 100 \\ 200 \\ 300 \end{pmatrix};$$

$$b)\ A = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.1 & 0.2 \\ 0.1 & 0.4 & 0.1 \\ 0.2 & 0.2 & 0.6 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 200 \\ 300 \\ 400 \end{pmatrix}.$$

Raskite gamybos planus esant nurodytiems poreikiams. Sudarykite technologines lenteles, kurios būtų susietos su naujais poreikiais.

Ats:)

$$a)\ X = \frac{3}{4} \cdot \begin{pmatrix} 87000 \\ 78000 \\ 72000 \end{pmatrix} \quad b)\ X \approx \begin{pmatrix} 2222 \\ 1333 \\ 2777 \end{pmatrix}.$$

25. Tarkime, kad ūkinę sistemą sudaro du gamintojai, A ir B. Gamybos ryšių matrica apibrėžta tokiu būdu:

	A	B	Kiti poreikiai	*Galutiniai poreikiai*
A	200	500	500	1200
B	400	200	900	1500
Kiti gamybos faktoriai	600	800	–	
Bendra apimtis	1200	1500		

Raskite šios ūkinės sistemos technologinę matricą. Raskite ūkinių šakų A ir B pagamintos produkcijos kiekius X_A ir X_B (gamybos planą), jei žinoma, kad produkcijos A poreikiai pakis nuo 500 iki 600, o produkcijos B poreikiai pakis nuo 900 iki 805. Raskite KG (kitos gamybos faktorių) kaštus K.

Ats: a) $X_A \approx 1290$, $X_B \approx 1425$. $K = 1405$.

26. Tarkime, kad ūkinę sistemą sudaro trys gamintojai, A B ir C. Gamybos ryšių matrica apibrėžta tokiu būdu:

	A	B	C	Kiti poreikiai
A	18	30	45	15
B	27	30	60	3
C	54	40	60	26
Kiti gamybos faktoriai	9	20	15	–

Raskite šios ūkinės sistemos technologinę matricą. Raskite ūkinių šakų A, B ir C pagamintos produkcijos kiekius X_A ir X_B, X_C (gamybos planą), jei žinoma, kad

a) produkcijos A poreikiai pakis iki 50, produkcijos B poreikiai pakis iki 40 ir produkcijos C poreikiai pakis iki 30.

b) produkcijos A poreikiai pakis iki 10, produkcijos B poreikiai pakis iki 10 ir produkcijos C poreikiai pakis iki 24.

Ats: a) $X_A \approx 298, \quad X_B \approx 350, \quad X_C \approx 443;$
b) $X_A \approx 102, \quad X_B \approx 125, \quad X_C \approx 175.$

27. Užpildykite matricas taip, kad ūkinė sistema būtų subalansuota
a)

	A	B	Kiti poreikiai	*Galutiniai poreikiai*
A	400	y	300	1400
B	400	600	x	1500
Kiti gamybos faktoriai	600	800	–	
Bendra apimtis	1400	1500		

Ats: a) $x = 500, \quad y = 700$

28. Naudodami mažiausių kvadratų metodą (matricinę formą) raskite lentelėje pateiktus taškus geriausiai aproksimuojančią tiesinės regresijos lygtį:

x	0	1	2	3	4	
y	1	3	7	5	0	

Ats: $y = \frac{16}{5}$.

29. Naudodami mažiausių kvadratų metodą, raskite kvadratinės regresijos lygtį, jei duomenų aibė tokia: $(1;3),\ (2;3),\ (3;7),\ (-1;2),\ (-2;8)$.

Ats:

$$y = \frac{141}{154}x^2 - \frac{144}{154}x + \frac{259}{154}.$$

30. Naudodami mažiausių kvadratų metodą, raskite kvadratinės regresijos lygtį, jei duomenų aibė tokia: $(-1;0)$, $(-2;4)$, $(0;-2)$, $(1;4)$, $(2;1)$.

Ats:

$$y = \frac{12}{7}x^2 - \frac{1}{5}x - \frac{71}{35}.$$

Užduotys namų darbams

Matricos ir determinantai

1. Apskaičiuokite $AB - BA$, kai

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 4 \\ 5 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 5 & 6 & -2 \\ 3 & -2 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

2. Išsprendę lygtį$A + B + X = 2B - \frac{1}{2}A$, apskaičiuokite matricos X determinantą, jei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

3. Apskaičiuokite visas įmanomas matricų sandaugas, kai

$$a)\;\; A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ -1 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 1 & -4 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}; \; C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \; D = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 1 & -4 & 4 \end{pmatrix}.$$

4. Apskaičiuokite matricos X^2 determinantą, jei $A^2 - 2X = AB^2$, kai

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

5. Išspręskite matricų lygtis:
1) $A^2BXAB^{-1} = ABA$, kai

$$1) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}; \; B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

2) Raskite $|X^{-2}|$, jei $BA^{-1}XABA + B = A$, kai

$$2) \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}; \; B = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

6. Apskaičiuokite determinantus:

$$a) \begin{vmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 6 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}; \; b) \begin{vmatrix} 3 & 4 & 6 & 8 \\ 5 & 5 & 3 & 2 \\ 7 & 7 & 3 & 7 \\ 3 & 4 & 5 & 5 \end{vmatrix}; \; c) \begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 4 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}.$$

7. Apskaičiuokite matricos atvirkštinę, naudodamiesi atvirkštinės matricos skaičiavimo formule (naudojant adjunktus):

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & -5 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix}, \ b) \ \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

8. Apskaičiuokite matricos atvirkštinę, naudodamiesi Gauso-Žordano būdu:

$$a) \ \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & -10 \end{pmatrix}, \ b) \ \begin{pmatrix} 6 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 3 & 2 \\ 5 & 2 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

9. Naudodami Kramerio metodą apskaičiuokite:

$$a) \ \begin{cases} 2x + y + z = 7, \\ 4x + 3y + 2z = 16, \\ 2x - y - 3z = -9; \end{cases} \qquad b) \ c) \ \begin{cases} 2x + 3y + 2z + t = 6 \\ x + 4y + 3z + 2t = 8, \\ 4x + 2y + z + t = 7, \\ x + 2y + 3z + t = 6. \end{cases}$$

10. Duota gamybos- sąnaudų matrica. Raskite ūkinės sistemos technologinę matricą bei gamybos planą, kai esami galutiniai atitinkamų šakų poreikiai pasikeis į poreikius 200, 300.

	A	*B*	*Poreikiai*
A	40	120	40
B	120	90	90
Kiti Faktoriai	40	90	

Sudarykite naują gamybos sąnaudų matricą, kai poreikiai yra pakitę.

11. Duota gamybos- sąnaudų matrica. Raskite ūkinės sistemos technologinę matricą bei gamybos planą, kai esami galutiniai atitinkamų šakų poreikiai pasikeis į poreikius 50, 40, 30.

	A	*B*	*C*	*Poreikiai*
A	18	30	45	15
B	27	30	60	3
C	54	40	60	26
Kiti Faktoriai	9	20	15	

Sudarykite naują gamybos sąnaudų matricą, kai poreikiai yra pakitę.

12. Duota gamybos- sąnaudų matrica. Raskite ūkinės sistemos technologinę matricą bei gamybos planą, kai esami galutiniai atitinkamų šakų poreikiai pasikeis į poreikius 500, 160, 240.

	A	B	C	$Poreikiai$
A	100	400	240	260
B	100	80	480	140
C	300	160	240	500
Kiti Faktoriai	500	160	240	

Sudarykite naują gamybos sąnaudų matricą, kai poreikiai yra pakitę.

13. Naudodami mažiausių kvadratų metodą (matricinę formą) raskite lentelėje pateiktus taškus geriausiai aproksimuojančią tiesinės regresijos lygtį:

x	1	3	4	6	7	
y	1	6	5	4	8	

14. Tarkime, kad y yra produkto vieneto vidutiniai kaštai, kai buvo pagaminta x produktų. Lentelėje žemiau pateikiami vidutinių kaštų bei pagamintos produkcijos kiekio priklausomybė. Radę kvadratinę regresijos lygtį nustatykite, kokie apytiksliai kaštai buvo tuo atveju, kai buvo gaminami 7 produktai.

x	3	4	6	8	
y	10	8	6	8	