**Vilniaus universitetas**

**Matematikos ir Informatikos fakultetas**

**Gintautas Bareikis**

# Aukštoji matematika

## Tiesinė algebra ir analizinė geometrija

Paskaitų ciklas (2+2) skirtas ekonomikos specialybės studentams

Vilnius 2010

## TURINYS

# I. TIESINIŲ LYGČIŲ SISTEMOS

## 1.1 Tiesinių lygčių sistemos. Elementarieji pertvarkiai

Keletas svarbių žymėjimų:

$$a_1 + a_2 + a_3 = \sum_{k=1}^{3} a_k, \quad a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k,$$

čia $n$ natūralusis skaičius. Apibendrinkime šiuos žymėjimus

$$\sum_{k=n}^{m} a_k = \begin{cases} a_n + a_{n+1} + \cdots + a_m, \text{kai } m > n, \\ a_n, \text{kai } m = n, \\ 0, \text{kai } m < n. \end{cases}$$

Ateityje raidėmis $\mathcal{N}$, $\mathcal{Z}$, $\mathcal{Q}$, $\mathcal{R}$ žymėsime natūraliųjų, sveikųjų, racionaliųjų, bei realiųjų skaičių aibes.

**Apibrėžimas** Tiesine lygtimi (toliau trumpinsime t.l.) su $n$ nežinomųjų vadinsime lygybę:

$$\sum_{j=1}^{n} a_j x_j = b, \tag{1}$$

čia $a_j, b \in \mathcal{R}$. Skaičiai $a_j$, $(j = 1, \ldots, n)$ vadinami lygties koeficientais, skaičius $b-$ lygties laisvuoju nariu, $x_j$ $(j = 1, \ldots, n)-$ lygties nežinomaisiais.

**Apibrėžimas** Racionaliųjų skaičių rinkinį $(l_1, \ldots l_n)$ vadinsime t. l. sprendiniu, jeigu

$$\sum_{j=1}^{n} a_j l_j \equiv b.$$

Kitaip tariant, minėtasis rinkinys vadinamas t.l. sprendiniu, jeigu (1) lygtyje, nežinomųjų vietoje, įrašę šio rinkinio atitinkamus narius gauname tapatybę (abiejose lygybės pusėse tą pačią skaitinę reikšmę).

Sakysime, kad du t.l. sprendiniai $(l_1, l_2, \ldots, l_n)$ ir $(t_1, t_2, \ldots t_n)$ yra lygūs, jeigu $l_j = t_j$ $(j = 1, \ldots, n)$. Nesunku matyti, kad jei $a_j = 0$, $(j = 1, \ldots, n)$ ir $b \neq 0$, tai (1) lygtis sprendinių neturi.

**Apibrėžimas** Tiesinę lygtį, kurios laisvasis narys lygus nuliui, vadinsime homogenine. Pastebėsime, kad homogeninė lygtis visuomet turi sprendinį.

**Apibrėžimas** Tiesinių lygčių aibę:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{2}$$

vadinsime $m$ tiesinių lygčių, su $n$ nežinomaisiais, sistema (trumpai t.l.s.). Simbolius $a_{ij} \in \mathcal{R}$ vadinsime t.l.s-mos koeficientais, $b_i \in \mathcal{R}-$ t.l.s-mos laisvaisiais nariais, $x_{ij}-$ t.l.s-mos nežinomaisiais, $(i = 1, \ldots, m)$, $(j = 1, \ldots, n)$.

(2) lygčių sistemą galime užrašyti ir tokiu būdu:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \ (i = 1, \ldots, m).$$

Sakysime, kad t.l.s. yra homogeninė, jeigu $b_i = 0$, $(i = 1, \ldots, m)$.

**Apibrėžimas** Skaičių rinkinį $(l_1,\ldots,l_n)$ vadinsime t.l.s-mos (2) sprendiniu, jeigu teisingos tapatybės:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}l_j \equiv b_i (i = 1,\ldots,m).$$

**Apibrėžimas** Jeigu t.l.s- os sprendinių aibė netuščia, tai šią sistemą vadinsime suderinta. Kitu atveju, t.y. jei t.l.s. sprendinių neturi, tai ją vadinsime nesuderinta.

**Apibrėžimas** Suderintą t.l.s-mą vadinsime apibrėžta, jei sprendinių aibėje yra vienintelis elementas. Kitu atveju suderintą t.l.s. bus vadinama neapibrėžta.

Atkreipsime dėmesį, kad homogeninė t.l.s. visuomet suderinta.

Sakykime, kad duotos dvi tiesinės lygtys, su tuo pačiu nežinomųjų skaičiumi:

$$\sum_{j=1}^{n} a_j x_j = b_1, \sum_{j=1}^{n} c_j x_j = b_2.$$

Sakysime, kad dvi tiesinės nehomogeninės lygtys yra *lygios*, jeigu $a_i/c_i = b_1/b_2, \quad i = 1\ldots n$. Dvi homogenines t.l.s. laikysime lygiomis, jei egzistuoja realusis skaičius $0 \neq k \in \mathcal{R}$, toks, kad $a_i/c_i = k, \quad i = 1\ldots n$.

Tiesinės lygties, tarkime pirmosios, ir realaus skaičiaus $k$ sandauga vadinsime tokią tiesinę lygtį

$$\sum_{j=1}^{n} k a_j x_j = k b_1.$$

Dviejų tiesinių lygčių suma vadinsime lygtį

$$\sum_{j=1}^{n} (a_j + c_j) x_j = b_1 + b_2.$$

Dažnai sprendžiant uždavinius, jei įmanoma, bandoma juos pertvarkyti taip, kad užduoties sprendimas būtų paprastesnis ir tuo pačiu pradinės ir pertvarkytos užduoties atsakymai būtų tie patys.

**Apibrėžimas** Sakysime, kad dvi t.l.s-mos yra ekvivalenčios, jeigu jų sprendinių aibės sutampa.

Apibrėšime lygčių veiksmus sistemoje, kuriuos taikant, kaip matysime vėliau, lygčių sistemą keičiame kita sistema, tuo pačiu nekeisdami sprendinių aibės.

Tiesinių lygčių elementariaisiais pertvarkiais vadinsime tokius lygčių veiksmus:

1) sistemos lygčių keitimą vietomis;

2) bet kurios sistemos lygties dauginimą iš skaičiaus nelygaus nuliui;

3) bet kokių dviejų sistemos lygčių sudėtį.

1 **Teorema** Tiesinių lygčių sistemą elementariaisiais pertvarkiais keičiame į sistemą, kuri ekvivalenti pradinei.

$\ominus$

Panagrinėkime pirmąją operaciją. Nesunku suprasti, kad sukeitus lygtis vietomis (2) sistemoje gausime sistemą, kurioje bus tos pačios lygtys, tik skirsis lygčių išsidėstymo tvarka. Jeigu $(l_1,\ldots,l_n)$ yra pradinės lygčių sistemos sprendinys, tai akivaizdu, kad šis skaičių rinkinys tinka ir naujosios sistemos visoms lygtims. Taigi gavome, kad lygčių keitimas vietomis sprendinių aibės nekeičia. Kitaip tariant pradinė ir pakeistoji lygčių sistemos yra ekvivalenčios.

Panagrinėkime antrąją, t.y. daugybos iš skaičiaus nelygaus nuliui, operaciją. Padauginkime (2) sistemos bet kokią lygtį, tarkim $k-$ąją, iš skaičiaus $c$. Gausime t.l.s.

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, (i=1,\ldots,m), i \neq k; \\ ca_{k1}x_1 + ca_{k2}x_2 + \cdots + ca_{kn}x_n = cb_k. \end{cases} \tag{2'}$$

Įrašę (2) lygties sprendinį $(l_1, \ldots, l_n)$ į (2)' gauname

$$\begin{cases} b_i \equiv b_i, (i=1,\ldots,m), i \neq k; \\ c(a_{k1}l_1 + a_{k2}l_2 + \cdots + a_{kn}l_n) \equiv cb_k. \end{cases}$$

Taigi tas pat rinkinys tinka ir pakeistąjai t.l.s. Teisingas ir atvirkščias teiginys. T.y. jeigu $(t_1, \ldots, t_n)$ yra t.l.s. (2)' sprendinys, tai tada turime sąryšius:

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}t_j \equiv b_i, (i=1,\ldots,m), i \neq k; \\ ca_{k1}t_1 + ca_{k2}t_2 + \cdots + ca_{kn}t_n \equiv cb_k. \end{cases}$$

Jau žinome, kad daugindami t.l. iš skaičiaus nelygaus nuliui, lygties sprendinių aibės nepakeičiame, todėl padauginę $k-$ ąją lygtį iš $1/c$ ir vietoje nežinomųjų įrašę šios sistemos sprendinį gauname tapatybių sistemą

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}t_j \equiv b_i, \ (i=1,\ldots,m).$$

Taigi ir atvirkščias teiginys teisingas. Vadinasi, pradinės lygčių sistemos ir sistemos, kuri buvo gauta iš pradinės sistemos, jos lygtį padauginus iš nelygaus nuliui skaičiaus, sprendinių aibės sutampa.

Parodysime, kad ir trečioji operacija tiesinių lygčių sistemą transformuoja į jai ekvivalenčią t.l.s-mą.

Prie (2) t.l.s-mos $l-$ osios lygties pridėkime $k-$ ąją. Tuomet naujoji t.l.s. atrodys taip:

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, (i=1,\ldots,m), i \neq l; \\ \sum\limits_{j=1}^{n} (a_{lj} + a_{kj})x_j = b_l + b_k. \end{cases} \tag{2''}$$

Pastebėsime, kad jeigu $(t_1, \ldots, t_n)$ yra (2) sistemos sprendinys, tai šis rinkinys yra pirmųjų $n-1$, (2)" sistemos, lygčių sprendinys. Tada

$$\sum_{j=1}^{n} (a_{lj} + a_{kj})t_j = \sum_{j=1}^{n} a_{lj}t_j + \sum_{j=1}^{n} a_{kj}t_j \equiv b_l + b_k.$$

Taigi, minėtasis skaičių rinkinys yra (2)" sistemos sprendinys.

Įrodykime atvirkštinį teiginį. Sakykime, kad $(t_1, \ldots, t_n)$ yra (2)" sistemos sprendinys. Kadangi $n-1$ sistemų (2) ir (2)" lygtys yra vienodos, tai telieka patikrinti, kad šis skaičių rinkinys tinka (2) sistemos $l-$ąjai lygčiai. Turime

$$\sum_{j=1}^{n} (a_{lj} + a_{kj})t_j \equiv b_l + b_k.$$

Pasinaudokime jau įrodytais faktais. Žinome, kad padauginę sistemos lygtį iš skaičiaus bei pridėję prie kitos sistemos lygties gausime naują sistemą, ekvivalenčią pradinei. Taigi, padauginkime $k-$tąją lygtį iš $-1$ ir pridėkime prie paskutiniosios lygybės. Gauname

$$\sum_{j=1}^{n} a_{lj}t_j = b_l.$$

Taigi, atvirkščias teiginys taip pat teisingas. Vadinasi ir šiuo atveju teorema teisinga.

$\oplus$

Parodėme, kad elementarieji pertvarkiai lygčių sistemą pakeičia jai ekvivalenčia sistema.

### 1.2 Gauso algoritmas. Tiesinių lygčių sistemų suderinamumas

*Tiesinę lygčių sistemą*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \quad a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \qquad a_{rr}x_r + \cdots + a_{rn}x_n = b_r, \\ \qquad\quad 0x_n = b_{r+1}, \\ \qquad\quad 0x_n = b_{r+2}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \qquad\quad 0x_n = b_m, \end{cases}$$

*kai $a_{ii} \neq 0,\ i = 1, \dots, r,$ vadinsime daugiakampe t.l.sistema.*

*Tiesinių lygčių sistemą*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \quad a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \qquad\qquad a_{nn}x_n = b_n, \end{cases}$$

*$a_{ii} \neq 0$ $(i = 1, \dots n)$ vadinsime trikampe tls.*

**Apibrėžimas** *Daugiakampę tiesinių lygčių sistemą vadinsime trapecine jei šios sistemos forma yra tokia:*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \quad a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \qquad a_{rr}x_r + \cdots + a_{rn}x_n = b_r, \end{cases} \tag{3}$$

*čia $a_{ii} \neq 0$ $i = 1, \dots, r$. Pastebėsime, kad trikampė t.l.s. yra trapecinės sistemos atskiras atvejis. Būtent, jei $r = n$, tai trapecinė t.l. sistema sutampa su trikampe, būtent:*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \quad a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \qquad\qquad a_{nn}x_n = b_n, \end{cases}$$

$a_{ii} \neq 0$ $(i = 1, \dots n)$.

Teisinga tokia teorema.

2 **Teorema** *Bet kuri trapecinė t.l.s. yra suderinta. Jeigu $r = n$ (trikampė t.l.s.), tai sistema apibrėžta, jeigu $r < n$, tai sistema neapibrėžta. Daugiakampė t.l.s. yra suderinta, jeigu lygties koeficientai turi savybę: $b_i = 0$, visiems $i = r + 1, \dots, m$.*

$\ominus$

1. Tarkime iš pradžių, kad $r = n$. Trumpai šią sistemą galime užrašyti taip:

$$\sum_{j=i}^{n} a_{ij}x_j = b_i, i = 1, \dots, n.$$

Kadangi $a_{nn} \neq 0$, tai gauname

$$x_n = \frac{b_n}{a_{nn}} = l_n.$$

Priešpaskutinioje lygtyje išreiškę kintamąjį $x_{n-1}$ gauname tokią lygybę:

$$x_{n-1} = \frac{1}{a_{n-1n-1}}\big(b_{n-1} - a_{n-1n}l_n\big) = l_{n-1}.$$

Elgdamiesi visiškai analogiškai gauname, kad bet kokiam $i = 1, \dots n$ teisingos lygybės:

$$x_i = \frac{1}{a_{ii}}\big(b_i - a_{ii+1}l_{i+1} - \dots - a_{in}l_n\big) = l_i, \ i = 1, \dots, n-1, \ x_n = l_n.$$

Paskutinioji lygybių sistema yra trikampės lygčių sistemos sprendinys. Ar jis vienintelis? Tarkime priešingai. T.y. egzistuoja kitas sprendinys $(t_1, \dots, t_n)$ toks, kad

$$\sum_{j=i}^{n} a_{ij}t_j \equiv b_i, i = 1, \dots, n.$$

Pakartoję ankstesnius samprotavimus gauname, kad

$$t_n = \frac{b_n}{a_{nn}}.$$

Bet tuomet $t_n = l_n$. Iš prieš paskutinės lygties gauname, kad $t_{n-1} = l_{n-1}$ ir t.t. Analogiškai samprotaudami gauname, kad $t_i = l_i$, $i = n-2, \dots, 1$. Matome, kad iš tiesų $t_i = l_i$, $i = 1, \dots, n$. Vadinasi sprendinys yra vienintelis.

2. Panagrinėkime atvejį, kai $r < n$. (3) sistemos visose lygtyse narius su kintamaisiais $x_{r+1}, \dots, x_n$ perkelkime į dešinę pusę. Tuomet pažymėję

$$b'_i = b_i - a_{ir+1}x_{r+1} - \dots - a_{in}x_n, \ i = 1, \dots, r,$$

naudodamiesi (2.3) sistema gausime tokią t.l. sistemą

$$\sum_{j=i}^{r} a_{ij}x_j = b'_i, \ i = 1, \dots, r.$$

Gavome trikampę t.l. sistemą. Pakartoję 1. dalies samprotavimus gauname, kad $x_1 = l'_1, \dots, x_r = l'_r$. Be to aišku, kad $l'_i = l'_i(x_{r+1}, \dots, x_n)$, $i = 1, \dots, n$. Suteikę kintamiesiems $x_i \in \mathcal{R}$, $i = r+1, \dots, n$ konkrečias reikšmes, gausime skaitines dydžių $l'_1, \dots, l'_r$ reikšmes. Vadinasi sistemos ($r < n$ ) sprendinys turi tokį pavidalą:

$$(l'_1, \dots, l'_r, t_{r+1}, \dots, t_n), \ t_i \in \mathcal{R}, i = r+1, \dots, n. \tag{4}$$

Pasirinktdami skaičius $t_i$, $i = r+1, \dots, n$, (juos vadinsime laisvaisiais kintamaisiais) gauname skaitinius sprendinius. Taigi, šiuo atveju t. l. sistema turi begalo daug sprendinių. (4) sprendinys paprastai vadinamas t.l. sistemos *bendruoju sprendiniu.* Tuo atveju, kai bendrąjame sprendinyje parenkame konkrečias laisvųjų kintamųjų reikšmes, šį sprendinį vadiname *atskiruoju* t.l. sistemos sprendiniu. Sprendinys, gaunamas laisvųjų nežinomųjų vietoje įrašius nulines reikšmes bus vadinamas *baziniu* sprendiniu.

$\oplus$

Rasime t.l.s. sprendinius, kai sistema yra specialios formos.

**Pavyzdys** Išspręskime trikampę t.l.s sistemą

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ 3x_2 - x_3 = 3, \\ 2x_3 = 6. \end{cases}$$

Pastebėkime, kad iš paskutiniosios lygties išplaukia, kad $x_3 = 3$. Įrašę šią $x_3$ reikšmę į antrąją lygtį gauname, kad $3x_2 - 3 = 3$ arba $x_2 = 2$. Turimas $x_2$ ir $x_3$ reikšmes įrašę į pirmąją lygtį gauname, kad $2x_1 + 2 + 3 = 1$ arba $x_1 = -2$. Gavome, kad duotoji trikampė sistema turi vienintelį sprendinį $(-2, 2, 3)$. Patikrinkite ar šis rinkinys yra sprendinys!

**Pavyzdys** Raskime trapecinės tiesinės lygčių sistemos sprendinius.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 - 5x_4 + x_5 = 2, \ (L_1) \\ 3x_2 - 6x_3 - 6x_4 + 3x_5 = 3, \ (L_2) \\ x_3 + 3x_4 + 3x_5 = 3. \ (L_3) \end{cases}$$

Pastebėsime, kad spręsdami trapecines t.l.s-mas mes elgsimės analogiškai kaip ir spręsdami trikampes sistemas, tik prieš tai trapecinėje sistemoje, pradėdami nuo paskutinės lygties, palikdami vieną nežinomąjį kairėje pusėje, likusius nežinomuosius keliame į dešinę pusę ir visas sistemos lygtis pertvarkome taip, kad iš apačios į viršų kairėje pusėje būtų po vieną nežinomąjį daugiau, o dešinėje pusėje būtų skaičiai ir paprastai tie patys nežinomieji visose lygtyse, kurie bus vadinami laisvaisiais nežinomaisias.

Taigi, nežinomąjį $x_3$ išreiškiame per $x_4$ ir $x_5$, $x_4, x_5$ yra laisvieji nežinomieji. Pertvarkydami lygtis iš apačios į viršų, visose lygtyse laisvaisiais nežinomaisiais laikydami tuos pačius kintamuosius gauname sistemą

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 2 + 5x_4 - x_5, \ (L_1) \\ 3x_2 - 6x_3 = 3 + 6x_4 - 3x_5, \ (L_2) \\ x_3 = 3 - 3x_4 + 3x_5. \ (L_3) \end{cases}$$

Tiesa, kai kuriose lygtyse, kai kurie laisvieji nežinomieji gali būti su nuliniais koeficientais. Pastebėsime, kad lygtyje $L_2$, nežinomąjį $x_2$ galime išreikšti tokiu būdu:

$$3x_2 = 3 + 6x_3 + 6x_4 - 3x_5.$$

Padauginę abi šios lygybės puses iš $1/3$ gauname, kad $x_2 = 1 + 2x_3 + 2x_4 - x_5$.

Įrašę į paskutinę lygtį aukščiau gautą $x_3$ reikšmę gauname: $x_2 = 1 + 2(3 - 3x_4 - 3x_5) + 2x_4 - x_5 = 7 - 4x_4 - 7x_5$.

Iš pirmosios lygties, išreiškę $x_1$ likusias nežinomaisias ir įrašę gautąsias nežinomųjų $x_3$, $x_2$ reikšmes turime lygtį

$2x_1 = 2 - 7 + 4x_4 + 7x_5 - 3 + 3x_4 - 3x_5 + 5x_4 - x_5$. Sutraukę panašius narius, o po to padauginę abi lygybės puses iš $1/2$ gausime lygtį $x_1 = -4 + 6x_4 + (3/2)x_5$.

Taigi, šios sistemos bendrasis sprendinys yra toks:

$$(-4 + 6x_4 + \frac{3}{2}x_5, 7 - 4x_4 - 7x_5, 3 - 3x_4 - 3x_5, x_4, x_5), \ x_4, x_5 \in \mathcal{R}.$$

Matome, kad šiuo atveju trapecinė t.l.s. turi begalo daug sprendinių, kurie priklauso nuo $x_4, x_5 \in \mathcal{R}$ parinkimo. Pavyzdžiui, parinkę $x_4 = 1, x_5 = 0$ gauname atskirąjį sprendinį $(2, 3, 0, 1, 0)$.

Nagrinėjamu atveju, baziniai nežinomieji yra $x_1, x_2, x_3$, o laisvieji nežinomieji- $x_4, x_5$. Parinkę $x_4 = x_5 = 0$ gauname bazinį sprendinį

$$(-4, 7, 3, 0, 0).$$

Panagrinėkime daugiakampę tls. Akivaizdu, kad daugiakampė t.l.s. yra nesuderinta, jei sistemoje egzistuoja lygtis, tarkime $i - oji$, kurios laisvasis narys $b_i \neq 0$. Pavyzdžiui lygtis $0x_3 = 5$ sprendinių neturi. O jei lygtyse $0x_i = b_i$, visi $b_i = 0, i = r+1, \ldots, m$ tai daugiakampė sistema tampa trapecine, kadangi šiuo atveju visas šias lygtis galima praleisti, nes jas tenkina bet kokie realiųjų skaičių rinkiniai. Kitaip tariant, sprendinių aibės šios lygtys neriboja.

**Pavyzdys** Išspręskime daugiakampę t.l.s.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 - 5x_4 = 2, \ (L_1) \\ \quad 6x_4 = 3, \ (L_2) \\ \qquad 3x_4 = 3. \ (L_3) \end{cases}$$

Padauginę trečiąją lygtį iš -2 ir pridėję šią lygtį prie antrosios gauname sistemą:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 - 5x_4 = 2, \ (L_1) \\ \quad 0x_4 = -3, \ (L_2) \\ \qquad 3x_4 = 3. \ (L_3) \end{cases}$$

Matome, kad šios sistemos antrosios lygties netenkina joks skaičių rinkinys taigi, ši sistema sprendinių neturi.

Parodysime, kad bet kokią tiesinių lygčių sistemą, naudodami elementariuosius pertvarkius, galime transformuoti į trapecinę. Kitaip tariant bet kokiai t.l. sistemai galime nurodyti ekvivalenčią trapecinę t.l. sistemą.

Atkreipsime skaitytojo dėmesį į tai, kad nehomogeninė t.l.s. yra nesuderinta, jeigu kurios nors lygties, tarkime $i-$ osios, visi koeficientai lygūs nuliui, o laisvasis narys $b_i \neq 0$. Todėl, jeigu sistemoje yra tokia lygtis, tai ši sistema nesuderinta. Jeigu sistemoje yra lygtis (tarkime $i-$oji ), kurios visi koeficientai $a_{ij} = 0, (i = 1, \ldots, m), (j = 1, \ldots, n)$ ir $b_i = 0$ tai tokią lygtį galime praleisti, nes šios lygties sprendiniais gali būti bet kokie realiųjų skaičių rinkiniai.

**Gauso metodas.** Nagrinėsime (2) t.l. sistemą. Nemažindami bendrumo galime laikyti, kad $a_{11} \neq 0$. Aišku, kad jeigu $a_{11} = 0$, tai sukeitę pirmąją lygtį su sistemos kokia nors lygtimi, kurios pirmasis koeficientas, sakykime $a_{i1} \neq 0$, kokiam nors $i = 2 \ldots, m$ ir peržymėję koeficientus gausime, kad pirmosios lygties pirmasis koeficientas nelygus nuliui. Visi $a_{i1} = 0$, $(i = 1, \ldots, m)$ negali būti, nes tuomet nagrinėjamoji t.l.s. turėtų mažiau kintamųjų negu (2) sistema.

Taigi, laikome, kad $a_{11} \neq 0$. Tuomet padauginę pirmąją (2) t.l.s-mos lygtį iš skaičių $-(a_{i1}/a_{11})$, $i = 2, \ldots, m$ ir sudėję su antrąja, trečiąja ir t.t. $m-$ąja sistemos lygtimis, gausime pradinei t.l.s- mai ekvivalenčią lygčių sistemą

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1^{(1)}, \\ \qquad a_{22}^{(1)}x_2 + \cdots + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)}, \\ \qquad a_{32}^{(1)}x_2 + \cdots + a_{3n}^{(1)}x_n = b_3^{(1)}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \\ \qquad a_{m2}^{(1)}x_2 + \cdots + a_{mn}^{(1)}x_n = b_m^{(1)}, \end{cases} \tag{5}$$

čia

$$a_{ij}^{(1)} = a_{ij} - \frac{a_{i1}}{a_{11}}a_{1j}, \ b_j^1 = b_j - \frac{a_{i1}}{a_{11}}b_1,$$

$i = 2, \ldots m, j = 2, \ldots n.$

Pastebėsime, kad (5) sistemos $m-1$ lygtys neturi $x_1$ nežinomojo. Eliminavimo procesą tęsiame toliau. Analogiškai kaip ir pirmąjame žingsnyje nemažindami bendrumo galime laikyti, kad koeficientas $a_{22} \neq 0$. Tuomet, padauginę (5) sistemos antrąją lygtį iš daugiklio $-a_{i2}^{(1)}/a_{22}^{(1)}$ ir gautą rezultatą pridėję prie lygčių $i = 3, 4, \ldots, m$ gauname sistemą

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = \qquad b_1^{(1)}, \\ \qquad a_{22}^{(1)}x_2 + \cdots + a_{2n}^{(1)}x_n = \qquad b_2^{(1)}, \\ \qquad\qquad a_{33}^{(2)}x_2 + \cdots + a_{3n}^{(2)}x_n = b_3^{(2)}, \\ \dotfill, \\ \qquad\qquad a_{m3}^{(2)}x_2 + \cdots + a_{mn}^{(2)}x_n = b_m^{(2)}, \end{cases}$$

čia

$$a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - \frac{a_{i2}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}a_{2j}^{(1)},\ b_j^{(2)} = b_i^{(1)} - \frac{a_{i2}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}b_2^{(1)},\ i = 3, \ldots m, j = 3, \ldots n.$$

Samprotaudami visiškai analogiškai, po $m-1$, jeigu $m = n$ žingnio gausime tokią t.l.s- mą:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1^{(1)}, \\ \quad a_{22}^{(1)}x_2 + \cdots + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)}, \\ \qquad a_{33}^{(2)}x_2 + \cdots + a_{3n}^{(2)}x_n = b_3^{(2)}, \\ \dotfill \\ \qquad\qquad \alpha_{kk}^{(k-1)}x_k + \cdots + a_{kn}^{(k-1)}x_n = b_k^{(k-1)}, \\ \dotfill \\ \qquad\qquad\qquad a_{nn}^{(n-1)}x_n = b_n^{(n-1)}, \end{cases} \tag{6}$$

o jeigu $m < n$, tai tada gauname sistemą

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1^{(1)}, \\ \quad a_{22}^{(1)}x_2 + \cdots + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)}, \\ \qquad a_{33}^{(2)}x_2 + \cdots + a_{3n}^{(2)}x_n = b_3^{(2)}, \\ \dotfill \\ \qquad\qquad a_{mm}^{(m-1)}x_2 + \cdots + a_{mn}^{(m-1)}x_n = b_m^{(m-1)}, \end{cases} \tag{7}$$

ir visais atvejais

$$a_{ij}^{(l)} = a_{ij}^{(l-1)} - \frac{a_{il}^{(l-1)}}{a_{ll}^{(l-1)}}a_{lj}^{(l-1)},\ b_i^{(l)} = b_i^{(l-1)} - \frac{a_{il}^{(l-1)}}{a_{ll}^{(l-1)}}b_l^{(l-1)},$$

$i = l+1, \ldots m, j = l+1, \ldots, n$. Pastebėsime, kad indeksas viršuje virš koeficientų parodo kelis kartus buvo "paveiktas" koeficientas.

Pastebėsime, kad tuo atveju, kai $m > n$, t.y. sistemoje lygčių daugiau negu nežinomųjų, atlikę $n$ žingsnių gauname sistemą:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \dotfill, \\ a_{nn}^{(n-1)}x_n = b_n^{(n-1)}, \\ 0 = b_{n+1}^{(n-1)}, \\ \dotfill, \\ 0 = b_m^{(n-1)}. \end{cases} \tag{8}$$

Be to, atliekant t.l.s-mos elementariuosius pertvarkius gali atsitikti taip, kad kokiame nors

$r < m$ žingsnyje gauname tokią sistemą:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{rr}^{(r-1)}x_r + \cdots + a_{rn}^{(r-1)}x_n = b_r^{(r-1)}, \\ \quad 0 = b_{r+1}^{(r-1)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \quad 0 = b_m^{(r-1)}. \end{cases} \tag{9}$$

Apibendrinkime gautus rezultatus. Jeigu pertvarkydami (2) t.l.s- mą gavome (6) arba (7) sistemą, tai pradinė t.l. sistema turi sprendinį, t.y. ji suderinta. Jeigu gavome (8) arba (9) sistemas, tai pradinė sistema suderinta tik tuo aveju, kai $b_k^{(n-1)} = 0$ ir $b_j^{(r-1)} = 0$, $j = r+1, \ldots, m,\quad k = n+1, \ldots, m.$

Pateiksime kelis, šio metodo taikymo, pavyzdžius.

**Pavyzdys**

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 2, \ (L_1) \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 3, \ (L_2) \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 6. \ (L_3) \end{cases}$$

Sukeitę $(L_1)$ lygtį su $(L_2)$ lygtimi (tai elementarusis pertvarkis) gauname tokią sistemą:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = 3, \ (L_2) \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 2, \ (L_1) \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 6. \ (L_3) \end{cases}$$

Pastebėsime, kad spręsdami t.l. sistemas mes galime lygčių sistemoje vietomis nekeisti, tik šiuo atveju reikia atkreipti dėmesį, kad galutinė t.l.sistemos (trapecinė ar daugiakampė) forma nebus tokia kokia buvo nurodyta 1 Teoremoje, bet atsakymas nuo to nepriklausys.

Atlikime tokius elementariuosius pertvarkius: $-2L_2 + L_1 = L_2^1$ ir $-3L_1 + L_3 = L_3^1$. Gauname pradinei t.l.s-mai ekvivalenčią sistemą:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = 3, \ (L_2) \\ \quad -5x_2 + 3x_3 = -4, \ (L_2^1) \\ \quad -7x_2 + 7x_3 = -3. \ (L_3^1) \end{cases}$$

Atlikę elementarųjį pertvarkį $7L_2^1 - 5L_3^1 = L_3^2$ gauname, sistemą

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = 3, \ (L_2) \\ \quad -5x_2 + 3x_3 = -4, \ (L_2^1) \\ \qquad -14x_3 = -13. \ (L_3^2) \end{cases}$$

Matome, kad paskutinioji t.l.s. yra trikampė. Taigi, ši sistema turi vienintelį sprendinį. Nesunkiai randame, kad $(-743/14, 19, 13/14)$.

**Pavyzdys** Išspręskime tokią sistemą:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = 3, \ (L_2) \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 2, \ (L_1) \\ 3x_1 + 9x_2 - 3x_3 = 1. \ (L_3) \end{cases}$$

Atlikę elementariuosius pertvarkius $-2L_1 + L_2 = L_2^1$ ir $-3L_1 + L_3 = L_3^1$, gauname pradinei t.l.s-ai ekvivalenčią t.l.s-ą:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = 3, \ (L_2) \\ \quad -5x_2 + 3x_3 = -4, \ (L_2^1) \\ \qquad 0 = 1. \ (L_3^1) \end{cases}$$

Paskutinioji sistema yra išsigimusi (nesuderinta) trapecinė t.l.s., taigi, ši lygčių sistema sprendinių neturi.

**Pavyzdys** Išspręskime dar vieną t.l.s-ą. Turime

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = 3, \ (L_2) \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 2, \ (L_1) \\ 3x_1 + 9x_2 - 3x_3 = 9. \ (L_3) \end{cases}$$

Atlikę elementariuosius pertvarkius: $-2L_1 + L_2 = L_2^1$ ir $-3L_1 + L_3 = L_3^1$ gauname tokią t.l.s-ą

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = 3, \ (L_2) \\ \quad -5x_2 + 3x_3 = -4, \ (L_2^1) \\ \qquad 0 = 0. \ (L_3^1) \end{cases}$$

Paskutiniąją lygtį praleidžiame, kadangi ji visada suderinta. Matome, kad paskutinioji sistema yra trapecinė. Išsprendę šią sistemą gauname, kad šios sistemos bendrasis sprendinys yra

$$\left(\frac{5}{3} - \frac{4}{3}x_2, x_2, \frac{-4}{3} + \frac{5}{3}x_2\right), \quad x_2 \in \mathcal{R}.$$

Reikėtų atkreipti skaitytojo dėmesį į tai, kad sąvoką "trapecinę" (trikampė ar daugiakampė) nereikia suprasti paraidžiui kaip parašyta. T.y. pertvarkant lygtis nebūtinai reikia laikytis kintamųjų eliminavimo tvarkos kuri buvo atliekama teoriškai samprotaujant ir atliekama pateikiant pavyzdžius. Svarbu suprasti, kad esminis momentas tainat šį algoritmą yra tai, kad kiekvienoje žemiau esančiose lygtyje turi likti griežtai mažiau nežinomųjų negu aukščiau esančiose.

**Pavyzdys** Panagrinėkime t.l.sistemą

$$\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 3, \ (L_1) \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -4, \ (L_2) \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0. \ (L_3) \end{cases}$$

Pastebėsime, kad generaline eilute galime pasirinkti trečią lygtį, o generaliniu elementu koeficientą prie $x_3$. Paeiliui atlikę veiksmus $3L_3 + L_2 = L_2^1$ ir $-2L_3 + L_1 = L_3^1$ bei trečiąją lygtį perrašę pirmosios vietoje gauname sistemą

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0. \ (L_3) \\ 8x_1 + 7x_2 \quad = -4, \ (L_2^1) \\ -x_1 - 3x_2 \quad = 3. \ (L_3^1) \end{cases}$$

Dabar generaline eilute pasirenkame $L_3^1$ lygtį, o generaliniu koeficientu $-1$ esantį prie $x_1$. Atlikę operaciją $8L_3^1 + L_3^1 = L_2^2$ gauname sistemą

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0. \ (L_3) \\ \quad -17x_2 \quad = 20, \ (L_2^2) \\ -x_1 - 3x_2 \quad = 3. \ (L_3^1) \end{cases}$$

Bet paskutinioji sistema yra trikampė. Taigi, ji turi vienintelį sprendinį, kurį rasti siūlome skaitytojui.

## 1.3 Gauso - Žordano metodas

Šiame trumpame skyrelyje paminėsime dar vieną tiesinių lygčių sistemų sprendimo būdą, kuris supaprastina tiesinių lygčių sistemų užrašymo būdą, kuomet sprendžiant t.l.s. nėra perrašinėjami nežinomieji.

Tarkime, kad duota tiesinių lygčių sistema

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, \ (i = 1, \ldots, m).$$

Surašykime į dvi lenteles šios sistemos koeficientus:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & |b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & |b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & |b_n \end{pmatrix}.$$

Lentelė $A$ vadinama tiesinių lygčių sistemos matrica, o lentelė $B$ vadinama išplėstine tiesinių lygčių sistemos matrica. Taigi t.l. sistemas galime užrašyti išplėstinėmis matricomis. Šiuo atveju laikysime, kad vertikalus brūkšnys t.l.s. matricoje atitinka lygybės ženklą.

**Pavyzdys** Sistemą

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 2, \\ \qquad\quad x_2 - x_3 = -3, \\ \qquad\qquad\quad x_3 = 3. \end{cases}$$

naudojant išplėstinę matricą galime būti užrašyti tokiu būdu:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & |2 \\ 0 & 1 & -1 & |-3 \\ 0 & 0 & 1 & |3 \end{pmatrix}.$$

Užrašykime t.l.

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, \ (i = 1, \ldots, m)$$

išplėstinę matricą.

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & |b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & |b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & |b_n \end{pmatrix}.$$

T.l.s. matricos (išplėstinės matricos) eilučių elementariaisias veiksmais vadinsime

1) matricos eilučių keitimą vietomis;

2) bet kokios eilutės dauginimą iš skaičiaus nelygaus nuliui;

3) bet kokių dviejų eilučių sudėtį.

Atkreipsime skaitytojo dėmesį, kad atlikę matricos eilučių elementariuosius veiksmus gausime kitą matricą (skaičių lentelę) kurią atitinkanti t.l.s. bus ekvivalenti pradinei t.l.s.

Nesunku suprasti, kad atliekant matricos eilučių elementariuosius veiksmus (analogiškus t.l.s. eilučių veiksmams ) gausime matricą

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & |b_1 \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \dots & a_{2n}^{(1)} & |b_2^{(1)} \\ .. & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{rr}^{(r-1)} & \dots & a_{rn}^{(r-1)} & |b_r^{(r-1)} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & |b_{r+1}^{(r-1)} \\ .. & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & |b_m^{(r-1)} \end{pmatrix}.$$

Jeigu perrašytume gautąją matricą į lygčių sistemą, gautume jau nagrinėtą atvejį (žr. 2.2 skyrelį, (9) sąryšį) daugiakampę t.l.s.

Tęskime t.l.s., užrašytos matricine forma analizę. Tegu $b_{r+1}^{(r-1)} = \ldots = b_m^{(r-1)} = 0$. Priešingu atveju t.l.s. būtų nesuderinta (kodėl?).

Pertvarkykime šią matricą tokiu būdu, kad ji reprezentuotų trikampę t.l.s.. Šio pertvakymo esmė- perkeliame visose t.l.s. lygtyse visus dėmenis pradedant $r+1$ į dešinę pusę (tuo pačiu matricos eilutėse už brūkšnio į dešinę pusę keliame visus elementus keisdami jų ženklus). Gauname tokią matricą

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} & |b_1 & -a_{1r+1} & \dots & -a_{1n} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \dots & a_{2r}^{(1)} & |b_2^{(1)} & -a_{2r+1}^{(1)} & \dots & -a_{2n}^{(1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & a_{rr}^{(r-1)} & |b_r^{(r-1)} & -a_{rr+1}^{(r-1)} & \dots & -a_{rn}^{(r-1)} \end{pmatrix}.$$

Matome, kad dešiniosios matricos (tuo pačiu ir t.l.s. lygybės pusės) priklauso nuo nežinomųjų $x_{r+1}, \ldots, x_n$. Pažymėkime

$$c_i = -a_{1r+1}x_{r+1} - \cdots - a_{in}x_n, \quad i = 1, \ldots, r.$$

Tada gauname sistemą:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & |c_1 \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \dots & a_{2n}^{(1)} & |c_2 \\ .. & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & a_{rr}^{(r-1)} & |c_r \end{pmatrix}.$$

Paskutiniąją eilutę daugindami iš atitinkamų daugiklių ir sudėdami su aukščiau esančiomis eilutėmis galime gauti, kad virš elemento $a_{rr}^{(r-1)}$ esančiame stulpelyje bus nuliniai elementai, o kiti matricos elementai (išskyrus dešiniąsias puses) nesikeičia, t.y. t.y.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & 0 & |c^(1)_1 \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \dots & 0 & |c_2^{(1)} \\ .. & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & a_{r-1r-1}^{(r-2)} & 0 & |c_{r-1}^{(r-1)} \\ 0 & \dots & 0 & a_{rr}^{(r-1)} & |c_r \end{pmatrix}.$$

Atlikdami analogiškus eliminavimo žingsnius su antrąja, trečiąja ir t.t. priešpaskutiniąja nuo $r-$ osios eilutės esančiomis eilutėmis gausime tokią matricą

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 & |c_1^{(r-1)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \dots & 0 & |c_2^{(r-2)} \\ .. & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & a_{rr}^{(r-1)} & |c_r \end{pmatrix}.$$

Padalinę kiekvieną $i-$ ąją eilutę iš elemento $a_{ii}^{(i-1)}$ gauname matricą

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & |\frac{c_1^{(r-1)}}{a_{11}} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & |\frac{c_2^{(r-2)}}{a_{22}^{(1)}} \\ . & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & \dots & 0 & 1 & |\frac{c_r}{a_{rr}^{(r-1)}} \end{pmatrix}.$$

Užrašę šios matricos t.l.s. gauname sistemos sprendinį:

$$\Big(\frac{c_1^{(r-1)}}{a_{11}}, \frac{c_2^{(r-2)}}{a_{22}^{(1)}}, \frac{c_r}{a_{rr}^{(r-1)}}, x_{r+1}, \dots, x_n.\Big)$$

Jei $r = n$, tai sprendinys vienintelis, kitu atveju sprendinių begalo daug, kadangi gautasis sprendinys priklauso nuo laisvųjų nežinomųjų $x_{r+1}, \dots, x_n$.

Šis aptartas metodas vadinamas Gauso-Žordano metodu.

**Pavyzdys** Išspręskime sistemą

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \quad = 1, \\ 2x_2 + x_2 + x_3 = 4, \\ 3x_1 \quad + \quad 2x_3 = 8. \end{cases}$$

Gauso-Žordano būdu.

Perrašę šią sistemą matriciniu būdu gauname

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & |1 \\ 2 & 1 & 1 & |4 \\ 3 & 0 & 2 & |8 \end{pmatrix}.$$

Spręskime šią sistemą atlikdami eilučių elementariuosius pertvarkius (veiksmus).

Atlikę matricos eilučių veiksmus $-2L_1 + L_2$ ir $-3L_1 + L_3$ gauname tokią t.l.sistemos matricą:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & |1 \\ 0 & -1 & 1 & |2 \\ 0 & -3 & 2 & |5 \end{pmatrix}.$$

Sudėję $-3L_2 + L_3$ turėsime

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & |1 \\ 0 & -1 & 1 & |2 \\ 0 & 0 & -1 & |-1 \end{pmatrix}.$$

Sudėję $L_3 + L_2$ gauname

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & |1 \\ 0 & -1 & 0 & |1 \\ 0 & 0 & -1 & |-1 \end{pmatrix}.$$

Atlikę paskutinį veiksmą $L_2 + L_1$ ir padauginę antrąją ir trečiąją eilutes iš $-1$ gauname:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & |2 \\ 0 & 1 & 0 & |-1 \\ 0 & 0 & 1 & |1 \end{pmatrix}.$$

Tada paskutiniosios trikampės sistemos sprendinys yra toks:

$x_1 = 2,\ x_2 = -1,\ x_3 = 1.$

**Pavyzdys** Išspręskime minėtu būdu dar vieną t.l.s. Tarkime duota sistema iš karto užrašyta matricine forma:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 & |1 \\ 3 & 2 & 0 & 1 & |2 \\ 5 & 3 & 1 & 4 & |3 \end{pmatrix}.$$

Atlikę eilučių veiksmą $L_3 - L_2$ gauname tokią lygčių sistemos matricą:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 & |1 \\ 2 & 1 & 1 & 3 & |1 \\ 5 & 3 & 1 & 4 & |3 \end{pmatrix}.$$

Atlikę veiksmą $L_1 - L_2$ gauname sistemą

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 & |1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & |0 \\ 5 & 3 & 1 & 4 & |3 \end{pmatrix}.$$

Bet antroji eilutė- nulinė, taigi ją galima praleisti, kadangi šią eilutę atitinkanti lygtis visada turi sprendinį. Taigi, praleidę minėtą eilutę ir atlikę eilučių veiksmą $L_1 - L_3$ gauname tokią sistemos matricą:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 & |1 \\ -3 & -2 & 0 & -1 & |-2 \end{pmatrix}.$$

Kadangi gautoje sistemoje lygčių mažiau negu nežinomųjų, tai kairėje pusėje paliekame tiek nežinomųjų, kiek yra lygčių, o likusius nežinomuosius (visose lygybėse tuos pačius) keliame į dešinę pusę. Paprastai kairėje pusėje paliekami paprastesni koeficientai. Mūsų nagrinėjamu atveju patogu būtų palikti koeficientus prie $x_2, x_3$. Gauname sistemą:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & |1 & -3 & -2 \\ -2 & 0 & |-2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Laikinai, į dešinės pusės narius žiūrėsime kaip laisvąjį narį. Tada, atlikę veiksmą $2L_1 + L_2$ gauname sistemą:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & |1 & -3 & -2 \\ 0 & 2 & |0 & -5 & -1 \end{pmatrix}.$$

Padauginę sistemos antrąją lygtį iš $\frac{1}{2}$ gauname sistemą

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & |1 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & |0 & -\frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Paskutinis veiksmas bus toks:$-L_2 + L_1$. Gauname

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & |1 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & |0 & -\frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Rašant sistemos bendrąjį sprendinį būtina žinoti, kokioje vietoje yra sistemos nežinomųjų koeficientai. Taigi, turėdami tai omenyje gauname, kad

$$x_2 = 1 - \frac{1}{2}x_4 - \frac{3}{2}x_1, \quad x_3 = -\frac{5}{2}x_4 - \frac{1}{2}x_1.$$

Tada, sistemos bendrasis sprendinys yra toks:

$$(x_1, 1 - \frac{1}{2}x_4 - \frac{3}{2}x_1, -\frac{5}{2}x_4 - \frac{1}{2}x_1, x_4), \quad x_1,\, x_4 \in \mathcal{R}.$$

## Temos teoriniai klausimai

1. Tiesinių lygčių sistemos. Elementarieji pertvarkiai
2. Tiesinių lygčių sistemų ekvivalentumas. Mokėti įrodyti, kad elementariaisiais pertvarkiais tiesinių lygčių sistemą pakeičiame ekvivalenčia pradinei sistemai.
3. Gauso algoritmas. Tiesinių lygčių sistemų suderinamumas.
4. Gauso-Žordano metodas tiesinėms lygčių sistemoms spręsti.
5. Tiesinių lygčių sistemų su parametrais sprendimas.
6. Mokėti formalizuoti tekstinius uždavinius tiesinių lygčių sistemomis.

## Uždaviniai savarankiškam darbui

1. Sudarykite nurodytas tiesinių lygčių sistemas:

a) $4 \times 4$ eilės sistemą, turinčią vienintelį sprendinį (2; 3; 1; 4);
b) $3 \times 5$ sistemą, turinčią begalo daug sprendinių ir tarp kurių yra sprendinys (2; 3; 1; 4);
c) $5 \times 4$ sistemą, neturinčią sprendinių.
d) $6 \times 4$ sistemą, turinčią tik vieną sprendinį, pavyzdžiui (1, 3, 0, -2).
e) $7 \times 4$ sistemą, neturinčią begalo daug sprendinių.

2. Naudodami Gauso metodą išspręskite pateiktąsias tiesinių lygčių sistemas. Atsakymų teisingumų įsitikinate tikrindami sprendinius.

$$2.1)\qquad \begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 = -12, \\ 4x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 6. \end{cases}$$

**Ats:** (1, 0, 4)

$$2.2)\qquad \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 - 3x_4 = 1, \\ x_1 + x_2 + 5x_3 + x_4 = 5, \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 3. \end{cases}$$

**Ats:** (2, 1, 0, 2)

$$2.4)\qquad \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = -5, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 5, \\ -x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 4, \\ x_1 - 3x_2 + x_3 - 3x_4 = -12, \\ 3x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 2x_4 = -8. \end{cases}$$

**Ats:** (0, 3, 0, 1)

$$2.5)\qquad \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = -1, \\ x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 5, \\ -x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 - 3x_4 = -1, \\ 6x_1 - 2x_2 - x_4 = 1. \end{cases}$$

**Ats:** Sprendinių nėra

$$2.6)\quad \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_4 = 0, \\ 2x_1 + 4x_2 - 5x_3 + 3x_4 = -11, \\ -3x_1 - 5x_2 + 6x_3 + x_4 = 13, \\ -3x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 11. \end{cases}$$

**Ats:** $(1 + 24x_4, -2 - 49x_4, 1 - 29x_4, x_4)$

3. Kokios turi būti parametrų $m, n$ reikšmės, kad sistema

$$3.1)\quad \begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 5, \\ 4x_1 + 2x_2 - 3x_3 = n, \\ x_1 + mx_2 - 2x_3 = 1, \end{cases}$$

turėtų $a)$ vienintelį, $b)$ neturėtų sprendinių, $c)$ turėtų be galo daug sprendinių?

**Ats:** a) $m \neq -7$; b) $m = -7, \;\; n \neq -24$; c) $m = -7, \;\; n = 24$.

$$3.2)\quad \begin{cases} 3x_1 - mx_2 - x_3 = 1, \\ -2x_1 + x_2 + 4x_3 = n, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 2, \end{cases}$$

turėtų $a)$ vienintelį, $b)$ neturėtų sprendinių, $c)$ turėtų be galo daug sprendinių?

**Ats:** a) $m \neq -6$; b) $m = -6, \;\; n \neq -9$; b) $m = -6, \;\; n = -9$.

4. Išspręskite duotąsias tiesinių lygčių sistemas Gauso- Žordano būdu:

$$4.1)\quad \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 6x_4 = 10, \\ x_2 + 2x_3 + x_4 = 2, \\ 3x_1 - 3x_3 + 6x_4 = 9. \end{cases}$$

**Ats:** $(-2.5x_4 + 4, 0, -0.5x_4 + 1, x_4)$

$$4.2)\quad \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 - x_5 = 1, \\ 2x_1 - 3x_2 - 6x_3 + 2x_4 + 3x_5 = -3, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 - 5x_5 = 3, \\ 6x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 - 3x_5 = 1, \\ x_1 - 5x_2 - 9x_3 + 3x_4 + 8x_5 = -6. \end{cases}$$

**Ats** $(\frac{9}{2} + \frac{7}{2}x_4 + 9x_5, -15 - 14x_4 - 29x_5, \frac{19}{2} + \frac{17}{2}x_4 + 18x_5), x_4, x_5)$

$$4.3)\quad \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1, \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 3x_4 - 2x_5 = 0, \\ 4x_1 - x_2 - 4x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 1, \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 - 2x_4 - x_5 = 4, \\ 2x_1 + 2x_2 - 7x_3 + 5x_4 + 5x_5 = 3. \end{cases}$$

**Ats:** Sprendinių nėra

5. Gamykla gamina trijų rūšių produkciją, tarkime $A, B, C$. Pardavus šių produktų vienetą yra gaunamas $4, 2, 5$ Lt pelnas, atitinkamai. Fiksuoti gamybos kaštai yra 40000Lt per metus, o minėtų produktų vieneto gamybos (kintamieji) kaštai sudaro $5, 6, 7$ Lt atitinkamai. Kitais metais numatoma pagaminti 9000 vienetų, visų trijų rūšių, produktų. Yra žinoma, kad jie bus realizuoti, ir bendras pelnas turėtų sudaryti 34000 Lt. Kiek kiekvienos rūšies produktų reikėtų pagaminti, jeigu bendrosios išlaidos sudarys 96000 Lt?

**Ats:** (2000, 3000, 4000)

6. Tarkime, kad firma stato trijų tipų namus. Kiekvieno tipo namui pastatyti reikalingos išlaidos medienos, stiklo, plytų bei apdailos darbų salyginiams vienetams numatyti. Pavyzdžiui plytų sąlyginis vienetas- kūbinis plytų metras, medienos sąlyginis vienetas- grindų kvadratinis metras ir t.t. Architektas turi paruošti namų projektus, žinodamas, kad kiekvieno namo statybos savikaina yra 96000, 84000, 71000 Lt, o medžiagų kainas jis gali varijuoti. Pirmąjį namą susiekime su rinkiniu $(6; 4; 12; 8)$, kurio prasmė tokia: šiam namui turi būti skirta 6 sąlyginiai vienetai medienos, 4 sąlyginiai vienetai stiklo dirbinių, 12 sąlyginių vienetų plytų ir 8 sąlyginiai vienetai kitų medžiagų. Antrąjį namą atitinkantis rinkinys yra $(5; 4; 8; 10)$, trečiąjį namą atitinkantis rinkinys yra $(3; 4; 9; 6)$. Nustatykite siūlomų kainų formules, kuriomis turėtų remtis klientas įsigydamas medžiagas.

**Ats:** (4, 5, 3, 2)

7. Žinoma, kad mokyklos atlyginimų fondas priklauso nuo susirinkusių į mokyklą mokinių skaičiaus (krepšelių skaičiaus).

Tarkime, kad pirmoji mokykla surinko 1.32 mln. litų, antroji 1.932 mln. litų, o trečioji 1.488 mln. litų. Mokykloje dirba trijų kategorijų darbuotojai: Administracijos darbuotojai, mokytojai bei aptarnaujantis personalas. Žinoma, kad pirmoje mokykloje dirba 5 administracijos atstovai, keturiasdešimt mokytojų bei penkiolika aptarnaujančio personalo, trumpai (5, 40, 15), antroje (7, 60, 20) ir trečioje (4, 50, 12). Visos mokyklos priklauso tam pačiam regionui, tad atitinkamų kategorijų asmenų atlyginimai turi būti vienodi. Nustatykite kiekvienos kategorijos darbuotojo mėnesio atlyginimo dydį. Nustatykite atlyginimų dydžius, jei krepšeliai padidės 20%.

**Ats:** $(3000, 2000, 1000)$.

### Užduotys namų darbams

### Tiesinių lygčių sistemų sprendimas Gauso-Žordano būdu

1. Naudodami Gauso-Žordano metodą išspręskite pateiktąsias tiesinių lygčių sistemas:

$$a) \quad \begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 = -12, \\ 4x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 6. \end{cases}$$

$$b) \quad \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 - 3x_4 = 1, \\ x_1 + x_2 + 5x_3 + x_4 = 5, \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 3. \end{cases}$$

$$c) \quad \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = -1, \\ x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 5, \\ -x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 - 3x_4 = -1, \\ 3x_1 - 2x_2 - x_4 = 1. \end{cases}$$

$$d) \quad \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_4 = 0, \\ 2x_1 + 4x_2 - 5x_3 + 3x_4 = -11, \\ -3x_1 - 5x_2 + 6x_3 + x_4 = 13, \\ -3x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 11. \end{cases}$$

3. Kokios turi būti parametro $a$ reikšmės, kad tls. turėtų a) vieną sprendinį, b) begalo daug sprendinių, c) sprendinių neturėtų.

$$a)\quad \begin{cases} (1+a)x_1 - (a+1)x_2 \quad = 0, \\ x_1 + (a+1)x_2 + (a-2)x_3 = 0, \\ -9x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 0. \end{cases}$$

$$b)\quad \begin{cases} 3x_1 + 7x_2 + x_3 - 2x_4 = 21, \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 5x_4 = 18, \\ -x_1 + 9x_2 + x_3 - ax_4 = 1 - a. \end{cases}$$

neturi

4. Kokios turi būti parametrų $m, n$ reikšmės, kad sistema

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 5, \\ 4x_1 + 2x_2 - 3x_3 = n, \\ x_1 + mx_2 - 2x_3 = 1, \end{cases}$$

turėtų $a$) vienintelį, $b$) neturėtų sprendinių, $c$) turėtų be galo daug sprendinių?

5. Gamykla gamina trijų rūšių produkciją, tarkime $A, B, C$. Pardavus šių produktų vienetą yra gaunamas $3, 6, 8$ Lt pelnas, atitinkamai. Fiksuoti gamybos kaštai yra 50000Lt per metus, o minėtų produktų vieneto gamybos (kintamieji) kaštai sudaro $4, 5, 3$ Lt atitinkamai. Kitais metais numatoma pagaminti 25000 vienetų, visų trijų rūšių, produktų. Yra žinoma, kad jie bus realizuoti, ir bendras pelnas turėtų sudaryti 4000 Lt. Kiek kiekvienos rūšies produktų reikėtų pagaminti, kad bendrosios išlaidos sudarytų 106000 Lt?

6. Penkioms pramonės šakoms $p_1, p_2, p_3, p_4, p_5$ yra skiriama parama iš penkių fondų. Žinoma, kad Lietuva iš pirmojo fondo gali gauti 55 mln., antrojo- 70 mln., trečiojo- 48 mln., ketvirtojo- 60 mln., penktojo- 44 mln. litų. Pramonės šakų įvairus įmonių skaičius pretenduoja į šių fondų lėšas. Rinkinys $(7, 2, 3, 2, 1)$ reiškia, kad $p_1$ šakos kiekviena įmonė siekia gauti po $7mln.$ sumą iš pirmojo fondo, $p_2$ šakos kiekviena įmonė siekia gauti po $2mln.$ sumą iš antrojo fondo, $p_3$ šakos kiekviena įmonė siekia gauti po $3mln.$ sumą iš trečiojo fondo, $p_4$ šakos kiekviena įmonė siekia gauti po $2mln.$ sumą iš pirmojo fondo ir $p_5$ šakos kiekviena įmonė siekia gauti po $1mln.$ sumą iš pirmojo fondo. Analogiškai, rinkiniai $(4, 4, 3, 4, 1)$, $(3, 3, 1, 5, 3)$, $(5, 1, 5, 3, 5)$, ir $(4, 7, 2, 3, 2)$ reiškia pinigų dalybas gautas iš antrojo, trečiojo, ketvirtojo ir penktojo fondų. Nustatykite, kiek kiekvienos pramonės šakos įmonių galėtų pasidalinti fondų pinigus, jei tai įmanoma?

7. Žinoma, kad mokyklos bendrosios pajamos priklauso nuo susirinkusių į mokyklą mokinių skaičiaus (krepšelių skaičiaus).

Tarkime, kad pirmoji mokykla surinko 2,5 mln. litų, antroji 3 mln. litų, o trečioji 1,8 mln. litų. Mokykloje dirba trijų kategorijų darbuotojai: Administracijos darbuotojai, mokytojai bei aptarnaujantis personalas. Žinoma, kad pirmoje mokykloje dirba 5 administracijos atstovai, keturiasdešimt mokytojų bei penkiolika aptarnaujančio personalo, trumpai (4, 50, 12), antroje (6, 60, 10) ir trečioje (7, 50, 18). Visos mokyklos priklauso tam pačiam regionui, tad atitinkamų kategorijų asmenų atlyginimai turi būti vienodi. Nustatykite kiekvienos kategorijos darbuotojo mėnesio atlyginimo dydį. Nustatykite, atlyginimų dydžius, jei krepšeliai padidės 10%.