Paskaitų konspektas

DINAMINIAI DRAUDOS MATEMATIKOS MODELIAI

Surašė **Jonas Šiaulys**

2008 metais

Naudota literatūra

1. Dickson D.C.M., Insurance Risk and Ruin. *Cambridge university press* 2005.

2. Embrechts P., Klüppelberg C., Mikosch T., Modeling Extremal Events for Insurance and Finance. *Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York* 2005.

3. T. Mikosch, Non-Life Insurance Mathematics, *Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York* 2004.

4. H. Pragarauskas, Draudos matematika, *Matematikos ir informatikos institutas, Vilnius* 2007.

I. Dinaminis diskretaus laiko rizikos modelis

1.1 Disktetaus laiko rizikos modelio sudedamosios dalys

Diskretaus laiko rizikos modelis yra paprasčiausias modelis aprašantis draudiko kapitalo kitimą bėgant laikui. Pažymėkime simboliu $U_d(n)$ draudiko valdomą turtą laiko momentu $n \in \{0\} \cup \mathbb{N}$. Pagal diskretaus laiko rizikos modelį bet kuriam tokiam n

$$U_d(n) = u + cn - \sum_{i=1}^{n} Z_i.$$

Paskutinėje lygybėje:

• $u = U_d(0)$ yra draudiko pradinis turtas t.y. draudiko turtas pradiniu laiko momentu $n = 0$.

• $Z_1, Z_2, Z_3, \ldots$ yra nepriklausomi vienodai pasiskirstę neneigiami atsitiktiniai dydžiai. Atsitiktinis dydis Z_i nusako draudiko žalos dydį i-tuoju laiko momentu.

• c yra premijų surinkimo greitis per laiko vienetą. Laikome, kad šis greitis yra pastovus, nepriklausantis nuo laiko.

Indeksą d užraše $U_d(n)$ naudojame norėdami pabrėžti proceso U diskretumą. Šiame skyriuje toliau nagrinėsime supaprastintą diskretaus laiko rizikos modelį. Laikome, kad

$$U_d(n) = u + n - \sum_{i=1}^{n} Z_i \tag{1}$$

ir tenkinami tokie apribojimai:

•• Draudiko turtas pradiniu laiko momentu $u = U_d(0)$ yra neneigiamas sveikasis skaičius, t.y. $u \in \{0\} \cup \mathbb{N}$.

•• Žalos $Z_1, Z_2, Z_3, \ldots$ yra nepriklausomi vienodai pasiskirstę neneigiami sveikareikšmiai atsitiktiniai dydžiai, kuriems

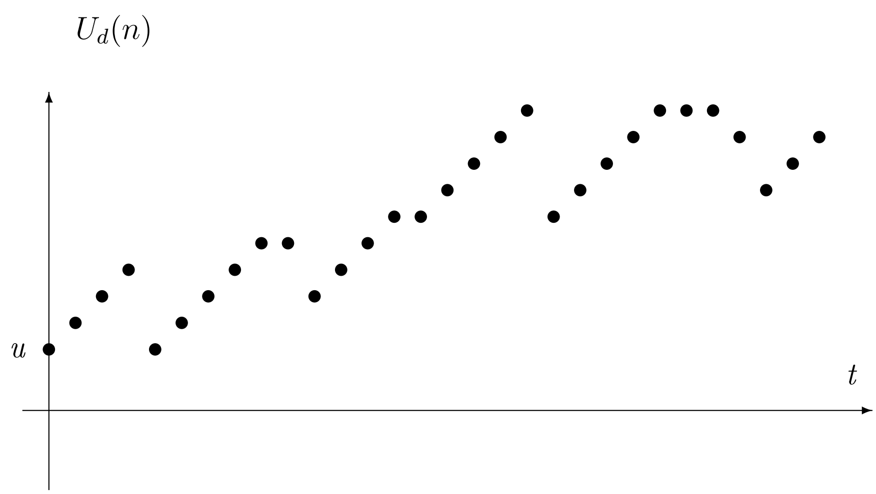
$$\mathbb{P}(Z_1 = k) = h_k, \quad k = 0, 1, 2, 3, \ldots,$$

$$H(x) = \mathbb{P}(Z_1 \leqslant x) = \sum_{\substack{k \in \{0,1,2,\ldots\} \\ k \leqslant x}} h_k$$

ir

$$\mathbb{E}Z_1 = \sum_{k=1}^{\infty} kh_k \ < 1.$$

Iš (1) lygybės nusakančios supaprastintą diskretaus laiko rizikos modelį nesunku pastebėti, kad premijų surinkimo greitis jame lygus 1. Reikalavimas $\mathbb{E}Z_1 < 1$ reiškia, kad premijų surinkimo greitis yra didesnis už gresiančios žalos vidurkį. Vadinasi, supaprastinto diskretaus laiko rizikos modelio atveju $1 = (1+\theta)\mathbb{E}Z_1$ su teigiamu apsaugos koeficijentu θ. Supaprastintas diskretaus laiko modelis, be abejo, yra paprastesnis už modelį aprašytą skyrelio pradžioje. Nesunku pastebėti, kad esant patenkintiems išvardintiems apribojimams, supaprastintas procesas $U_d(n)$ įgyja tik neneigiamas sveikas reikšmes. Antra vertus, tiek bendras diskretaus laiko rizikos procesas, tiek ir supaprastintas diskretaus laiko dinaminis rizikos procesas gali būti taikomi draudimo įmonės veiklos aprašymui. Aišku, kad norint pritaikyti supaprastintą rizikos modelį reikia tinkamai parinkti turto matavimo ir laiko matavimo vienetus. Proceso $U_d(n)$ vystymosi būdingas grafikas turi tokį pavidalą



Per laiko vienetą draudiko turtas gali padidėti vienetu, jeigu žala buvo lygi 0, gali nepasikeisti, jeigu įvyko žala lygi 1, gali sumažėti sveiku turto vienetų skaičiumi, jeigu įvyko žala didesnė už vienetą.

1.2 Bankroto tikimybė diskretaus laiko rizikos modelyje

Sakykime, kad draudiko turto kitimą aprašo diskretaus laiko rizikos modelis nusakytas (1) lygybe, t.y.

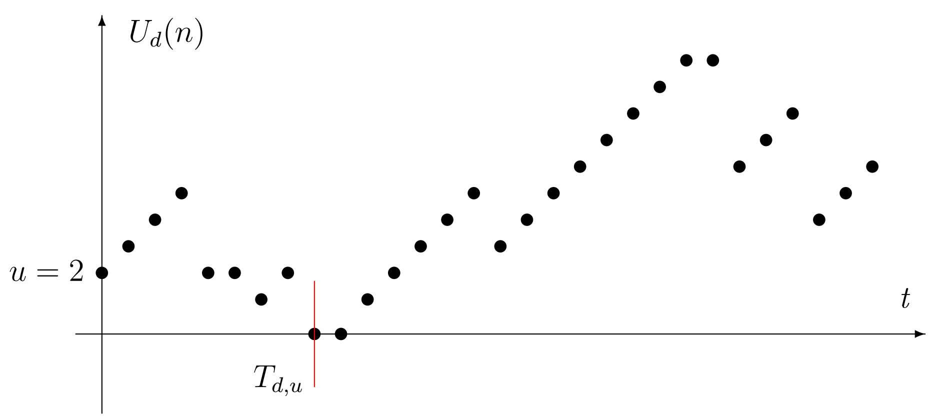
$$U_d(n) = u + n - \sum_{i=1}^{n} Z_i.$$

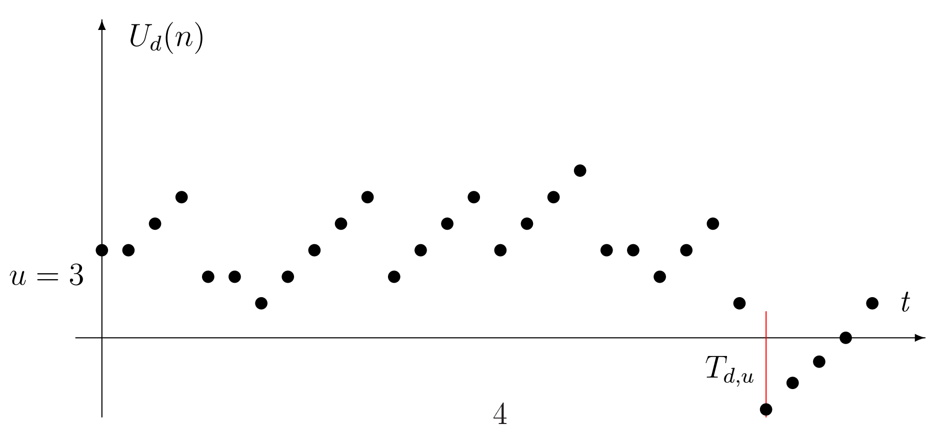
Jeigu kokiu nors laiko momentu $n \geqslant 1$ draudiko turto vertė $U_d(n)$ nukrito iki 0, arba tapo neigiama, tai laikysime, kad įvyko bankrotas. Laiko momentą, kai draudiko turtas pirmą kartą nukrito iki 0, arba tapo neigiamas, vadinsime bankroto laiku ir žymėsime $T_{d,u}$. Aišku, kad $T_{d,u}$ yra atsitiktinis dydis. Be to,

$$T_{d,u} = \min\{n \geqslant 1 : U_d(n) \leqslant 0\}$$

ir $T_{d,u} = \infty$, jeigu $U_d(n) > 0$ visiems $n = 1, 2, 3, ...$

Žemiau nubrėžtos dvi diskretaus laiko rizikos proceso $U_d(n)$ su bankrotu trajektorijos.





Pirmame grafike matosi, kad bankrotas laiko momentu $T_{d,2} = 9$ įvyksta dėl to, kad draudiko kapitalas šiuo momentu pasibaigia. Antras grafikas rodo, kad bankrotas įvyksta laiko momentu $T_{d,3} = 26$, nes šiuo momentu draudiko turtas pirmą kartą tampa neigiamas. Pirmuoju atveju bankrotą sukelia žala $Z_9 = 3$, o antruoju atveju draudiką pribaigia žala $Z_{26} = 5$. Tikimybė

$$\begin{aligned}\psi_d(u) &= \mathbb{P}(T_{d,u} < \infty)\\ &= \mathbb{P}\left(u + n - \sum_{i=1}^{n} Z_i \leqslant 0 \ \text{ kažkokiam } \ n \in \mathbb{N}\right) \qquad (2)\end{aligned}$$

vadinama bankroto tikimybe diskretaus laiko rizikos procesui. Aišku, kad bankroto tikimybė priklauso nuo pradinio draudiko kapitalo u ir nuo atsitiktinių dydžių $Z_1, Z_2, Z_3, \dots$ Pagrindiniu kintamuoju laikomas u, todėl bankroto tikimybę žymime simboliu $\psi_d(u)$. Indeksas d pridedamas norint pabrėžti, kad tai yra bankroto tikimybė diskrečiajam rizikos modeliui.

1.3 Bankroto tikimybės skaičiavimas diskretaus laiko rizikos modelyje

Šiame skyrelyje išvesime keletą lygybių, kurias tenkina diskretaus rizikos proceso bankroto tikimybė. Remiantis gautomis lygybėmis galima paskaičiuoti minėtą bankroto tikimybę esant žinomam žalos Z_1 skirstiniui.

1.3.1 Lema. *Sakykime $\psi_d(u)$ yra bankroto tikimybė disrečiame rizikos modelyje, apibrėžta (2) lygybe. Sakykime, be to, patenkintos 1.1 skyrelyje išvardintos sąlygos:*

- *pradinis kapitalas $u \in \{0\} \cup \mathbb{N}$,*
- *atsitiktiniai dydžiai $Z_1, Z_2, Z_3, \dots$ nepriklausomi, vienodai pasiskirstę, įgyjantys reikšmes aibėje $\{0\} \cup \mathbb{N}$,*
- *$\mathbb{P}(Z_1 = k) = h_k$, kai $k = 0, 1, 2, 3, \dots$.*

Tada visiems $u = 0, 1, 2, 3, \dots$ teisinga lygybė

$$\psi_d(u) = \sum_{r=1}^{u+1} h_{u+1-r}\psi_d(r) + 1 - H(u), \qquad (3)$$

čia $H(u)$ yra atsitiktinio dydžio Z_1 pasiskirstymo funkcija, t.y.

$$H(u) = \mathbb{P}(Z_1 \leqslant u) = \sum_{\substack{k \in \{0,1,2,\dots\} \\ k \leqslant u}} h_k.$$

$\triangle$ Kadangi atsitiktinis dydis Z_1 įgyja tik sveikas neneigiamas reikšmes, tai bet kuriam neneigiamam u

$$
\begin{aligned}
\psi_d(u) &= \mathbb{P}\left(u+n-\sum_{i=1}^{n} Z_i \leqslant 0 \ \text{ kažkokiam } n\in\mathbb{N}\right) \\
&= \mathbb{P}\left(u+n-\sum_{i=1}^{n} Z_i \leqslant 0 \ \text{ kažkokiam } n\in\mathbb{N},\ Z_1\leqslant u\right) \\
&+ \mathbb{P}\left(u+n-\sum_{i=1}^{n} Z_i \leqslant 0 \ \text{ kažkokiam } n\in\mathbb{N},\ Z_1> u\right) \\
&= \sum_{j=0}^{u}\mathbb{P}\left(u+n-\sum_{i=1}^{n} Z_i \leqslant 0 \ \text{ kažkokiam } n\in\mathbb{N},\ Z_1= j\right) \\
&+ \mathbb{P}\left(Z_1>u\right) \\
&= \sum_{j=0}^{u}\mathbb{P}\left(u+n-j-\sum_{i=2}^{n} Z_i \leqslant 0 \ \text{ kažkokiam } n\geqslant 2,\ Z_1= j\right) \\
&+ 1-H(u)
\end{aligned}
$$

Atsitiktiniai dydžiai $Z_1, Z_2, Z_3, ...$ yra vienodai pasiskirstę ir nepriklausomi. Vadinasi,

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left(u+n-j-\sum_{i=2}^{n} Z_i \leqslant 0 \ \text{ kažkokiam } n\geqslant 2,\ Z_1= j\right) \\
=\ &\mathbb{P}\left(u+n-j-\sum_{i=2}^{n} Z_i \leqslant 0 \ \text{ kažkokiam } n\geqslant 2\right)\mathbb{P}(Z_1=j) \\
=\ &\mathbb{P}\left(u+n-j-\sum_{i=1}^{n-1} Z_i \leqslant 0 \ \text{ kažkokiam } n\geqslant 2\right)h_j \\
=\ &\mathbb{P}\left(u+1-j+m-\sum_{i=1}^{m} Z_i \leqslant 0 \ \text{ kažkokiam } m\in\mathbb{N}\right)h_j \\
=\ &\psi_d(u+1-j)h_j
\end{aligned}
$$

Paskutiniąją lygybę įstatę į ankstesniąją, gauname

$$\psi_d(u)=\sum_{j=0}^{u}\psi_d(u+1-j)h_j \ +1-H(u).$$

Šioje lygybėje pakeitę sumavimo kintamąjį j į $r=u+1-j$, gauname lemos (3) lygybę . $\triangle$

1.3.2 Lema. *Sakykime $\psi_d(u)$ yra bankroto tikimybė disrečiame rizikos modelyje, apibrėžta (2) lygybe. Jeigu patenkintos 1.3.1 lemos sąlygos, tai bet kuriam $w = 0, 1, 2, 3, \ldots$ teisinga lygybė*

$$\psi_d(w) = \psi_d(0) + \sum_{r=1}^{w} \psi_d(r)\left(1 - H(w-r)\right) - \sum_{r=0}^{w-1}\left(1 - H(r)\right). \tag{4}$$

Čia, kaip ir anksčiau, $H(u)$ yra atsitiktinio dydžio Z_1 pasiskirstymo funkcija, o suma

$$\sum_{j=a}^{b},$$

kai $b < a$, laikoma lygi nuliui.

$\triangle$ Iš 1.3.1 lemoje įrodytos (3) lygybės išplaukia, kad

$$\begin{aligned}
\sum_{u=0}^{w} \psi_d(u) &= \sum_{u=0}^{w}\sum_{r=1}^{u+1} h_{u+1-r}\psi_d(r) + \sum_{u=0}^{w}(1 - H(u)) \\
&= \sum_{r=1}^{w+1} \psi_d(r) \sum_{u=r-1}^{w} h_{u+1-r} + \sum_{u=0}^{w}(1 - H(u)) \\
&= \sum_{r=1}^{w+1} \psi_d(r) H(w+1-r) + \sum_{u=0}^{w}(1 - H(u)) \\
&= \sum_{r=1}^{w} \psi_d(r) H(w+1-r) + \psi_d(w+1)h_0 \\
&+ \sum_{u=0}^{w}(1 - H(u)),
\end{aligned}$$

nes

$$H(0) = \sum_{\substack{k\in\{0,1,2,\ldots\} \\ k\leqslant 0}} h_k = h_0.$$

Taigi,

$$\psi_d(w+1)h_0 = \psi_d(0) + \sum_{r=1}^{w} \psi_d(r)\left(1 - H(w+1-r)\right) - \sum_{u=0}^{w}(1 - H(u)). \tag{5}$$

Antra vertus, iš tos pačios (3) lygybės nesunku pastebėti, kad

$$\begin{aligned}
\psi_d(w) &= \sum_{r=1}^{w+1} h_{w+1-r}\psi_d(r) + 1 - H(w) \\
&= h_0\psi_d(w+1) + \sum_{r=1}^{w} h_{w+1-r}\psi_d(r) + 1 - H(w).
\end{aligned}$$

Vadinasi,

$$\psi_d(w+1)h_0 = \psi_d(w) - \sum_{r=1}^{w} h_{w+1-r}\psi_d(r) - (1 - H(w)) \tag{6}$$

Sulyginę (5) ir (6) lygybių dešiniąsias puses, gauname

$$\begin{aligned}
\psi_d(w) &= \psi_d(0) + \sum_{r=1}^{w} \psi_d(r)\,(1 - H(w+1-r)) \\
&+ \sum_{r=1}^{w} h_{w+1-r}\psi_d(r) - \sum_{u=0}^{w}(1 - H(u)) + (1 - H(w)) \\
&= \psi_d(0) + \sum_{r=1}^{w} \psi_d(r)\,(1 - H(w+1-r) + h_{w+1-r}) \\
&- \sum_{u=0}^{w-1}(1 - H(u)) \\
&= \psi_d(0) + \sum_{r=1}^{w} \psi_d(r)\,(1 - H(w-r)) - \sum_{u=0}^{w-1}(1 - H(u)),
\end{aligned}$$

nes

$$\begin{aligned}
1 - H(w+1-r) + h_{w+1-r} &= \sum_{k>w+1-r} h_k + h_{w+1-r} \\
&= \sum_{k>w-r} h_k = 1 - H(w-r).
\end{aligned}$$

$\triangle$

1.3.3 Lema. *Sakykime patenkintos 1.3.1 lemos sąlygos ir atsitiktinio dydžio Z_1 vidurkis*

$$\mathbb{E}Z_1 = \sum_{k=1}^{\infty} k h_k < 1$$

Tada visoms pradinio kapitalo reikšmėms $u = 0, 1, 2, 3, \ldots$ bankroto tikimybė $\psi_d(u)$ mažesnė už vienetą:

$$\psi_d(u) < 1. \tag{7}$$

$\triangle$ Iš 1.3.2 lemos lygybės bet kuriam $w = 0, 1, 2, \ldots$ turime:

$$\psi_d(w) = \psi_d(0) + \sum_{r=1}^{\infty} \psi_d(r)\mathbb{I}_{\{r \leqslant w\}}\,(1 - H(w-r)) - \sum_{r=0}^{w-1}(1 - H(r)) \tag{8}$$

Pagal apibrėžimą (žr. (2))

$$\begin{aligned}\psi_d(w) &= \mathbb{P}\left(w + n - \sum_{i=1}^{n} Z_i \leqslant 0 \ \text{ kažkokiam } \ n \in \mathbb{N}\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\inf_{n\geqslant 1} \sum_{i=1}^{n} (Z_i - 1) \geqslant w\right) \\ &= 1 - \mathbb{P}\left(\sup_{n\geqslant 1} \sum_{i=1}^{n} (Z_i - 1) < w\right)\end{aligned}$$

Kadangi

$$\mathbb{E}Z_1 - 1 = -\mu < 0,$$

tai pagal stiprų didžiųjų skaičių dėsnį

$$\frac{S_n}{n} := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(Z_i - 1) \to -\mu < 0$$

beveik visur.

Iš čia išplaukia, kad

$$\mathbb{P}\left(\sup_{m\geqslant n}\left|\frac{S_m}{m} + \mu\right| < \frac{\mu}{2}\right) \underset{n\to\infty}{\to} 1.$$

Tačiau

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\bigcap_{m=n}^{\infty}\{S_m \leqslant 0\}\right) &\geqslant \mathbb{P}\left(\bigcap_{m=n}^{\infty}\left\{S_m < -\frac{\mu}{2}m\right\}\right) \\ &\geqslant \mathbb{P}\left(\sup_{m\geqslant n}\left|\frac{S_m}{m} + \mu\right| < \frac{\mu}{2}\right).\end{aligned}$$

Vadinasi, bet kokiam teigiamam ε atsiras natūralusis N_ε, kuriam

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{m=n}^{\infty}\{S_m \leqslant 0\}\right) \geqslant 1 - \varepsilon$$

visiems $n \geqslant N_\varepsilon$.

Aišku, kad bet kuriam teigiamam w

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\sup_{n\geqslant 1} S_n < w\right) &= \mathbb{P}\left(\left(\bigcap_{m=1}^{N_\varepsilon - 1}\{S_m < w\}\right) \cap \left(\bigcap_{m=N_\varepsilon}^{\infty}\{S_m < w\}\right)\right) \\ &\geqslant \mathbb{P}\left(\bigcap_{m=1}^{N_\varepsilon - 1}\{S_m < w\}\right) + \mathbb{P}\left(\bigcap_{m=N_\varepsilon}^{\infty}\{S_m \leqslant 0\}\right) - 1\end{aligned}$$

$$\geqslant \mathbb{P}\left(\bigcap_{m=1}^{N_\varepsilon-1}\{S_m < w\}\right) - \varepsilon.$$

Šioje nelygybėje perėję prie ribos kai w artėja į begakybę, gauname, kad

$$\lim_{w\to\infty} \mathbb{P}\left(\sup_{n\geqslant 1} S_n < w\right) \geqslant 1-\varepsilon$$

bet kuriam teigiamam ε.

Vadinasi,

$$\lim_{w\to\infty} \mathbb{P}\left(\sup_{n\geqslant 1} S_n < w\right) = 1$$

ir

$$\lim_{w\to\infty} \psi_d(w) = 0. \tag{9}$$

Kadangi žalos Z_1 vidurkio egzistavimas leidžia pereiti prie ribos (kai w artėja į begalybę) po pirmuoju sumos ženklu (8) lygybėje, tai iš (8) ir (9) lygybių išplaukia, kad

$$\psi_d(0) = \sum_{r=0}^{\infty}(1-H(r)) = \sum_{k=1}^{\infty} k h_k < 1.$$

Tuo labiau

$$\psi_d(u) \leqslant \psi_d(0) < 1.$$

bet kuriai pradinio kapitalo reikšmei $u \geqslant 1$. △

1.3.1 Teorema. *Sakykime patenkintos 1.3.1 lemos sąlygos:*

- *pradinis kapitalas* $u \in \{0\} \cup \mathbb{N}$,
- *atsitiktiniai dydžiai* $Z_1, Z_2, Z_3, \ldots$ *nepriklausomi, vienodai pasiskirstę, įgyjantys reikšmes aibėje* $\{0\} \cup \mathbb{N}$,
- $\mathbb{P}(Z_1 = k) = h_k$, *kai* $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$. *Tegul, be to, atsitiktinio dydžio* Z_1 *vidurkis*

$$\mathbb{E}Z_1 = \sum_{k=1}^{\infty} k h_k < 1$$

Tada visiems $u = 0, 1, 2, 3, \ldots$ *bankroto tikimybė* $\psi_d(u)$ *tenkina lygybę*

$$\psi_d(u) = \sum_{y=0}^{u-1}(1-H(y))\,\psi_d(u-y) + \sum_{y=u}^{\infty}(1-H(y)) \tag{10}$$

△ Bet kuriam $y = 0, 1, 2, \ldots$ apibrėžiame dydžius

$$g_d(y) = \mathbb{P}\left(\{T_{d,0} < \infty\} \cap \left\{T_{d,0} - \sum_{i=1}^{T_{d,0}} Z_i = -y\right\}\right).$$

Dydis $g_d(y)$ lygus tikimybei, kad bankrotas diskretaus laiko rizikos modelyje su nuliniu pradiniu kapitalu įvyks ir bankroto momentu draudiko turimo kapitalo deficitas bus lygus y.

Pradžioje įrodysime, kad bet kuriam $u = 0, 1, 2, \ldots$ teisinga tokia lygybė

$$\psi_d(u) = \sum_{y=0}^{u-1} g_d(y)\psi_d(u-y) + \sum_{y=u}^{\infty} g_d(y). \tag{11}$$

Kai $u = 0$, tai iš tikimybių savybių gauname

$$\begin{aligned}
\psi_d(0) &= \mathbb{P}\left(T_{d,0} < \infty\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\bigcup_{y=0}^{\infty}\left\{\{T_{d,0} < \infty\} \cap \left\{T_{d,0} - \sum_{i=1}^{T_{d,0}} Z_i = -y\right\}\right\}\right) \\
&= \sum_{y=0}^{\infty} \mathbb{P}\left(\{T_{d,0} < \infty\} \cap \left\{T_{d,0} - \sum_{i=1}^{T_{d,0}} Z_i = -y\right\}\right) \\
&= \sum_{y=0}^{\infty} g_d(y).
\end{aligned}$$

Jeigu pradinis draudiko kapitalas $u \geqslant 1$, tai analogiškai

$$\begin{aligned}
\psi_d(u) &= \mathbb{P}\left(u + n - \sum_{i=1}^{n} Z_i \leqslant 0 \ \text{ kažkokiam } n \in \mathbb{N}\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\left\{n - \sum_{i=1}^{n} Z_i \leqslant -u\right\}\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\left\{\bigcup_{n=1}^{\infty}\left\{n - \sum_{i=1}^{n} Z_i \leqslant -u\right\}\right\} \cap \{T_{d,0} < \infty\}\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\bigcup_{y=0}^{\infty}\left\{\left\{\bigcup_{n=1}^{\infty}\left\{n - \sum_{i=1}^{n} Z_i \leqslant -u\right\}\right\}\right.\right. \\
&\qquad \left.\left.\cap \{T_{d,0} < \infty\} \cap \left\{T_{d,0} - \sum_{i=1}^{T_{d,0}} Z_i = -y\right\}\right\}\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{y=0}^{\infty} \mathbb{P}\left(\left\{\bigcup_{n=1}^{\infty}\left\{n-\sum_{i=1}^{n} Z_i \leqslant -u\right\}\right\}\right. \\
&\qquad \left. \cap \{T_{d,0}<\infty\} \cap \left\{T_{d,0}-\sum_{i=1}^{T_{d,0}} Z_i = -y\right\}\right) \\
&= \sum_{y=0}^{\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\left\{n-\sum_{i=1}^{n} Z_i \leqslant -u,\right.\right. \\
&\qquad \left.\left. T_{d,0}<\infty,\ T_{d,0}-\sum_{i=1}^{T_{d,0}} Z_i = -y\right\}\right). \qquad (12)
\end{aligned}
$$

Jeigu $y \geqslant u$, tai

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\left\{n-\sum_{i=1}^{n} Z_i \leqslant -u,\ T_{d,0}<\infty,\ T_{d,0}-\sum_{i=1}^{T_{d,0}} Z_i = -y\right\}\right) \\
&\qquad = \mathbb{P}\left(T_{d,0}<\infty,\ T_{d,0}-\sum_{i=1}^{T_{d,0}} Z_i = -y\right) = g_d(y).
\end{aligned}
$$

O jeigu $y < u$, tai iš lemos sąlygų ir tikimybių savybių išplaukia:

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\left\{n-\sum_{i=1}^{n} Z_i \leqslant -u,\ T_{d,0}<\infty,\ T_{d,0}-\sum_{i=1}^{T_{d,0}} Z_i = -y\right\}\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=T_{d,0}+1}^{\infty}\left\{n-\sum_{i=1}^{n} Z_i \leqslant -u,\ T_{d,0}<\infty,\ T_{d,0}-\sum_{i=1}^{T_{d,0}} Z_i = -y\right\}\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=T_{d,0}+1}^{\infty}\left\{n-T_{d,0}-\sum_{i=T_{d,0}+1}^{n} Z_i \leqslant -(u-y),\right.\right. \\
&\qquad \left.\left. T_{d,0}<\infty,\ T_{d,0}-\sum_{i=1}^{T_{d,0}} Z_i = -y\right\}\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\left\{\bigcup_{n=T_{d,0}+1}^{\infty}\left\{n-T_{d,0}-\sum_{i=T_{d,0}+1}^{n} Z_i \leqslant -(u-y)\right\}\right\}\right. \\
&\qquad \left. \cap \left\{T_{d,0}<\infty,\ T_{d,0}-\sum_{i=1}^{T_{d,0}} Z_i = -y\right\}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \mathbb{P}\left(\left\{\bigcup_{n=T_{d,0}+1}^{\infty}\left\{n - T_{d,0} - \sum_{i=1}^{n-T_{d,0}} Z_i \leqslant -(u-y)\right\}\right\} \cap \{T_{d,0} < \infty\}\right) \\
&\quad \mathbb{P}\left(\left\{T_{d,0} < \infty,\ T_{d,0} - \sum_{i=1}^{T_{d,0}} Z_i = -y\right\}\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\bigcup_{m=1}^{\infty}\left\{m - \sum_{i=1}^{m} Z_i \leqslant -(u-y)\right\}\right) g_d(y) \\
&= \psi_d(u-y) g_d(y).
\end{aligned}
$$

Gautąsias išraiškas sustatę į (12) formulę gauname (11) lygybę.

Kadangi

$$
\psi_d(0) = \sum_{y=0}^{\infty} g_d(y),
$$

tai (11) lygybę galima perrašyti šitaip:

$$
\begin{aligned}
\psi_d(u) &= \sum_{y=0}^{u-1} g_d(y)\psi_d(u-y) + \psi_d(0) - \sum_{y=0}^{u-1} g_d(y) \\
&= \psi_d(0) + \sum_{y=1}^{u} g_d(u-y)\psi_d(y) - \sum_{y=0}^{u-1} g_d(y). \qquad (13)
\end{aligned}
$$

1.3.2 lemoje buvo įrodyta panaši (4) lygybė:

$$
\psi_d(u) = \psi_d(0) + \sum_{y=1}^{u} \psi_d(y)\left(1 - H(u-y)\right) - \sum_{y=0}^{u-1}\left(1 - H(y)\right). \qquad (14)
$$

Abi gautos lygybės teisingos visiems $u = 0, 1, 2, \ldots.$ Pasirinkę $u = 1$, gauname

$$
\begin{aligned}
\psi_d(1) &= \psi_d(0) + \psi_d(1)(1 - H(0)) - (1 - H(0)) \\
\psi_d(1) &= \psi_d(0) + \psi_d(1) g_d(0) - g_d(0)
\end{aligned}
$$

Iš čia:

$$
(\psi_d(1) - 1)(1 - H(0) - g_d(0)) = 0.
$$

Kadangi $\psi_d(1) < 1$ (žiūrėkite 1.3.3 lemos (7) nelygybę), tai iš paskutinės lygybės gauname,kad

$$
g_d(0) = 1 - H(0).
$$

(13) ir (14) lygybėse pasirinkę $u = 2$, gauname

$$
\begin{aligned}
\psi_d(2) &= \psi_d(0) + \psi_d(1)(1 - H(1)) + \psi_d(2)(1 - H(0)) \\
&- (1 - H(0)) - (1 - H(1)) \\
\psi_d(2) &= \psi_d(0) + \psi_d(1) g_d(1) + \psi_d(2) g_d(0) - g_d(0) - g_d(1)
\end{aligned}
$$

Vadinasi,

$$(\psi_d(1)-1)(1-H(1)-g_d(1))=0$$

ir

$$g_d(1)=1-H(1).$$

Tęsdami pradėtą procesą gausime, kad

$$g_d(u)=1-H(u)$$

bet kuriai pradinio kapitalo vertei $u=0,1,2,\ldots$. Įstatę šią gautąją funkcijos $g_d(u)$ išraišką į (13) lygybę gauname teoremos tvirtinimą. $\triangle$

1.3.1 teoremoje įrodyta (10)išraiška įgalina apskaičiuoti bankroto tikimybes visoms pradinio kapitalo u vertėms. Iš tiesų, pasirinkę u reikšmes didėjančia tvarka, gauname:

$$\begin{aligned}
\psi_d(0) &= \sum_{y=0}^{\infty}(1-H(y))=\mathbb{E}Z_1,\\
\psi_d(1) &= (1-H(0))\psi_d(1)+\sum_{y=1}^{\infty}(1-H(y)),\\
\psi_d(2) &= (1-H(0))\psi_d(2)+(1-H(1))\psi_d(1)+\sum_{y=2}^{\infty}(1-H(y)),\\
\psi_d(3) &= (1-H(0))\psi_d(3)+(1-H(1))\psi_d(2)+(1-H(2))\psi_d(3)\\
&+ \sum_{y=3}^{\infty}(1-H(y)),\\
& - - -\\
\psi_d(u) &= \sum_{y=0}^{u-1}(1-H(y))\,\psi_d(u-y)+\sum_{y=u}^{\infty}(1-H(y))\,.
\end{aligned}$$

Formulėse, kaip ir anksčiau, $H(u)$ yra atsitiktinio dydžio Z_1 pasiskirstymo funkcija. Iš užrašytų lygybių matosi, kad bankroto tikimybes $\psi_d(u)$ reikia skaičiuoti paeiliui. Pradžioje randame $\psi_d(0)$, po to $\psi_d(1)$, po to $\psi_d(2)$ ir t.t. Tokia bankroto tikimybių skaičiavimo procedūra įprastai vadinama rekursija.

Toliau šiame skyrelyje pateiksime kelis bankroto tikimybių skaičiavimo pavyzdžius.

1.3.1 Pavyzdys. *Sakykime žala supaprastintame diskretaus laiko rizikos modelyje pasiskirsčiusi pagal tokį dėsnį:*

Z_1	0	2
$\mathbb{P}$	p	$1-p$

su parametru $p \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$. Rasime bankroto tikimybės $\psi_d(u)$ išraišką.

$\triangle$ Kadangi nagrinėjamu atveju

$$\mathbb{E}Z_1 = 2(1-p) < 1,$$

tai pagal 1.3.1 teoremoje išvestą lygybę

$$\psi_d(0) = \sum_{y=0}^{\infty}(1 - H(y)) = \mathbb{E}Z_1 = 2(1-p).$$

Nesunku pastebėti, kad nagrinėjamu atveju

$$\begin{aligned} H(O) &= p, \\ H(1) &= p, \\ H(k) &= 1, \ k \geqslant 2. \end{aligned}$$

Vadinasi, iš 1.3.1 teoremoje įrodytos lygybės gauname

$$\begin{aligned} \psi_d(1) &= (1 - H(0))\psi_d(1) + \sum_{y=1}^{\infty}(1 - H(y)) \\ &= (1-p)\psi_d(1) + (1-p) \end{aligned}$$

Taigi

$$\psi_d(1) = \frac{1-p}{p}.$$

Analogiškai, bet kuriam $u = 2, 3, ...$ iš (10) lygybės gauname

$$\begin{aligned} \psi_d(u) &= \sum_{y=0}^{u-1}(1 - H(y))\,\psi_d(u-y) + \sum_{y=u}^{\infty}(1 - H(y)) \\ &= (1-p)\psi_d(u) + (1-p)\psi_d(u-1) \end{aligned}$$

Iš čia

$$\psi_d(u) = \frac{1-p}{p}\psi_d(u-1).$$

Todėl bet kuriam natūraliąjam $u \geqslant 2$

$$\begin{aligned} \psi_d(u) &= \frac{1-p}{p}\psi_d(u-1) \\ &= \left(\frac{1-p}{p}\right)^2 \psi_d(u-2) = \left(\frac{1-p}{p}\right)^3 \psi_d(u-3) = ... \\ &= \left(\frac{1-p}{p}\right)^{u-1} \psi_d(1) = \left(\frac{1-p}{p}\right)^u. \end{aligned}$$

Taigi, nagrinėjamu atveju

$$\psi_d(u) = \begin{cases} 2(1-p), & \text{jeigu } u = 0, \\ \left(\frac{1-p}{p}\right)^u, & \text{jeigu } u \geqslant 1. \end{cases}$$

$\triangle$

1.3.2 Pavyzdys. *Sakykime žala supaprastintame diskretaus laiko rizikos modelyje pasiskirsčiusi pagal apibendrintą geometrinį dėsnį, t.y.:*

$$\mathbb{P}\left(Z_1 = 0\right) = p,\ \mathbb{P}\left(Z_1 = k\right) = (1-p)(1-\alpha)\alpha^{k-1}, k = 1, 2, 3, ...$$

su parametrais $p \in (0,1)$ ir $\alpha \in (0,p)$. Rasime bankroto tikimybės $\psi_d(u)$ išraišką.

$\triangle$ Pradžioje rasime pasiskirstymo funkcijos $H(k)$ reikšmes sveikiems neneigiamiems k. Iš atsitiktinio dydžio Z_1 skirstinio gauname:

$$\begin{aligned} H(0) &= \mathbb{P}\left(Z_1 = 0\right) = p = 1-(1-p), \\ H(1) &= \mathbb{P}\left(Z_1 = 0\right) + \mathbb{P}\left(Z_1 = 1\right) = 1-(1-p)\alpha, \\ H(k) &= \mathbb{P}\left(Z_1 = 0\right) + \mathbb{P}\left(Z_1 = 1\right) + ... + \mathbb{P}\left(Z_1 = k\right) \\ &= p + (1-p)(1-\alpha)(1+\alpha+\alpha^2+...+\alpha^{k-1}) \\ &= 1-(1-p)\alpha^k,\ k \geqslant 2. \end{aligned}$$

Vadinasi,

$$\mathbb{E}Z_1 = \sum_{k=0}^{\infty}(1-H(k)) = \frac{1-p}{1-\alpha} < 1.$$

Gauname, kad tenkinamos 1.3.1 teoremos sąlygos. Iš tos teoremos pagrindinės (10) lygybės, pasirinkę joje $u = 0$, gauname

$$\psi_d(0) = \mathbb{E}Z_1 = \frac{1-p}{1-\alpha}.$$

Antra vertus įstatę į (10) lygybę pasiskirstymo funkcijos $H(y)$ išraišką bet kokioms pradinio kapitalo $u \geqslant 0$ reikšmėms gauname

$$\begin{aligned} \psi_d(u) &= \sum_{y=0}^{u-1}\left(1-H(y)\right)\psi_d(u-y) + \sum_{y=u}^{\infty}\left(1-H(y)\right) \\ &= \sum_{y=0}^{u-1}(1-p)\alpha^y\psi_d(u-y) + \sum_{y=u}^{\infty}(1-p)\alpha^y \\ &= (1-p)\sum_{y=1}^{u}\alpha^{u-y}\psi_d(y) + (1-p)\sum_{y=u}^{\infty}\alpha^y. \end{aligned} \tag{15}$$

Pakeitę paskutinėje lygybėje u į $u+1$ gauname

$$\psi_d(u+1) \;=\; (1-p)\sum_{y=1}^{u+1}\alpha^{u+1-y}\psi_d(y)+(1-p)\sum_{y=u+1}^{\infty}\alpha^{y}.$$

O padauginę (15) lygybę iš α gauname

$$\alpha\psi_d(u) \;=\; (1-p)\sum_{y=1}^{u}\alpha^{u+1-y}\psi_d(y)+(1-p)\sum_{y=u+1}^{\infty}\alpha^{y}.$$

Paskutiniąją lygybę atėmę iš priešpaskutinės turime

$$\psi_d(u+1)-\alpha\psi_d(u)=(1-p)\psi_d(u+1).$$

Vadinasi, visiems $u\geqslant 0$

$$\psi_d(u+1)=\frac{\alpha}{p}\psi_d(u).$$

Todėl bet kuriam $u\geqslant 1$

$$\begin{aligned}\psi_d(u) &= \frac{\alpha}{p}\psi_d(u-1)=\left(\frac{\alpha}{p}\right)^2\psi_d(u-2)=...\\ &= \left(\frac{\alpha}{p}\right)^u\psi_d(0)=\frac{1-p}{1-\alpha}\left(\frac{\alpha}{p}\right)^u.\end{aligned}$$

Prisiminę $\psi_d(0)$ išraišką pagaliau galime užrašyti, kad

$$\psi_d(u)=\frac{1-p}{1-\alpha}\left(\frac{\alpha}{p}\right)^u$$

visoms pradinio kapitalo reikšmėms $u=0,1,2,...$. △

1.4 Baigtinio laiko bankroto tikimybė diskretaus laiko rizikos modelyje

Sakykime draudiko kapitalas bėgant laikui kinta pagal supaprastintą diskretaus laiko rizikos modelį aprašytą 1.1 skyrelyje, t.y. draudiko kapitalas laiko momentu n užrašomas lygybe

$$U_d(n)=u+n-\sum_{i=1}^{n}Z_i.$$

Be to tenkinami tokie apribojimai:

•• Draudiko turtas pradiniu laiko momentu $u = U_d(0)$ yra neneigiamas sveikasis skaičius, t.y. $u \in \{0\} \cup \mathbb{N}$.

•• Žalos $Z_1, Z_2, Z_3, ...$ yra nepriklausomi vienodai pasiskirstę neneigiami sveikareikšmiai atsitiktiniai dydžiai, kuriems

$$\mathbb{P}(Z_1 = k) = h_k, \quad k = 0, 1, 2, 3, ...,$$

$$H(x) = \mathbb{P}(Z_1 \leqslant x) = \sum_{\substack{k \in \{0,1,2,...\} \\ k \leqslant x}} h_k$$

ir

$$\mathbb{E}Z_1 = \sum_{k=1}^{\infty} k h_k \ < 1.$$

Sakykime $T_{d,u}$ yra bankroto laikas nusakytas 1.2 skyrelyje. Būtent:

$$T_{d,u} = \min\{n \geqslant 1 : U_d(n) \leqslant 0\},$$

ir $T_{d,u} = \infty$, jeigu $U_d(n) > 0$ visiems $n = 1, 2, 3, ...$.

Bet kokiai sveikai laiko reikšmei $t \geqslant 1$ dydis

$$\psi_d(u, t) = \mathbb{P}\left(T_{d,u} \leqslant t\right) \tag{16}$$

vadinamas baigtinio laiko bankroto tikimybe diskretaus laiko rizikos modelyje.

Aišku, kad baigtinio laiko bankroto tikimybė priklauso nuo pradinio draudiko kapitalo u ir nuo laiko t, iki kurio stebimas procesas $U_d(n)$. Taip pat aišku, kad

$$\lim_{t \to \infty} \psi_d(u, t) = \psi_d(u),$$

ir

$$\psi_d(u, t) = \mathbb{P}\left(u + n - \sum_{i=1}^{n} Z_i \leqslant 0 \text{ kažkokiam } \ 1 \leqslant n \leqslant t\right).$$

1.5 Rekursinis baigtinio laiko bankroto tikimybės skaičiavimas

Nesunku pastebėti, kad laiko momentui $t = 1$

$$\begin{aligned} \psi_d(u, 1) &= \mathbb{P}\left(u + 1 - Z_1 \leqslant 0\right) = \mathbb{P}\left(Z_1 \geqslant u + 1\right) \\ &= \sum_{k=u+1}^{\infty} h_k = 1 - H(u). \end{aligned} \tag{17}$$

Tuo tarpu, laiko momentui $t = 2$

$$\begin{aligned}
\psi_d(u,2) &= \mathbb{P}\left(\{u+1-Z_1 \leqslant 0\} \cup \{u+2-(Z_1+Z_2) \leqslant 0\}\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\{Z_1 \geqslant u+1\} \cup \{\{Z_1+Z_2 \geqslant u+2\} \cap \{Z_1 \leqslant u\}\}\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\{Z_1 \geqslant u+1\}\right) \\
&+ \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{u} \{\{Z_1+Z_2 \geqslant u+2\} \cap \{Z_1 = k\}\}\right) \\
&= \psi_d(u,1) + \sum_{k=0}^{u} \mathbb{P}\left(Z_2 \geqslant u+2-k\right) \mathbb{P}\left(Z_1 = k\right) \\
&= \psi_d(u,1) + \sum_{k=0}^{u} \mathbb{P}\left(Z_1 \geqslant (u+1-k)+1\right) h_k \\
&= \psi_d(u,1) + \sum_{k=0}^{u} \psi_d(u+1-k,1) h_k. \qquad (18)
\end{aligned}$$

Na o bet kuriam laiko momentui $t \geqslant 2$ galioja toks tvirtinimas.

1.5.1 Teorema. *Sakykime patenkintos supaprastinto diskretaus laiko rizikos modelio sąlygos:*
- *pradinis kapitalas $u \in \{0\} \cup \mathbb{N}$,*
- *atsitiktiniai dydžiai $Z_1, Z_2, Z_3, \ldots$ nepriklausomi, vienodai pasiskirstę, įgyjantys reikšmes aibėje $\{0\} \cup \mathbb{N}$,*
- *$\mathbb{P}(Z_1 = k) = h_k$, kai $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$.*

Tada visiems $u = 0, 1, 2, 3, \ldots$ ir $t = 2, 3, 4, \ldots$ baigtinio laiko bankroto tikimybė $\psi_d(u,t)$ tenkina lygybę

$$\psi_d(u,t) = \psi_d(u,1) + \sum_{k=0}^{u} \psi_d(u+1-k, t-1) h_k. \qquad (19)$$

△ Teoremos lygybės įrodymas analogiškas (18) lygybės įrodymui. Iš tiesų, taikydami tikimybių savybes, bet kuriam $t \geqslant 2$ gauname:

$$\psi_d(u,t) = \mathbb{P}\left(u + n - \sum_{i=1}^{n} Z_i \leqslant 0 \text{ kažkokiam } n \in \{1,2,3,\ldots,t\}\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= \mathbb{P}\left(Z_1 \geqslant u+1, u+n-\sum_{i=1}^{n} Z_i \leqslant 0 \text{ kažkokiam } n \in \{1,2,3,...,t\}\right)\\
&+ \mathbb{P}\left(Z_1 \leqslant u, u+n-\sum_{i=1}^{n} Z_i \leqslant 0 \text{ kažkokiam } n \in \{1,2,3,...,t\}\right)\\
&= \mathbb{P}\left(Z_1 \geqslant u+1\right)\\
&+ \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{u}\left\{Z_1 = k, u+n-k-\sum_{i=2}^{n} Z_i \leqslant 0 \text{ kažkokiam } n \in \{2,3,...,t\}\right\}\right)\\
&= \psi_d(u,1) + \sum_{k=0}^{u} \mathbb{P}\left(Z_1 = k\right)\\
&\quad \mathbb{P}\left(u+1-k+m-\sum_{i=1}^{m} Z_i \leqslant 0 \text{ kažkokiam } m \in \{1,2,3,...,t-1\}\right)\\
&= \psi_d(u,1) + \sum_{k=0}^{u} \psi_d(u+1-k,t-1)h_k.
\end{aligned}
$$

$\triangle$

Su (17) ir (19) formulių pagalba galima rekursiškai paskaičiuoti baigtinio laiko bankroto tikimybes $\psi_d(u,t)$ bet kurioms pradinio kapitalo u ir laiko intervalo t reikšmėms.

Sakykime, pavyzdžiui, norime surasti bankroto tikimybę $\psi_d(10,4)$.

Iš (19) formulės turime:

$$\psi_d(10,4) = \psi_d(10,1) + \sum_{k=0}^{10} \psi_d(11-k,3)h_k; \tag{20}$$

$$\psi_d(11-k,3) = \psi_d(11-k,1) + \sum_{l=0}^{11-k} \psi_d(12-k-l,2)h_l, \tag{21}$$

visiems $k = 0,1,2,...,10$;

$$
\begin{aligned}
\psi_d(12-(k+l),2) &= \psi_d(12-(k+l),1)\\
&+ \sum_{m=0}^{12-(k+l)} \psi_d(13-(k+l)-m,1)h_m,
\end{aligned}
\tag{22}
$$

visiems $k+l = 0,1,2,...,11$.

O iš (17) formulės matome , kad

$$\psi_d(13-(k+l+m),1) = 1 - H(13-(k+l+m)) \tag{23}$$

visiems $k+l+m=0,1,2,...,12$.

Taigi, norint apskaičiuoti $\psi_d(10,4)$ pradžioje reikia surasti $\psi_d(u,1)$ visoms pradinio kapitalo reikšmėms $u\in\{1,2,...,13\}$ pagal (23) formulę, po to pagal (22) formulę reikia surasti $\psi_d(u,2)$ visoms pradinio kapitalo $u\in\{1,2,...,12\}$ reikšmėms, po to pagal (21) formulę reikia surasti $\psi_d(u,3)$ visoms pradinio kapitalo $u\in\{1,2,...,11\}$ reikšmėms, tada, pagaliau, pagal (20) lygybę rasime norimą bankroto tikimybės $\psi_d(10,4)$ reikšmę.

Norint suskaičiuoti $\psi_d(u,t)$ didelėms u ir t reikšmėms reikia atlikti nemažai skaičiavimų. Operacijų skaičių galima ženkliai sumažinti, jeigu skaičiavimo metu atsirandančias mažas tikimybes laikysime lygiomis nuliui. Toliau šiame skyrelyje aprašysime procedūrą ženkliai sumažinančią skaičiavimo operacijų skaičių. Aišku naudojant žemiau aprašytą procedūrą randama tik apytikrė baigtinio laiko bankroto tikimybės reikšmė. Tačiau norimą tikslumą galima nusistatyti iš anksto, todėl praktiniuose skaičiavimuose aprašytoji procedūra dažnai taikoma.

Sakykime ε yra teigiamas mažas ($\varepsilon<1$) skaičius. Sakykime k_1 yra mažiausia iš k reikšmių, kurioms $H(k)\geqslant 1-\varepsilon$, t.y.

$$H(k_1-1)<1-\varepsilon\leqslant H(k_1).$$

Apibrėžkime:

$$h_k^\varepsilon=\begin{cases}h_k, & \text{jeigu}\quad k=0,1,2,...,k_1,\\ 0, & \text{jeigu}\quad k=k_1+1,k_1+2,\dots\,,\end{cases}\tag{24}$$

$$\psi_d^\varepsilon(u,1)=\begin{cases}1-H(u), & \text{jeigu}\quad u=0,1,2,...,k_1,\\ 0, & \text{jeigu}\quad k=k_1+1,k_1+2,\dots\,.\end{cases}\tag{25}$$

O bet kuriam laiko momentui $t\geqslant 2$ tegul:

$$\psi_d^\varepsilon(u,t)=\begin{cases}\psi_d^\varepsilon(u,1)+\sum\limits_{k=0}^{u}h_k^\varepsilon\psi_d^\varepsilon(u+1-k,t-1) & u=0,1,2,...,k_t,\\ \quad 0, & u=k_t+1,k_t+2,...,\end{cases}\tag{26}$$

kur natūralusis k_t yra mažiausias iš tų k kuriems $\psi_d^\varepsilon(k,t)\leqslant\varepsilon$, t.y.

$$\psi_d^\varepsilon(k_t,t)\leqslant\varepsilon<\psi_d^\varepsilon(k_t-1,t).$$

Pasirodo, tokiai $\psi_d^\varepsilon(u,t)$ konstrukcijai galioja toks įvertis.

1.5.1 Lema. *Sakykime $\psi_d(u,t)$ yra baigtinio laiko bankroto tikimybė supaprastintame diskretaus laiko rizikos modelyje, $\varepsilon\in(0,1)$, o $\psi_d^\varepsilon(u,t)$ visiems*

$u = 0, 1, 2, ..., t = 1, 2, 3, ...$ yra dydžiai apibrėžti (24)-(26) lygybėmis. Tada bet kuriam $u \geqslant 0$ ir bet kuriam laiko momentui $t \geqslant 1$

$$\psi_d^\varepsilon(u,t) \leqslant \psi_d(u,t) \leqslant \psi_d^\varepsilon(u,t) + 3t\varepsilon. \tag{27}$$

$\triangle$ Teiginį įrodysime matematinės indukcijos metodu. Indukciją taikysime pagal laiką t. Kai $t = 1$ iš (18) ir (25) formulių gauname

$$\begin{aligned} \psi_d^\varepsilon(u,1) &= (1 - H(u))\mathbb{I}_{\{u \leqslant k_1\}} \\ &\leqslant 1 - H(u) = \psi_d(u,1). \end{aligned}$$

Antra vertus,

$$\begin{aligned} \psi_d(u,1) &= (1 - H(u)) \\ &= (1 - H(u))\mathbb{I}_{\{u \leqslant k_1\}} + (1 - H(u))\mathbb{I}_{\{u > k_1\}} \\ &= \psi_d^\varepsilon(u,1) + (1 - H(u))\mathbb{I}_{\{u > k_1\}} \\ &\leqslant \psi_d^\varepsilon(u,1) + \varepsilon < \psi_d^\varepsilon(u,1) + 3\varepsilon. \end{aligned}$$

Sakykime lemos tvirtinimas galioja bet kokiam $u \geqslant 0$ ir bet kuriems laiko momentams $t < T$, t.y.

$$\psi_d^\varepsilon(u,t) \leqslant \psi_d(u,t) \leqslant \psi_d^\varepsilon(u,t) + 3t\varepsilon,$$

kai $u \geqslant 0$ ir $t = 1, 2, ..., T - 1$.

Iš šios prielaidos ir (19), (24)-(26) lygybių išplaukia, kad

$$\begin{aligned} \psi_d^\varepsilon(u,T) &= \left\{\psi_d^\varepsilon(u,1) + \sum_{k=0}^{u} h_k^\varepsilon 1 \psi_d^\varepsilon(u + 1 - k, T - 1)\right\}\mathbb{I}_{\{u \leqslant k_T\}} \\ &\leqslant \psi_d^\varepsilon(u,1) + \sum_{k=0}^{u} h_k^\varepsilon \psi_d^\varepsilon(u + 1 - k, T - 1) \\ &\leqslant \psi_d u, 1) + \sum_{k=0}^{u} h_k \psi_d(u + 1 - k, T - 1) \\ &= \psi_d(u,T). \end{aligned}$$

Antra vertus,

$$\begin{aligned} \psi_d(u,T) &= \psi_d(u,1) + \sum_{k=0}^{u} h_k \psi_d(u + 1 - k, T - 1) \\ &= \psi_d(u,1)\mathbb{I}_{\{u \leqslant k_1\}} + \psi_d(u,1)\mathbb{I}_{\{u > k_1\}} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+ \sum_{k=0}^{\min\{u,k_1\}} h_k \psi_d(u+1-k, T-1)\\
&+ \sum_{k=\min\{u,k_1\}+1}^{u} h_k \psi_d(u+1-k, T-1)\\
&\leqslant \psi_d^{\varepsilon}(u,1) + \varepsilon + \sum_{k=\min\{u,k_1\}+1}^{u} h_k\\
&+ \sum_{k=0}^{\min\{u,k_1\}} h_k^{\varepsilon} \left(\psi_d^{\varepsilon}(u+1-k, T-1) + 3(T-1)\varepsilon\right)\\
&\leqslant 2\varepsilon + \left\{\psi_d^{\varepsilon}(u,1) + \sum_{k=0}^{u} h_k^{\varepsilon} \psi_d^{\varepsilon}(u+1-k, T-1)\right\} \mathbb{I}_{\{u>k_T\}}\\
&+ \left\{\psi_d^{\varepsilon}(u,1) + \sum_{k=0}^{u} h_k^{\varepsilon} \psi_d^{\varepsilon}(u+1-k, T-1)\right\} \mathbb{I}_{\{u\leqslant k_T\}}\\
&+ 3(T-1)\varepsilon \sum_{k=0}^{\min\{u,k_1\}} h_k\\
&\leqslant 3\varepsilon + \psi_d^{\varepsilon}(u,T) + 3(T-1)\varepsilon = \psi_d^{\varepsilon}(u,T) + 3T\varepsilon.
\end{aligned}
$$

Taigi abu lemos įverčiai teisingi laiko momentui T. Pagal matematinės indukcijos principą gauname, kad lemos (27) nelygybė teisinga visiems laiko momentams $t \geqslant 1$. $\triangle$

1.6 Lundberg nelygybė diskretaus laiko rizikos modeliui

Praktikoje dažnai nereikia žinoti bankroto tikimybės $\psi_d(u)$ ar baigtinio laiko bankroto tikimybės $\psi_d(u,t)$ tikslių reikšmių. Visiškai pakanka gerų šių tikimybių įverčių. Šiame skyrelyje išvesime vieną klasikinį įvertį bankroto tikimybei $\psi_d(u)$ apibrėžtai 1.2 skyrelyje (2) lygybe. Vadinamasis Lundberg įvertis galioja diskretaus laiko dinaminiam rizikos modelyje tuo atveju, kai žala Z_1 turi baigtinį eksponentinį momentą, t.y.

$$
\mathbb{E}\left(e^{vZ_1}\right) < \infty
$$

kažkokiam teigiamam v. Aišku, kad tokiu atveju $\mathbb{E}\left(e^{vZ_1}\right)$ yra baigtinis tam tikrame intervale $v \in [0,\gamma)$ ir turi prasmę žemiau pateikta Lundberg lygtis. Vertinant bankroto tikimybę $\psi_d(u)$ svarbus būtent šios Lundberg lygties:

$$\mathbb{E}\left(e^{r(Z_1-1)}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{r(k-1)} h_k = 1 \tag{28}$$

sprendinys.

Toliau šiame skyrelyje suformuluosime ir įrodysime du pagalbinius teiginius apie Lundberg lygties srendinio R_d egzistavimą. Po to gausime Lundberg įvertį bankroto tikimybei diskretaus laiko supaprastintame rizikos modelyje.

1.6.1 Lema. *Sakykime kažkokiam teigiamam γ*

$$\mathbb{E}\left(e^{vZ_1}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{vk} h_k < \infty,$$

visiems $v \in [0, \gamma)$ ir

$$\lim_{v \to \gamma - 0} \mathbb{E}\left(e^{vZ_1}\right) = \infty,$$

o žalos Z_1 vidurkis

$$\mathbb{E}Z_1 = \sum_{k=0}^{\infty} k h_k < 1.$$

Tada (28) Lundberg lygtis turi vienintelį teigiamą sprendinį $r = R_d$.

$\triangle$ Realiems $r \in [0, \gamma)$ apibrėžkime

$$g(r) = \mathbb{E}\left(e^{r(Z_1-1)}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{r(k-1)} h_k.$$

Aišku, kad funkcija $g(r)$ savo apibrėžimo srityje yra baigtinė, teigiama ir $g(0) = 1$.

Pasirinkus bet kokį mažą teigiamą δ, gauname, kad eilutė

$$\sum_{k=0}^{\infty} k^2 e^{rk} h_k$$

konverguoja tolygiai intervale $\in [0, \gamma - \delta]$. Vadinasi, funkcija $g(r)$ turi pirmos ir antros eilės baigtines išvestines nurodytame intervale. Aišku, kad

$$g'(r) = \sum_{k=1}^{\infty} (k-1) e^{r(k-1)} h_k$$

$$g''(r) = \sum_{k=1}^{\infty} (k-1)^2 e^{r(k-1)} h_k$$

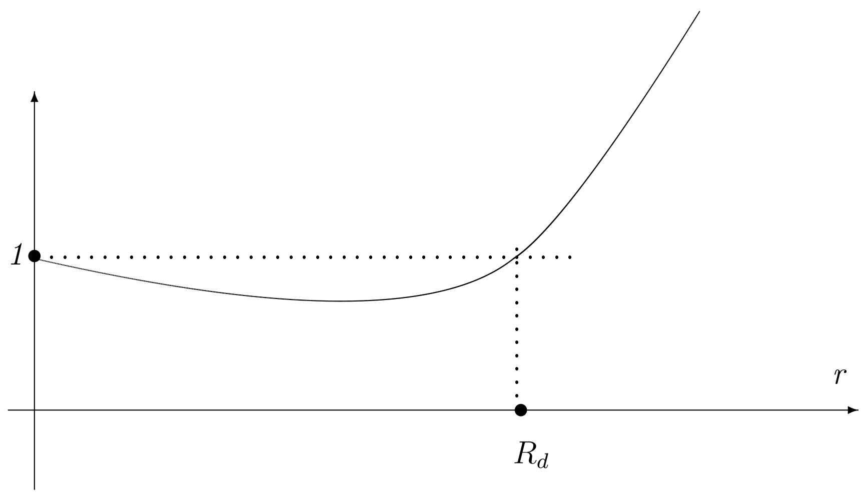
kai $r \in [0, \gamma - \delta]$.

Todėl taške 0 išvestinė iš dešinės $g'(0) = \mathbb{E}Z_1 - 1 < 0$, o $g''(r) > 0$ visiems $r \in [0, \gamma)$.

Be to,

$$\lim_{r \to \gamma - 0} g(r) = \infty.$$

Iš gautų funkcijos $g(r)$ tyrimo epizodų išplaukia, kad funkcija $g(r)$ turi tokio pavidalo grafiką.



Taigi, iš tiesų egzistuoja vienintelis teigiamas skaičius R_d, kuriam

$$\mathbb{E}\left(e^{R_d(Z_1 - 1)}\right) = 1.$$

$\triangle$

1.6.2 Lema. *Sakykime bet kuriam teigiamam v*

$$\mathbb{E}\left(e^{vZ_1}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{vk} h_k < \infty,$$

žalos Z_1 vidurkis

$$\mathbb{E}Z_1 = \sum_{k=0}^{\infty} k h_k < 1$$

ir

$$\mathbb{P}(Z_1 \geqslant 2) > 0.$$

Tada, kaip ir 1.6.1 lemos atveju (28) Lundberg lygtis turi vienintelį teigiamą sprendinį $r = R_d$.

$\triangle$ Lemos įrodymas analogiškas 1.6.1 lemos įrodymui. Realiems neneigiamiems r apibrėžkime

$$g(r) = \mathbb{E}\left(e^{r(Z_1-1)}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{r(k-1)} h_k.$$

Funkcija $g(r)$ savo apibrėžimo srityje yra baigtinė, teigiama ir $g(0) = 1$, o eilutė

$$\sum_{k=0}^{\infty} k^2 e^{rk} h_k$$

konverguoja tolygiai bet kokiame baigtiniame intervale $[0, M]$. Taigi, funkcija $g(r)$ turi pirmos ir antros eilės baigtines išvestines visiems $r \in [0, M]$:

$$g'(r) = \sum_{k=1}^{\infty} (k-1) e^{r(k-1)} h_k$$
$$g''(r) = \sum_{k=1}^{\infty} (k-1)^2 e^{r(k-1)} h_k.$$

Vadinasi, kaip ir 1.6.1 lemoje, taške 0 išvestinė iš dešinės $g'(0) = \mathbb{E}Z_1 - 1 < 0$, o $g''(r) > 0$ visiems $r \in [0, \infty)$.

Pagaliau,

$$\begin{aligned} \lim_{r\to\infty} g(r) &\geqslant \lim_{r\to\infty} \sum_{k=2}^{\infty} e^{r(k-1)} h_k \\ &\geqslant \lim_{r\to\infty} e^r \sum_{k=2}^{\infty} h_k = \infty \end{aligned}$$

Iš gautų funkcijos $g(r)$ tyrimo epizodų išplaukia, kad funkcijos $g(r)$ grafikas turi tokį patį pavidalą kaip ir 1.6.1 lemoje.

Vadinasi, aprašytu atveju irgi egzistuoja vienintelis teigiamas skaičius R_d, kuriam

$$\mathbb{E}\left(e^{R_d(Z_1-1)}\right) = 1.$$

$\triangle$

1.6.1 Teorema. *Sakykime patenkintos supaprastinto diskretaus laiko rizikos modelio sąlygos:*

- *pradinis kapitalas* $u \in \{0\} \cup \mathbb{N}$,
- *atsitiktiniai dydžiai* $Z_1, Z_2, Z_3, \ldots$ *nepriklausomi, vienodai pasiskirstę, įgyjantys reikšmes aibėje* $\{0\} \cup \mathbb{N}$,
- $\mathbb{P}(Z_1 = k) = h_k$, *kai* $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$.

Tegul, be to, kažkokiam teigiamam v atsitiktinio dydžio Z_1 eksponentinis momentas

$$\mathbb{E}\left(e^{vZ_1}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{vZ_1} h_k,$$

yra baigtinis, (28) Lundberg lygtis turi vienintelį teigiamą sprendinį R_d, o atsitiktinio dydžio vidurkis

$$\mathbb{E}Z_1 = \sum_{k=1}^{\infty} k h_k$$

mažesnis už vienetą.

Tada visiems $u = 0, 1, 2, 3, \ldots$ bankroto tikimybė $\psi_d(u)$ tenkina nelygybę

$$\psi_d(u) \leqslant \exp\{-R_d u\}, \tag{29}$$

$\triangle$ Nesunku pastebėti (žiūrėkite (17) lygybę), kad

$$\begin{aligned} \psi_d(u,1) &= \sum_{k=u+1}^{\infty} h_k \leqslant \sum_{k=u+1}^{\infty} e^{-R_d(u+1-k)} h_k \\ &\leqslant \sum_{k=0}^{\infty} e^{-R_d(u+1-k)} h_k = e^{-R_d u} \sum_{k=0}^{\infty} e^{R_d(k-1)} h_k. \end{aligned}$$

Kadangi R_d yra (28) lygties sprendinys, tai paskutinioji užrašyta suma lygi vienetui. Vadinasi,

$$\psi_d(u,1) \leqslant e^{-R_d u}$$

bet kuriai pradinio kapitalo reikšmei u.

Tarkime, kad bet kokiam fiksuotam sveikareikšmiam laiko momentui $t \geqslant 1$ ir bet kuriai pradinio kapitalo reikšmei u

$$\psi_d(u,t) \leqslant e^{-R_d u}.$$

Tada iš 1.5.1 teoremos ir (17) lygybės išplaukia įvertinimas

$$\begin{aligned} \psi_d(u,t+1) &= \psi_d(u,1) + \sum_{k=0}^{u} h_k \psi_d(u+1-k,t) \\ &\leqslant \sum_{k=u+1}^{\infty} h_k + \sum_{k=0}^{u} h_k e^{-R_d(u+1-k)} \\ &\leqslant \sum_{k=u+1}^{\infty} h_k e^{-R_d(u+1-k)} + \sum_{k=0}^{u} h_k e^{-R_d(u+1-k)} \\ &= e^{-R_d u} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-R_d(k-1)} h_k \\ &= e^{-R_d u} \mathbb{E}\left(e^{R_d(Z_1-1)}\right) = e^{-R_d u} \end{aligned}$$

Pagal matematinės indukcijos principą gauname, kad

$$\psi_d(u,t) \leqslant e^{-R_d u}$$

bet kokiam laiko momentui $t \in \mathbb{N}$ ir bet kokiai pradinio kapitalo vertei $u \in \{0\} \cup \mathbb{N}$. Paskutinėje nelygybėje perėję prie ribos pagal t, gauname

$$\psi_d(u) = \lim_{t\to\infty} \psi_d(u,t) \leqslant e^{-R_d u}$$

bet kuriai pradinio kapitalo vertei u. △

Toliau šiame skyrelyje keli uždavinių pavyzdžiai.

1.6.1 Pavyzdys. *Sakykime žala supaprastintame diskretaus laiko rizikos modelyje pasiskirsčiusi pagal tokį dėsnį:*

Z_1	0	2
$\mathbb{P}$	p	$1-p$

su parametru $p \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ *(žiūrėkite 1.3.1 pavyzdį). Rasime Lundberg lygties teigiamą sprendinį* R_d*.*

△ Nesunku pastebėti, kad

$$\mathbb{E}\left(e^{r(Z_1-1)}\right) = pe^{-r} + (1-p)e^r.$$

Vadinasi, Lundberg lygtis (žiūrėkite (28))

$$pe^{-r} + (1-p)e^r = 1.$$

Iš čia

$$(1-p)e^{2r} - e^r + p = 0.$$

Įvedę keitinį $e^r = y$ ir išsprendę kvadratinę lygtį gauname du atvejus:

$$e^{r_1} = 1, \quad e^{r_2} = \frac{p}{1-p}.$$

Kadangi mus domina tik teigiamas Lundberg lygties sprendinys, tai

$$R_d = r_2 = \ln\frac{p}{1-p}.$$

△

1.6.2 Pavyzdys. *Sakykime žala supaprastintame diskretaus laiko rizikos modelyje pasiskirsčiusi pagal tokį dėsnį:*

Z_1	0	3
$\mathbb{P}$	0.8	0.2

Rasime bankroto tikimybės $\psi_d(5)$ Lundberg įvertį.

△ Aišku, kad nagrinėjamu atveju

$$\mathbb{E}\left(e^{r(Z_1-1)}\right) = 0.8e^{-r} + 0.2e^{2r}.$$

Todėl atsitiktiniam dydžiui Z_1 Lundberg lygtis tokia:

$$0.2e^{3r} - e^r + 0.8 = 0.$$

Ši lygtis turi vienintelį teigiamą sprendinį

$$R_d = \frac{\sqrt{17}-1}{2} \geqslant 0.4456.$$

Todėl ieškomasis įvertis

$$\psi_d(5) \leqslant \exp\{-5R_d\} = \left(\frac{2}{\sqrt{17}-1}\right)^5 \leqslant 0.10771.$$

△

1.7 Uždaviniai

1. Sakykime žala supaprastintame diskretaus laiko rizikos modelyje pasiskirsčiusi pagal tokį dėsnį:

Z_1	0	3
$\mathbb{P}$	p	$1-p$

su parametru $p \in \left(\frac{2}{3}, 1\right)$.

(1) Raskite $\psi_d(0)$, $\psi_d(1)$ ir $\psi_d(2)$.

(2) Įrodykite, kad aprašytu atveju

$$\psi_d(u) = \frac{1-p}{p}\left(\psi_d(u-1) + \psi_d(u-2)\right)$$

kai $u = 3, 4, 5, ...$.

(3) Raskite mažiausią pradinio kapitalo u vertę, kuriai $\psi_d(u) < 0.01$ kai $p = 0.8$.

2. Sakykime žala supaprastintame diskretaus laiko rizikos modelyje pasiskirsčiusi pagal tokį dėsnį:

Z_1	0	1	2
$\mathbb{P}$	0.7	0.2	0.1

(1) Raskite $\psi_d(0)$, $\psi_d(3)$ ir $\psi_d(6)$.
(2) Išveskite rekursinę formulę $\psi_d(u)$ skaičiavimui.
(3) Raskite mažiausią pradinio kapitalo u vertę, kuriai $\psi_d(u) < 0.02$.

3. Sakykime supaprastintame diskretaus laiko rizikos modelyje žala pasiskirsčiusi pagal tokį dėsnį:

Z_1	0	2	3
$\mathbb{P}$	0.8	0.1	0.1

(1) Raskite $\psi_d(0)$, $\psi_d(4)$ ir $\psi_d(7)$.
(2) Išveskite rekursinę formulę $\psi_d(u)$ skaičiavimui.
(3) Raskite mažiausią pradinio kapitalo u vertę, kuriai $\psi_d(u) < 0.01$.

4. Sakykime žala supaprastintame diskretaus laiko rizikos modelyje pasiskirsčiusi pagal apibendrintą geometrinį dėsnį, t.y.:

$$\mathbb{P}(Z_1 = 0) = p,$$
$$\mathbb{P}(Z_1 = k) = (1-p)(1-\alpha)\alpha^{k-1}, k = 1, 2, 3, ...$$

su parametrais $p \in (0, 1)$ ir $\alpha \in (0, p)$.

(1) Raskite Lundbergo lygties teigiamą sprendinį.
(2) Užrašykite Lundbergo įvertį tikimybei $\psi_d(10)$, kai $p = \frac{1}{3}$ ir $\alpha = \frac{1}{4}$.

5. Sakykime žala supaprastintame diskretaus laiko rizikos modelyje pasiskirsčiusi pagal Puasono dėsnį, t.y.:

$$\mathbb{P}(Z_1 = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}, \; k = 0, 1, 2, ...$$

su parametru $\lambda \in (0, 1)$.

(1) Užrašykite rekursinę formulę $\psi_d(u)$ skaičiavimui.
(2) Raskite $\psi_d(0)$, $\psi_d(4)$ ir $\psi_d(7)$, kai Puasono skirstinio parametras $\lambda = \frac{1}{2}$.

(3) Užrašykite lygtį teigiamo Lundberg koeficijento R_d radimui žalai pasiskirsčiusiai pagal Puasono dėsnį.

(4) Iš apačios įvertinkite Lundberg koeficijentą R_d, kai žalos skirstinio parametras $\lambda = \frac{1}{2}$.

(5) Esant parametrui $\lambda = \frac{1}{2}$ raskite tikimybių $\psi_d(7)$ ir $\psi_d(17)$ įverčius.

6. Sakykime supaprastintame diskretaus laiko rizikos modelyje žala pasiskirsčiusi pagal biniminį dėsnį, t.y.:

$$\mathbb{P}\left(Z_1 = k\right) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k},\ k = 0, 1, 2, ..., n$$

su parametrais $n \in \mathbb{N}$ ir $p \in \left(0, \frac{1}{n}\right)$.

(1) Užrašykite rekursinę formulę $\psi_d(u)$ skaičiavimui.

(2) Raskite $\psi_d(0)$, $\psi_d(3)$ ir $\psi_d(6)$, kai binominio skirstinio parametrai $n = 4$ ir $p = \frac{1}{5}$.

(3) Užrašykite lygtį teigiamo Lundberg koeficijento R_d radimui žalai pasiskirsčiusiai pagal binominį dėsnį.

(4) Įvertinkite iš apačios Lundberg koeficijentą R_d, kai žalos skirstinio parametrai $n = 4,\ p = \frac{1}{5}$.

(5) Parametrams $n = 4,\ p = \frac{1}{5}$ raskite tikimybių $\psi_d(6)$ ir $\psi_d(16)$ įverčius.

7. Sakykime supaprastintame diskretaus laiko rizikos modelyje žala pasiskirsčiusi pagal tokį dėsnį:

Z_1	0	1	2
$\mathbb{P}$	0.6	0.3	0.1

Raskite $\psi_d(0, 1)$, $\psi_d(0, 3)$ ir $\psi_d(3, 3)$.

8. Sakykime supaprastintame diskretaus laiko rizikos modelyje žala pasiskirsčiusi pagal tokį dėsnį:

Z_1	0	2	3
$\mathbb{P}$	0.7	0.2	0.1

Raskite $\psi_d(0, 1)$, $\psi_d(3, 1)$ ir $\psi_d(4, 3)$.

9. Draudikas draudžia savo klientus nuo gaisrų. Dėl gaisrų kylančių per savaitę draudikas patiria žalą turinčią skirstinį:

Z	0	2000	4000	6000
$\mathbb{P}$	0.6	0.2	0.15	0.05

Kiekvieną savaitę draudikas gauna apie 2000 Lt premiją, be to, veiklos pradžioje sukaupė pradinį 20000 Lt kapitalą. Įvertinkite draudiko įmonės bankroto tikimybę vienos savaitės laikotarpiui, 8 savaičių laikotarpiui, 52 savaičių laikotarpiui.

10. Draudikas draudžia savo klientus nuo vagysčių. Dėl vagysčių kylančių per mėnesį draudikas patiria žalą turinčią skirstinį:

Z	0	10000	20000	30000
$\mathbb{P}$	0.7	0.15	0.1	0.05

Kiekvieną mėnesį draudikas gauna apie 10000 Lt premiją, be to, veiklos pradžioje sukaupė pradinį 150000 Lt kapitalą. Įvertinkite draudiko įmonės bankroto tikimybę vieno mėnesio laikotarpiui, 3 mėnesių laikotarpiui, metų laikotarpiui.

II. Klasikinis dinaminis rizikos modelis

2.1 Klasikinio rizikos modelio sudedamosios dalys

Klasikinis dinaminis rizikos modelis, kaip ir diskretaus laiko rizikos modelis, aprašo draudiko kapitalo kitimą bėgant laikui. Diskretaus laiko rizikos modelis aprašo draudiko kapitalo kitimą vien tik diskrečiais laiko momentais. Tuo tarpu klasikinis dinaminis rizikos modelis nusako draudiko kapitalo dydį bet kokiu laiko momentu. Be abejo ir klasikinis rizikos modelis yra tam tikras tikrovės supaprastinimas. Neatsižvelgiama į pajamų atsitiktinumą, kapitalo investavimo galimybę, žalų pasirodymo skaičiui pasirinktas specialaus pavidalo procesas. Visgi klasikinis rizikos modelis, kaip ir diskretaus laiko dinaminis rizikos modelis, gali būti taikomas tam tikrų draudimo veiklos rūšių analizei, nes aprašo pagrindinę draudiko veiklos dalį.

Sakykime $U(t)$ yra draudiko valdomas turtas laiko momentu $t > 0$. Pagal klasikinį dinaminį rizikos modelį bet kuriam tokiam t

$$U(t) = u + ct - \sum_{i=1}^{N(t)} Z_i. \tag{30}$$

Šioje lygybėje:

• $u = U(0) \geqslant 0$ yra draudiko turtas pradiniu laiko momentu $t = 0$.

• $Z_1, Z_2, Z_3, \ldots$ yra nepriklausomi vienodai pasiskirstę neneigiami atsitiktiniai dydžiai. Atsitiktinis dydis Z_i nusako draudiko i-osios žalos dydį.

• $c > 0$ yra premijų surinkimo greitis per laiko vienetą. Laikome, kad šis greitis yra pastovus, nepriklausantis nuo laiko.

• $N(t)$ yra žalų skaičius intervale $[0, t]$. Laikoma, kad N yra homogeninis Puasono procesas su tam tikru teigiamu intencyvumu λ.

• Procesas N ir atsitiktinių dydžių seka $Z_1, Z_2, Z_3, \ldots$ yra nepriklausomi.

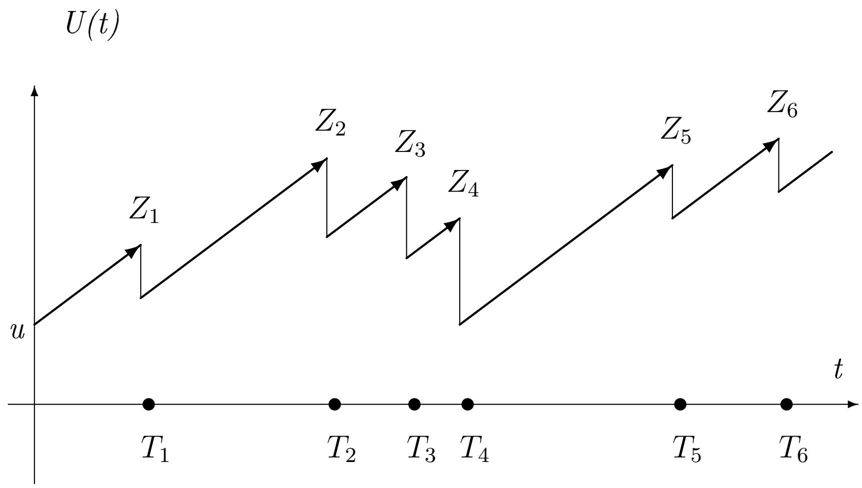
Sakykime T_1 yra pirmos žalos pasirodymo laikas, T_2 yra antros žalos pasirodymo laikas ir t. t. Tada aišku, kad

$$N(t) = \max\{n \geqslant 1 : T_n \leqslant t\}$$

ir

$$\mathbb{P}(T_n \leqslant t) = \mathbb{P}(N(t) \geqslant n).$$

Rizikos proceso $U(t)$ nusakančio draudiko turtą laiko momentu t grafikas turi tokį pavidalą.



2.2 Puasono procesas

Ankstesniame skyrelyje aprašyto dinaminio klasikinio rizikos modelio žalų skaičių $N(t)$ aprašo homogeninis Puasono procesas. Šiame skyrelyje priminsime pagrindines savokas susijusias su tokiu $N(t)$ nusakymu, be to, aptarsime keletą homogeninio Puasono proceso savybių.

2.2.1 Apibrėžimas. *Dviejų argumentų funkcija $X = X(t, \omega)$ apibrėžta aibėje $[0, \infty) \times \{\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}\}$ su reikšmėmis realių skaičių aibėje vadinama atsitiktiniu procesu, jeigu bet kuriam $t \in [0, \infty)$ ir bet kuriai Borelio aibei B*

$$\{\omega : X(t, \omega) \in B\} \in \mathcal{A} \ .$$

Tekste minint kokią nors atsitiktinio proceso reikšmę dažniausiai tikimybinę erdvę $\{\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}\}$ žymintis antrasis argumentas ω praleidžiamas, t.y. vietoje $X(t, \omega)$ rašoma $X(t)$. Tokiu atveju laikoma, kad tikimybinė erdvė $\{\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}\}$, kurioje apibrėžtas procesas yra aiški iš konteksto arba numanoma.

Atsitiktinis procesas visgi yra dviejų argumentų funkcija $X(t, \omega)$. Jeigu fiksuosime atsitiktinį elementą $\omega^* \in \Omega$, tai gausime vieno argumento funkciją

$X(t, \omega^*)$, kuri paprastai vadinama proceso trajektorija arba realizacija. Realiai stebėdami atsitiktinį procesą, faktiškai stebime vieną iš jo realizacijų.

2.2.2 Apibrėžimas. *Atsitiktinis procesas N vadinamas Puasono procesu, jeigu tenkinamos šios sąlygos:*

- $\mathbb{P}(N(0) = 0) = 1$*;*
- *N yra nepriklausomų pokyčių procesas, t.y. su visais $0 \leqslant t_1 < t_2 < ... < t_n$, $n \in \mathbb{N}$ proceso pokyčiai*

$$N(t_2) - N(t_1), N(t_3) - N(t_2), ..., N(t_n) - N(t_{n-1})$$

yra nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai;

- *egzistuoja nemažėjanti tolydi iš dešinės funkcija $\Lambda : [0, \infty) \to [0, \infty)$ su savybe $\Lambda(0) = 0$, kuriai*

$$\mathbb{P}\left(N(t) - N(s) = k\right) = e^{-(\Lambda(t) - \Lambda(s))} \frac{(\Lambda(t) - \Lambda(s))^k}{k!}$$

visiems $0 \leqslant s \leqslant t$ ir $k \in \{0\} \cup \mathbb{N}$;

- *beveik visos proceso N trajektorijos $N(t, \omega)$ yra tolydžios iš dešinės intervale $[0, \infty)$ ir turi ribas iš kairės intervale $(0, \infty)$.*

Funkcija $\Lambda(t)$, nusakanti Puasono proceso pasiskirstymą, paprastai vadinama Puasono proceso laiko skalės funkcija. Pati paprasčiausia funkcija turinti laiko skalės funkcijos savybes yra $\Lambda(t) = \lambda t$ su kažkokiu teigiamu skaičiumi λ. Puasono procesas, kurio laiko skalės funkcija $\Lambda(t) = \lambda t$ visiems $t \geqslant 0$, vadinamas homogeniniu Puasono procesu. Parametras λ dažnai vadinamas homogeninio Puasono proceso intencyvumu. Taigi homogeninis Puasono procesas nusakomas tokiu apibrėžimu.

2.2.3 Apibrėžimas. *Atsitiktinis procesas N vadinamas homogeniniu Puasono procesu su intencyvumu $\lambda > 0$, jeigu tenkinamos šios sąlygos:*

- $\mathbb{P}(N(0) = 0) = 1$*;*
- *N yra nepriklausomų pokyčių procesas, t.y. su visais $0 \leqslant t_1 < t_2 < ... < t_n$, $n \in \mathbb{N}$ proceso pokyčiai*

$$N(t_2) - N(t_1), N(t_3) - N(t_2), ..., N(t_n) - N(t_{n-1})$$

yra nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai;

- *visiems $0 \leqslant s \leqslant t$ ir $k \in \{0\} \cup \mathbb{N}$*

$$\mathbb{P}\left(N(t) - N(s) = k\right) = e^{-\lambda(t-s)} \frac{(\lambda(t-s))^k}{k!};$$

• *beveik visos proceso N trajektorijos $N(t,\omega)$yra tolydžios iš dešinės intervale $[0,\infty)$ ir turi ribas iš kairės intervale $(0,\infty)$.*

Iš apibrėžimo nesunku pastebėti, kad homogeninio Puasono proceso prieaugiai yra stacionarūs, t.y. su visais $0 \leqslant s \leqslant t,\ h \geqslant 0$ ir $k \in \{0\} \cup \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(N(t) - N(s) = k\right) &= \mathbb{P}\left(N(t+h) - N(s+h) = k\right) \\ &= e^{-\lambda(t-s)} \frac{\lambda^k (t-s)^k}{k!}\ .\end{aligned}$$

Homogeninis Puasono procesas dažnai yra priimtinas žalų skaičiui aprašyti tais atvejais, kai apdraustųjų rizikų charakteristikos ir aplinkos sąlygos yra nusistovėjusios ir beveik nekinta, pavyzdžiui, vienodų eismo ar klimato sąlygų laikotarpiais. Šiuo atveju bendras veiksnių poveikis draudiminių įvykių skaičiui gali būti išreikštas vieninteliu parametru λ, apibūdinančiu draudiminių įvykių intensyvumą. Jei kintančios aplinkos sąlygos daro įtaką ir draudiminių įvykių intencyvumui, tai žalų skaičiui aprašyti labiau priimtinas yra nehomogeninis Puasono procesas su kažkokia laiko skalės funkcija $\Lambda(t)$. Šis procesas taikomas tada, kai atsižvelgiama į sezoninę aplinkos įtaką, pavyzdžiui, daugiau draudiminių įvykių būna rudens audrų, pavasario potvynių ar blogų eismo sąlygų laikotarpiais.

Tarp homogeninio ir nehomogeninio Puasono procesų yra tam tikras ryšys. Tolesni du teiginai yra kaip tik apie tokį ryšį.

2.2.1 Lema. *Sakykime $\widehat{N}$ yra homogeninis Puasono procesas su intencyvumu $\lambda = 1$, o $\Lambda(t)$ yra laiko skalės funkcija, t.y. nemažėjanti tolydi iš dešinės funkcija intervalą $[0,\infty)$ atvaizduojanti į intervalą $[0,\infty)$ su savybe $\Lambda(0) = 0$. Tada $N(t) = \widehat{N}(\Lambda(t))$ yra Puasono procesas su laiko skalės funkcija $\Lambda(t)$.*

$\triangle$ Suformuluotos lemos teiginys išplaukia tiesiogiai iš 2.2.2 ir 2.2.3 apibrėžimų. $\triangle$

2.2.2 Lema. *Sakykime N Puasono procesas su laiko skalės funkcija $\Lambda(t)$, kuri yra tolydi didėjanti ir tenkina sąlygą*

$$\lim_{t\to\infty} \Lambda(t) = \infty.$$

Tada $\widehat{N}(t) = N(\Lambda^{-1}(t))$ yra homogeninis Puasono procesas su intencyvumu $\lambda = 1$. Čia, proceso $\widehat{N}$ apibrėžime, Λ^{-1} žymi funkcijos Λ atvirkštinę funkciją.

$\triangle$ Funkcija $\Lambda(t)$ tolydi didėjanti intervale $[0,\infty)$ su savybe $\Lambda(0) = 0$. Vadinasi, egzistuoja tolydi didėjanti atvirkštinė funkcija $\Lambda^{-1}(t)$ su savybe $\Lambda^{-1}(0) = 0$.

Nesunkiai gauname, kad

$$\mathbb{P}\left(\widehat{N}(0)\right) = \mathbb{P}\left(N(\Lambda^{-1}(0))\right) = \mathbb{P}(N(0)) = 1,$$

nes $N(t)$ yra Puasono procesas.

Antra vertus su visais $0 \leqslant t_1 < t_2 < ... < t_n, n \in \mathbb{N}$ proceso $\widehat{N}(t)$ pokyčiai

$$\begin{aligned}
\widehat{N}(t_2) - \widehat{N}(t_1) &= N\left(\Lambda^{-1}(t_2)\right) - N\left(\Lambda^{-1}(t_1)\right), \\
\widehat{N}(t_3) - \widehat{N}(t_2) &= N\left(\Lambda^{-1}(t_3)\right) - N\left(\Lambda^{-1}(t_2)\right), \\
- &\quad - \quad - \\
\widehat{N}(t_n) - \widehat{N}(t_{n-1}) &= N\left(\Lambda^{-1}(t_n)\right) - N\left(\Lambda^{-1}(t_{n-1})\right)
\end{aligned}$$

yra nepriklausomi, nes

$$0 \leqslant \Lambda^{-1}(t_1) < \Lambda^{-1}(t_2) < ... < \Lambda^{-1}(t_n).$$

o N yra nepriklausomų pokyčių procesas. Aišku, kad beveik visos proceso $\widehat{N}$ trajektorijos yra tolydžios iš dešinės intervale $[0,\infty)$ ir turi ribas iš kairės intervale $(0,\infty)$, nes tokiomis savybėmis pasižymi proceso N trajektorijos.

Pagaliau, bet kuriems $0 \leqslant s \leqslant t$ ir visiems $k \in \{0\} \cup \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}\left(\widehat{N}(t) - \widehat{N}(s) = k\right) \\
= & \ \mathbb{P}\left(N\left(\Lambda^{-1}(t)\right) - N\left(\Lambda^{-1}(s)\right) = k\right) \\
= & \ e^{-\left(\Lambda(\Lambda^{-1}(t)) - \Lambda(\Lambda^{-1}(s))\right)} \frac{\left(\Lambda(\Lambda^{-1}(t)) - \Lambda(\Lambda^{-1}(s))\right)^k}{k!} \\
= & \ e^{-(t-s)} \frac{(t-s)^k}{k!}.
\end{aligned}$$

Pagal 2.2.3 apibrėžimą procesas $\widehat{N}$ yra homogeninis Puasono procesas su intensyvumu 1. $\triangle$

Naudojantis paskutine lema galima kai kuriuos modelius aprašančius draudiko kapitalo kitimą pervesti į klasikinį dinaminį rizikos modelį pakeičiant vien tik laiką. Sakykime, pavyzdžiui, laikui bėgant draudėjų skaičius kinta, todėl žalų $Z_1, Z_2, ...$ skaičius intervale $[0,t]$ aprašomas Puasono procesu su laiko skalės funkcija Λ, o draudėjų įmokos proporcingos tai pačiai laiko skalės funkcijai Λ. Esant tokioms prielaidoms draudiko kapitalas $U(t)$ laiko momentu t lygus

$$U(t) = u + c\Lambda(t) - \sum_{i=1}^{N(t)} Z_i.$$

Jeigu laiko skalės funkcija $\Lambda(t)$ tenkina 2.2.2 lemos sąlygas, tai vietoje t pasirinkę kitą "laiką" $\Lambda^{-1}(t)$, gauname klasikinį rizikos procesą

$$U(\Lambda^{-1}(t)) = u + ct - \sum_{i=1}^{\widehat{N}(t)} Z_i,$$

kuriame $\widehat{N}$ yra homogeninis Puasono procesas su intensyvumu $\lambda = 1$.

Toliau šiame skyrelyje įrodysime dvi svarbias homogeninio Puasono proceso savybes rodančias, kad homogeninį Puasono procesą aprašo vien tik laiko tarpai tarp žalų pasirodymų.

2.2.1 Teorema. *Sakykime N yra homogeninis Puasono procesas su intencyvumu λ ir šuolių momentais $0 \leqslant T_1 \leqslant T_2 \leqslant \ldots$. Tada atsitiktiniai dydžiai $W_1 = T_1, W_2 = T_2 - T_1, W_3 = T_3 - T_2, \ldots$ yra nepriklausomi ir pasiskirstę pagal eksponentinį dėsnį su parametru λ, t.y. visiems $i = 1, 2, 3, \ldots$*

$$\mathbb{P}(W_i \leqslant x) = \left(1 - e^{-\lambda x}\right) \mathbb{I}_{\{x \geqslant 0\}}$$

$\triangle$ Bet kuriam t

$$\mathbb{P}(T_n \leqslant t) = \mathbb{P}(N(t) \geqslant n).$$

Analogiškai bet kuriems $0 \leqslant x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_n, n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(T_1 \leqslant x_1, T_2 \leqslant x_2, \ldots, T_n \leqslant x_n) \\ = \ & \mathbb{P}(N(x_1) \geqslant 1, N(x_2) \geqslant 2, \ldots, N(x_n) \geqslant n). \end{aligned}$$

Vadinasi, pasinaudodami 2.2.3 apibrėžimu, gauname:

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(T_1 \leqslant x_1, T_2 \leqslant x_2, \ldots, T_n \leqslant x_n) \\ = & \sum_{k_1 \geqslant 1} \sum_{\substack{k_1+k_2 \geqslant 2 \\ k_2 \geqslant 0}} \cdots \sum_{\substack{k_1+k_2+\ldots+k_n \geqslant n \\ k_n \geqslant 0}} \mathbb{P}\{N(x_1) = k_1, N(x_2) = k_1 + k_2, \ldots, \\ & \qquad N(x_n) = k_1 + k_2 + \ldots + k_n\} \\ = & \sum_{k_1 \geqslant 1} \sum_{\substack{k_1+k_2 \geqslant 2 \\ k_2 \geqslant 0}} \cdots \sum_{\substack{k_1+k_2+\ldots+k_n \geqslant n \\ k_n \geqslant 0}} \mathbb{P}\{N(x_1) = k_1, N(x_2) - N(x_1) = k_2, \ldots, \\ & \qquad N(x_n) - N(x_{n-1}) = k_n\} \end{aligned}$$

$$= \sum_{k_1 \geqslant 1} \sum_{\substack{k_1+k_2 \geqslant 2 \\ k_2 \geqslant 0}} \dots \sum_{\substack{k_1+k_2+\dots+k_n \geqslant n \\ k_n \geqslant 0}} \mathbb{P}\{N(x_1)=k_1\} \mathbb{P}\{N(x_2)-N(x_1)=k_2\} \dots$$

$$\mathbb{P}\{N(x_n)-N(x_{n-1})=k_n\}$$

$$= \sum_{k_1 \geqslant 1} \sum_{\substack{k_1+k_2 \geqslant 2 \\ k_2 \geqslant 0}} \dots \sum_{\substack{k_1+k_2+\dots+k_n \geqslant n \\ k_n \geqslant 0}} e^{-\lambda x_1} \frac{(\lambda x_1)^{k_1}}{k_1!} e^{-\lambda(x_2-x_1)} \frac{(\lambda(x_2-x_1))^{k_2}}{k_2!} \dots$$

$$e^{-\lambda(x_n-x_{n-1})} \frac{(\lambda(x_n-x_{n-1}))^{k_n}}{k_n!}. \quad (31)$$

Toliau taikydami matematinės indukcijos metodą parodysime, kad su visais $0 \leqslant x_1 \leqslant x_2 \leqslant \dots \leqslant x_n, n \in \mathbb{N}$

$$\int_0^{x_1} \int_{u_1}^{x_2} \dots \int_{u_{n-1}}^{x_n} \lambda^n e^{-\lambda u_n} \mathrm{d}u_n \dots \mathrm{d}u_2 \mathrm{d}u_1$$

$$= \sum_{k_1 \geqslant 1} \sum_{\substack{k_1+k_2 \geqslant 2 \\ k_2 \geqslant 0}} \dots \sum_{\substack{k_1+k_2+\dots+k_n \geqslant n \\ k_n \geqslant 0}} e^{-\lambda x_1} \frac{(\lambda x_1)^{k_1}}{k_1!} e^{-\lambda(x_2-x_1)} \frac{(\lambda(x_2-x_1))^{k_2}}{k_2!} \dots$$

$$e^{-\lambda(x_n-x_{n-1})} \frac{(\lambda(x_n-x_{n-1}))^{k_n}}{k_n!}. \quad (32)$$

Iš tiesų, jeigu $n=1$, tai (32) formulė teisinga:

$$\int_0^{x_1} \lambda e^{-\lambda u_1} \mathrm{d}u_1 = 1 - e^{-\lambda x_1} = \sum_{k_1 \geqslant 1} e^{-\lambda x_1} \frac{(\lambda x_1)^{k_1}}{k_1!}.$$

Analogiškai:

$$\int_0^{x_1} \int_{u_1}^{x_2} \lambda^2 e^{-\lambda u_2} \mathrm{d}u_2 \mathrm{d}u_1 = \int_0^{x_1} \left(\lambda e^{-\lambda u_1} - \lambda e^{-\lambda x_2} \right) \mathrm{d}u_1$$

$$= \sum_{k_1 \geqslant 1} e^{-\lambda x_1} \frac{(\lambda x_1)^{k_1}}{k_1!} - \lambda x_1 e^{-\lambda x_2}$$

$$= \sum_{k_1 \geqslant 2} e^{-\lambda x_1} \frac{(\lambda x_1)^{k_1}}{k_1!} + \lambda x_1 e^{-\lambda x_1} - \lambda x_1 e^{-\lambda x_1} e^{-\lambda(x_2-x_1)}$$

$$= \sum_{k_1 \geqslant 2} e^{-\lambda x_1} \frac{(\lambda x_1)^{k_1}}{k_1!} + \lambda x_1 e^{-\lambda x_1} \left(1 - e^{-\lambda(x_2-x_1)}\right)$$

$$= \sum_{k_1 \geqslant 1} \sum_{\substack{k_1+k_2 \geqslant 2 \\ k_2 \geqslant 0}} e^{-\lambda x_1} \frac{(\lambda x_1)^{k_1}}{k_1!} e^{-\lambda(x_2-x_1)} \frac{(\lambda(x_2-x_1))^{k_2}}{k_2!}.$$

Taigi (32) formulė teisinga ir kai $n=2$.

Sakykime dabar, kad (32) formulė teisinga visiems $n = 1, 2, ..., m$. Esant tokiai prielaidai, pasirinkę $n = m + 1$, gauname

$$\begin{aligned}
&\int_0^{x_1}\int_{u_1}^{x_2} ... \int_{u_{m-1}}^{x_m}\int_{u_m}^{x_{m+1}} \lambda^{m+1} e^{-\lambda u_{m+1}} \mathrm{d}u_{m+1}\mathrm{d}u_m ... \mathrm{d}u_2\mathrm{d}u_1 \\
= \ &\int_0^{x_1}\int_{u_1}^{x_2} ... \int_{u_{m-1}}^{x_m} \left(\lambda^m e^{-\lambda u_m} - \lambda^m e^{-\lambda x_{m+1}}\right) \mathrm{d}u_m ... \mathrm{d}u_2\mathrm{d}u_1 \\
= \ &\sum_{k_1 \geqslant 1} \sum_{\substack{k_1+k_2 \geqslant 2 \\ k_2 \geqslant 0}} ... \sum_{\substack{k_1+k_2+...+k_m \geqslant m \\ k_m \geqslant 0}} e^{-\lambda x_1}\frac{(\lambda x_1)^{k_1}}{k_1!} e^{-\lambda(x_2-x_1)}\frac{(\lambda(x_2-x_1))^{k_2}}{k_2!} ... \\
&\qquad e^{-\lambda(x_m - x_{m-1})}\frac{(\lambda(x_m - x_{m-1}))^{k_m}}{k_m!} \\
- \ &\lambda^m e^{-\lambda x_{m+1}} \int_0^{x_1}\int_{u_1}^{x_2} ... \int_{u_{m-1}}^{x_m} \mathrm{d}u_m ... \mathrm{d}u_2\mathrm{d}u_1.
\end{aligned}$$

Po gana sudėtingų skaičiavimų galima parodyti, kad paskutinis šios lygybės integralas lygus

$$\sum_{k_1 \geqslant 1} \sum_{\substack{k_1+k_2 \geqslant 2 \\ k_2 \geqslant 0}} ... \sum_{\substack{k_1+k_2+...+k_{m-1} \geqslant m-1 \\ k_{m-1} \geqslant 0}} \sum_{\substack{k_1+k_2+...+k_m = m \\ k_m \geqslant 0}} \frac{x_1^{k_1}(x_2-x_1)^{k_2}...(x_m - x_{m-1})^{k_m}}{k_1!k_2!...k_m!}.$$

Todėl

$$\begin{aligned}
&\int_0^{x_1}\int_{u_1}^{x_2} ... \int_{u_{m-1}}^{x_m}\int_{u_m}^{x_{m+1}} \lambda^{m+1} e^{-\lambda u_{m+1}} \mathrm{d}u_{m+1}\mathrm{d}u_m ... \mathrm{d}u_2\mathrm{d}u_1 \\
= \ &\sum_{k_1 \geqslant 1} \sum_{\substack{k_1+k_2 \geqslant 2 \\ k_2 \geqslant 0}} ... \sum_{\substack{k_1+k_2+...+k_m \geqslant m+1 \\ k_m \geqslant 0}} e^{-\lambda x_1}\frac{(\lambda x_1)^{k_1}}{k_1!} e^{-\lambda(x_2-x_1)}\frac{(\lambda(x_2-x_1))^{k_2}}{k_2!} ... \\
&\qquad e^{-\lambda(x_m - x_{m-1})}\frac{(\lambda(x_m - x_{m-1}))^{k_m}}{k_m!} \\
+ \ &\sum_{k_1 \geqslant 1} \sum_{\substack{k_1+k_2 \geqslant 2 \\ k_2 \geqslant 0}} ... \sum_{\substack{k_1+k_2+...+k_m = m \\ k_m \geqslant 0}} e^{-\lambda x_1}\frac{(\lambda x_1)^{k_1}}{k_1!} e^{-\lambda(x_2-x_1)}\frac{(\lambda(x_2-x_1))^{k_2}}{k_2!} ... \\
&\qquad e^{-\lambda(x_m - x_{m-1})}\frac{(\lambda(x_m - x_{m-1}))^{k_m}}{k_m!}\left(1 - e^{-\lambda(x_{m+1}-x_m)}\right) \\
= \ &\sum_{k_1 \geqslant 1} \sum_{\substack{k_1+k_2 \geqslant 2 \\ k_2 \geqslant 0}} ... \sum_{\substack{k_1+k_2+...+k_m \geqslant m \\ k_m \geqslant 0}} \sum_{\substack{k_1+k_2+...+k_{m+1} \geqslant m+1 \\ k_{m+1} \geqslant 0}} e^{-\lambda x_1}\frac{(\lambda x_1)^{k_1}}{k_1!} \\
&... \ e^{-\lambda(x_m - x_{m-1})}\frac{(\lambda(x_m - x_{m-1}))^{k_m}}{k_m!} \ e^{-\lambda(x_{m+1}-x_m)}\frac{(\lambda(x_{m+1}-x_m))^{k_{m+1}}}{k_{m+1}!}.
\end{aligned}$$

Vadinasi, (32) lygybė teisinga, kai $n = m + 1$. Iš matematinės indukcijos principo išplaukia, kad (32) lygybė galioja bet kokiam n realių skaičių rinkiniui $0 \leqslant x_1 \leqslant x_2 \leqslant ... \leqslant x_n$.

Iš (31) ir (32) gauname, kad tokiam pačiam realių skaičių rinkiniui

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(T_1 \leqslant x_1, T_2 \leqslant x_2, ..., T_n \leqslant x_n) \\ = & \int_0^{x_1} \int_{u_1}^{x_2} ... \int_{u_{n-1}}^{x_n} \lambda^n e^{-\lambda u_n} \mathrm{d}u_n ... \mathrm{d}u_2 \mathrm{d}u_1. \end{aligned}$$

Vadinasi, bet kuriems neneigiamiems $y_1, y_2, ..., y_n$

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}\left(W_1 \leqslant y_1, W_2 \leqslant y_2, ..., W_n \leqslant y_n\right) \\ = & \mathbb{P}\left(T_1 \leqslant y_1, T_1 \leqslant T_2 \leqslant y_2 + T_1, ..., T_{n-1} \leqslant T_n \leqslant y_n + T_{n-1}\right) \\ = & \int_0^{y_1} \int_{u_1}^{y_2+u_1} ... \int_{u_{n-1}}^{y_n+u_{n-1}} \lambda^n e^{-\lambda u_n} \mathrm{d}u_n ... \mathrm{d}u_2 \mathrm{d}u_1 \\ = & \int_0^{y_1} \int_{u_1}^{y_2+u_1} ... \int_{u_{n-2}}^{y_{n-1}+u_{n-2}} \lambda^{n-1} e^{-\lambda u_{n-1}} \left(1 - e^{-\lambda y_n}\right) \mathrm{d}u_{n-1} ... \mathrm{d}u_2 \mathrm{d}u_1 \\ = & \quad ... = \prod_{i=1}^{n} \left(1 - e^{-\lambda y_i}\right). \end{aligned}$$

Ši paskutinė lygybė rodo teoremos tvirtinimo teisingumą. △

Kitas, paskutinis šio skyrelio tvirtinimas yra atvirkštinis teoremai 2.2.1.

2.2.2 Teorema. *Sakykime atsitiktiniai dydžiai $W_1, W_2, W_3, ...$ yra nepriklausomi ir pasiskirstę pagal tą patį eksponentinį dėsnį su parametru λ, t.y. visiems $i = 1, 2, 3, ...$*

$$\mathbb{P}(W_i \leqslant x) = \left(1 - e^{-\lambda x}\right) \mathbb{I}_{\{x \geqslant 0\}}$$

Apibrėžkime

$$\begin{aligned} T_0 &= 0, \\ T_n &= W_1 + W_2 + ... + W_n, \ n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Tada

$$N(t) = \max\left\{n \geqslant 1 : T_n \leqslant t\right\}, \ t \geqslant 0$$

yra homogeninis Puasono procesas su intencyvumu λ.

△ Norint įrodyti, kad $N(t)$ yra Puasono procesas reikia patikrinti visas 2.2.3 apibrėžimo sąlygas. Iš $N(t)$ apibrėžimo bet kuriam $t \geqslant 0$ ir bet kuriam $k \in \mathbb{N}$ turime

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(N(t) = k) \\ = & \mathbb{P}\left(W_1 + W_2 + ... + W_k \leqslant t < W_1 + W_2 + ... + W_{k+1}\right). \end{aligned} \tag{33}$$

Vadinasi,

$$\mathbb{P}(N(0)=0)=\mathbb{P}\left(W_1>0\right)=1$$

Taigi pirmoji 2.2.3 apibrėžimo sąlyga patenkinta. Iš ankstesnės (33) lygybės turime, kad $N(t)=n$ visiems $t\in[T_n,T_{n+1})$, $n\in\{0\}\cup\mathbb{N}$. Vadinasi, bet kuri proceso $N(t)$ trajektorija tolydi iš dešinės intervale $[0,\infty)$ ir turi ribą iš kairės intervale $(0,\infty)$. Taigi tenkinama 2.2.3 apibrėžimo ketvirtoji sąlyga.

Liko įrodyti trečią ir ketvirtą to apibrėžimo sąlygas. Pradžioje parodysime, kad atsitiktinis dydis T_k bet kuriam natūraliąjam k yra pasiskirstęs pagal gama skirstinį su parametrais λ ir k, t.y.

$$\mathbb{P}(T_k\leqslant x)=\left(1-e^{-\lambda x}\sum_{j=0}^{k-1}\frac{(\lambda x)^j}{j!}\right)\mathbb{I}_{\{x\geqslant 0\}}=F_k(x),\ x\geqslant 0. \tag{34}$$

Kadangi $T_1=W_1$, tai užrašytoji lygybė teisinga kai $k=1$. Sakykime uřašytoji lygybė teisinga bet kuriam $k=1,2,...,n$. Įrodysime, kad ji teisinga ir kai $k=n+1$. Iš tiesų, pasinaudoję dviejų nepriklausomų atsitiktinių dydžių sumos pasiskirstymo funkcijos išraiška, gauname:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(T_{n+1}\leqslant x)=\mathbb{P}(T_n+W_{n+1}\leqslant x)\\
=&\int_{-\infty}^{\infty}\mathbb{P}(T_n\leqslant x-u)\mathrm{d}\mathbb{P}(W_n\leqslant u)\\
=&\int_{0}^{x}\mathbb{P}(T_n\leqslant x-u)\mathrm{d}\mathbb{P}(W_n\leqslant u)\\
=&\int_{0}^{x}\left(1-e^{-\lambda(x-u)}\sum_{j=0}^{n-1}\frac{\lambda^j(x-u)^j}{j!}\right)\lambda e^{-\lambda u}\mathrm{d}u\\
=&\ 1-\lambda e^{-\lambda x}-e^{-\lambda x}\sum_{j=0}^{n-1}\frac{(\lambda x)^{j+1}}{(j+1)!}\\
=&\ 1-e^{-\lambda x}\sum_{j=0}^{n}\frac{(\lambda x)^j}{j!}.
\end{aligned}$$

Taigi, (34) lygybė teisinga, kai $k=n+1$. Pagal matematinės indukcijos principą išeina, kad (33) lygybė teisinga visiems natūraliesiems n.

Dabar parodysime, jog su visais $0\leqslant t_1\leqslant t_2,\ k,l\in\{0\}\cup\mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left(N(t_1)=k,N(t_2)-N(t_1)=l\right)\\
=&\ e^{-\lambda t_1}\frac{(\lambda t_1)^k}{k!}e^{-\lambda(t_2-t_1)}\frac{\lambda^l(t_2-t_1)^l}{l!}.
\end{aligned} \tag{35}$$

Nesunku pastebėti, kad iš pastarosios lygybės išplaukia 2.2.3 apibrėžimo trečioji sąlyga. Būtent, su visais $0 \leqslant s \leqslant t, l \in \{0\} \cup \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(N(t) - N(s) = l\right) &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}\left(N(s) = k, N(t) - N(s) = l\right) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda s} \frac{(\lambda s)^k}{k!} e^{-\lambda(t-s)} \frac{\lambda^l (t-s)^l}{l!} \\
&= e^{-\lambda(t-s)} \frac{\lambda^l (t-s)^l}{l!}.
\end{aligned}$$

Jei $k \geqslant 1$ ir $l \geqslant 2$, tai:

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}\left(N(t_1) = k, N(t_2) - N(t_1) = l\right) \\
= \;& \mathbb{P}\left(N(t_1) = k, N(t_2) = k + l\right) \\
= \;& \mathbb{P}\left(T_k \leqslant t_1 < T_{k+1}, T_{k+l} \leqslant t_2 < T_{k+l+1}\right) \\
= \;& \mathbb{P}\Big(0 \leqslant t_1 - T_k < W_{k+1}, 0 \leqslant t_2 - T_k - W_{k+1} - \widehat{T}_{k,l} < W_{k+l+1}\Big),
\end{aligned}$$

čia $\widehat{T}_{k,l} = T_{k+l} - T_{k+1}$, ir atsitiktiniai dydžiai $T_k, W_{k+1}, \widehat{T}_{k,l}, W_{k+l+1}$ yra nepriklausomi.

Pagal (34) formulę, atsitiktiniai dydžiai

$$\begin{aligned}
T_k &= W_1 + W_2 + ...W_k, \\
\widehat{T}_{k,l} &= W_{k+2} + W_{k+3} + ... + W_{k+l}
\end{aligned}$$

yra pasiskirstę pagal gama skirstinius, su pasiskirstymo funkcijomis atitinkamai lygiomis $F_k(x)$ ir $F_{l-1}(x)$. Vadinasi, nagrinėjamu atveju

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}\left(N(t_1) = k, N(t_2) - N(t_1) = l\right) \\
= \;& \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \mathbb{I}_{\{0 \leqslant t_1 - x < v, 0 \leqslant t_2 - x - v - y < u\}} \mathrm{d}F_k(x) \mathrm{d}F_1(v) \mathrm{d}F_{l-1}(y) \mathrm{d}F_1(u) \\
= \;& \int_0^{t_1} \int_{t_1 - x}^{t_2 - x} \int_0^{t_2 - x - v} \int_{t_2 - x - v - y}^{\infty} \mathrm{d}F_k(x) \mathrm{d}F_1(v) \mathrm{d}F_{l-1}(y) \mathrm{d}F_1(u) \\
= \;& \int_0^{t_1} \mathrm{d}x \int_{t_1 - x}^{t_2 - x} \mathrm{d}v \int_0^{t_2 - x - v} \mathrm{d}y \int_{t_2 - x - v - y}^{\infty} \lambda^4 e^{-\lambda(x+v+y+u)} \frac{(\lambda x)^{k-1}}{(k-1)!} \frac{(\lambda y)^{l-2}}{(l-2)!} \mathrm{d}u
\end{aligned}$$

$$= e^{-\lambda t_1} \frac{(\lambda t_1)^k}{k!} e^{-\lambda(t_2 - t_1)} \frac{\lambda^l (t_2 - t_1)^l}{l!}.$$

Jei $k=0$ ir $l \geqslant 2$, tai

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}\left(N(t_1)=0, N(t_2)-N(t_1)=l\right) \\
= \; & \mathbb{P}\left(t_1 < T_1, T_l \leqslant t_2 < T_{l+1}\right) \\
= \; & \mathbb{P}\left(t_1 < W_1, 0 \leqslant t_2 - W_1 - \widehat{T}_{0,l} < W_{l+1}\right) \\
= \; & \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty \mathbb{I}_{\{t_1 < x, 0 \leqslant t_2 - x - y < u\}} \mathrm{d}F_1(x) \mathrm{d}F_{l-1}(y) \mathrm{d}F_1(u) \\
= \; & \int\limits_{t_1}^\infty \mathrm{d}x \int\limits_0^{t_2 - x} \mathrm{d}y \int\limits_{t_2-x-y}^\infty \left(\lambda^3 e^{-\lambda(x+y+u)} \frac{(\lambda y)^{l-2}}{(l-2)!}\right) \mathrm{d}u \\
= \; & e^{-\lambda t_1} e^{-\lambda(t_2 - t_1)} \frac{\lambda^l (t_2 - t_1)^l}{l!}.
\end{aligned}$$

Jeigu $k \geqslant 1$ ir $l = 1$, tai

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}\left(N(t_1)=k, N(t_2)-N(t_1)=1\right) \\
= \; & \mathbb{P}\left(T_k \leqslant t_1 < T_{k+1}, T_{k+1} \leqslant t_2 < T_{k+2}\right) \\
= \; & \mathbb{P}\left(0 \leqslant t_1 - T_k < W_{k+1}, 0 \leqslant t_2 - T_k - W_{k+1} < W_{k+2}\right) \\
= \; & \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty \mathbb{I}_{\{0 \leqslant t_1 - x < v, 0 \leqslant t_2 - x - v < u\}} \mathrm{d}F_k(x) \mathrm{d}F_1(v) \mathrm{d}F_1(u) \\
= \; & \int\limits_0^{t_1} \mathrm{d}x \int\limits_{t_1 - x}^{t_2 - x} \mathrm{d}v \int\limits_{t_2-x-v}^\infty \left(\lambda^3 e^{-\lambda(x+v+u)} \frac{(\lambda x)^{k-1}}{(k-1)!}\right) \mathrm{d}u \\
= \; & e^{-\lambda t_1} \frac{(\lambda t_1)^k}{k!} e^{-\lambda(t_2 - t_1)} \lambda (t_2 - t_1).
\end{aligned}$$

Pagaliau, jeigu $k \geqslant 1$ ir $l = 0$, tai analogiškai

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}\left(N(t_1)=k, N(t_2)-N(t_1)=0\right) \\
= \; & \mathbb{P}\left(T_k \leqslant t_1 \leqslant t_2 < T_k + W_{k+1}\right) \\
= \; & \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty \mathbb{I}_{\{x \leqslant t_1 \leqslant t_2 < x + v\}} \mathrm{d}F_k(x) \mathrm{d}F_1(v) \\
= \; & \int\limits_0^{t_1} \mathrm{d}x \int\limits_{t_2 - x}^\infty \lambda^2 e^{-\lambda(x+v)} \frac{(\lambda x)^{k-1}}{(k-1)!} \mathrm{d}v \\
= \; & e^{-\lambda t_1} \frac{(\lambda t_1)^k}{k!} e^{-\lambda(t_2 - t_1)}.
\end{aligned}$$

Teliko išnagrinėti du išskirtinius atvejus. Būtent:

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}\left(N(t_1)=0, N(t_2)-N(t_1)=1\right) \\ = \; & \mathbb{P}\left(t_1 < W_1, 0 \leqslant t_2 - W_1 < W_2\right) \\ = \; & \int\limits_{t_1}^{\infty} \mathrm{d}x \int\limits_{t_2-x}^{\infty} \lambda^2 e^{-\lambda(x+y)} \mathrm{d}y \\ = \; & e^{-\lambda t_1} e^{-\lambda(t_2-t_1)} \lambda(t_2-t_1), \end{aligned}$$

ir

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}\left(N(t_1)=0, N(t_2)-N(t_1)=0\right) \\ = \; & \mathbb{P}\left(t_1 < W_1, t_2 < W_1\right) \\ = \; & \mathbb{P}\left(t_2 < W_1\right) \\ = \; & e^{-\lambda t_1} e^{-\lambda(t_2-t_1)}. \end{aligned}$$

Aišku, kad iš gautų lygybių išplaukia (35) formulė. Kaip matėme, pastaroji formulė garantuoja 2.2.3 apibrėžimo trečią sąlygą. Be to iš (35) formulės turime, kad bet kuriems laiko momentams $0 \leqslant t_1 \leqslant t_2$ atsitiktiniai dydžiai $N(t_1) - N(0)$ ir $N(t_2) - N(t_1)$ yra nepriklausomi, t.y.

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}\left(N(t_1)-N(0)=k, N(t_2)-N(t_1)=l\right) \\ = \; & \mathbb{P}\left(N(t_1)-N(0)=k\right) \mathbb{P}\left(N(t_2)-N(t_1)=l\right) \end{aligned}$$

visiems natūraliesiems k, l.

Taigi patenkinta 2.2.3 apibrėžimo antroji sąlyga, kai $n = 2$. Analogiškai galima parodyti, kad 2.2.3 apibrėžimo antroji sąlyga patenkinta bet kuriam natūraliąjam n. Vadinasi, procesas $N(t)$ yra nepriklausomų pokyčių procesas. Taigi visos 2.2.3 apibrėžimo sąlygos patenkintos. Procesas $N(t)$ yra homogeninis Puasono procesas su intencyvumu λ. $\triangle$

2.3 Sudėtinis Puasono procesas

Sakykime draudiko kapitalo kitimą aprašo klasikinis dinaminis rizikos modelis, t.y. draudiko kapitalas laiko momentu t užrašomas lygybe

$$U(t) = u + ct - \sum_{i=1}^{N(t)} Z_i$$

ir patenkintos visos 2.1 skyrelyje nurodytos sąlygos, t,y.

- draudiko turtas pradiniu laiko momentu $u = U(0) \geqslant 0$;
- žalos $Z_1, Z_2, Z_3, \ldots$ yra nepriklausomi vienodai pasiskirstę neneigiami atsitiktiniai dydžiai;
- premijų surinkimo greitis per laiko vienetą $c > 0$;
- žalų skaičius intervale $[0, t]$ yra homogeninis Puasono procesas $N(t)$ su tam tikru teigiamu intencyvumu λ;
- žalų skaičiaus procesas $N(t)$ ir žalų seka $Z_1, Z_2, Z_3, \ldots$ yra nepriklausomi.

Draudiko kapitalo $U(t)$ kitimą aprašančios lygties dalis

$$S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} Z_i$$

lygi sumai visų draudiko žalų, patirtų intervale $(0, t]$. Jei $N(t)$ yra homogeninis Puasono procesas, tai žalų sumos procesas $S(t)$ dažnai vadinamas sudėtiniu Puasono procesu.

2.3.1 Apibrėžimas. *Sakykime $Z_1, Z_2, \ldots$ yra nepriklausomų atsitiktinių dydžių seka, o $N(t)$ yra homogeninis Puasono procesas nepriklausantis nuo atsitiktinių dydžių $Z_1, Z_2, \ldots$. Tada procesas*

$$S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} Z_i$$

vadinamas sudėtiniu Puasono procesu.

Toliau šiame skyrelyje pateiksime kelias sudėtinio Puasono proceso savybes.

2.3.1 Lema. *Sudėtinis Puasono procesas yra nepriklausomų pokyčių procesas, t.y. su visais $0 \leqslant t_1 < t_2 < \ldots < t_n, n \in \mathbb{N}$ pokyčiai*

$$S(t_2) - S(t_1), S(t_3) - S(t_2), \ldots, S(t_n) - S(t_{n-1})$$

yra nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai.

$\triangle$ Lemą įrodysime atveju $n = 3$. Bendrasis atvejis nagrinėjamas analogiškai. Sakykime, $0 \leqslant t_1 < t_2 < t_3$, o B_1, B_2 bet kokios Borelio aibės. Seką $Z_1, Z_2, \ldots$ sudaro nepriklausomi vienodai pasiskirstę atsitiktiniai dydžiai, procesas $N(t)$ nepriklauso nuo šios atsitiktinių dydžių sekos, pagaliau, procesas $N(t)$ yra nepriklausomų pokyčių procesas. Vadinasi,

$$\mathbb{P}\left(S(t_2) - S(t_1) \in B_1, S(t_3) - S(t_2) \in B_2\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= \mathbb{P}\left(\sum_{i=N(t_1)+1}^{N(t_2)} Z_i \in B_1, \sum_{i=N(t_2)+1}^{N(t_3)} Z_i \in B_2\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{\infty}\bigcup_{l=0}^{\infty}\bigcup_{m=0}^{\infty}\left\{\sum_{i=N(t_1)+1}^{N(t_2)} Z_i \in B_1, \sum_{i=N(t_2)+1}^{N(t_3)} Z_i \in B_2,\right.\right. \\
&\quad N(t_1)=k, N(t_2)-N(t_1)=l, N(t_3)-N(t_2)=m\}) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\mathbb{P}\left(\sum_{i=k+1}^{k+l} Z_i \in B_1, \sum_{i=k+l+1}^{k+l+m} Z_i \in B_2,\right. \\
&\quad N(t_1)=k, N(t_2)-N(t_1)=l, N(t_3)-N(t_2)=m) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\mathbb{P}\left(\sum_{i=k+1}^{k+l} Z_i \in B_1\right)\mathbb{P}\left(\sum_{i=k+l+1}^{k+l+m} Z_i \in B_2\right) \\
&\quad \mathbb{P}\left(N(t_1)=k\right)\mathbb{P}\left(N(t_2)-N(t_1)=l\right)\mathbb{P}\left(N(t_3)-N(t_2)=m\right) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\mathbb{P}\left(N(t_1)=k\right)\sum_{l=0}^{\infty}\mathbb{P}\left(\sum_{i=k+1}^{k+l} Z_i \in B_1, N(t_2)-N(t_1)=l\right) \\
&\quad \sum_{m=0}^{\infty}\mathbb{P}\left(\sum_{i=k+l+1}^{k+l+m} Z_i \in B_2, N(t_3)-N(t_2)=m\right) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\mathbb{P}\left(N(t_1)=k\right)\sum_{l=0}^{\infty}\mathbb{P}\left(\sum_{i=N(t_1)+1}^{N(t_2)} Z_i \in B_1, N(t_2)-N(t_1)=l\right) \\
&\quad \sum_{m=0}^{\infty}\mathbb{P}\left(\sum_{i=N(t_2)+1}^{N(t_3)} Z_i \in B_2, N(t_3)-N(t_2)=m\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\sum_{i=N(t_1)+1}^{N(t_2)} Z_i \in B_1\right)\mathbb{P}\left(\sum_{i=N(t_2)+1}^{N(t_3)} Z_i \in B_2\right) \\
&= \mathbb{P}\left(S(t_2)-S(t_1) \in B_1\right)\mathbb{P}\left(S(t_3)-S(t_2) \in B_2\right)
\end{aligned}
$$

Kadangi B_1 ir B_2 yra bet kokios Borelio aibės, tai proceso prieaugiai $S(t_2)-S(t_1), S(t_3)-S(t_2)$ yra nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai. Kaip jau minėjome bet kokio skaičiaus proceso prieaugių nepriklausomumas įrodomas analogiškai. $\triangle$

2.3.2 Lema. *Sudėtinis Puasono procesas turi stacionarius prieaugius, t.y. visiems $0 \leqslant t_1 < t_2$ pokyčių $S(t_2)-S(t_1)$ pasiskirstymas priklauso tik nuo skirtumo t_2-t_1. Būtent, bet kuriai Borelio aibei B teisinga lygybė*

$$
\mathbb{P}(S(t_2)-S(t_1) \in B) = e^{-\lambda(t_2-t_1)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda(t_2-t_1))^k}{k!}\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{k} Z_i \in B\right),
$$

kurioje λ yra homogeninio Puasono proceso intensyvumas.

$\triangle$ Homogeninis Puasono procesas $N(t)$ nepriklauso nuo atsitiktinių dydžių $Z_1, Z_2, ...$, o šie dydžiai nepriklausomi ir vienodai pasiskirstę. Vadinasi,

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}(S(t_2) - S(t_1) \in B) \\
= & \ \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{N(t_2)-N(t_1)} Z_i \in B\right) \\
= & \ \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{\infty}\left\{\sum_{i=1}^{N(t_2)-N(t_1)} Z_i \in B, N(t_2) - N(t_1) = k\right\}\right) \\
= & \ \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{k} Z_i \in B, N(t_2) - N(t_1) = k\right) \\
= & \ \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{k} Z_i \in B\right) \mathbb{P}\left(N(t_2) - N(t_1) = k\right) \\
= & \ e^{-\lambda(t_2-t_1)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda(t_2-t_1))^k}{k!} \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{k} Z_i \in B\right)
\end{aligned}$$

$\triangle$

2.3.3 Lema. *Sakykime*

$$S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} Z_i$$

yra sudėtinis Puasono procesas, homogeninio Puasono proceso intensyvumas yra λ ir atsitiktinis dydis Z_1 turi baigtinį vidurkį $\mathbb{E}Z_1$. Tada bet kuriam teigiamam t

$$\mathbb{E}S(t) = \lambda t \, \mathbb{E}Z_1.$$

$\triangle$ Naudodamiesi žinomomis atsitiktinių dydžių vidurkių ir sąlyginių vidurkių savybėmis gauname

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}S(t) &= \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{N(t)} Z_i\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{N(t)} Z_i \Big| N(t)\right)\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \mathbb{E}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{N(t)} Z_i \Big| N(t)=k\right)\mathbb{I}_{\{N(t)=k\}}\right)\\
&= \mathbb{E}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{k} Z_i\right)\mathbb{I}_{\{N(t)=k\}}\right)\\
&= \mathbb{E}\left(\sum_{k=0}^{\infty}(k\ \mathbb{E}Z_1)\mathbb{I}_{\{N(t)=k\}}\right)\\
&= \mathbb{E}Z_1\mathbb{E}\left(\sum_{k=0}^{\infty} k\mathbb{I}_{\{N(t)=k\}}\right)\\
&= \mathbb{E}Z_1\sum_{k=0}^{\infty} k\mathbb{P}(N(t)=k)\\
&= \mathbb{E}Z_1\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(\lambda t)^k}{(k-1)!}e^{-\lambda t}\\
&= \lambda t\ \mathbb{E}Z_1.
\end{aligned}
$$

$\triangle$

2.3.4 Lema. *Sakykime*

$$S(t)=\sum_{i=1}^{N(t)} Z_i$$

yra sudėtinis Puasono procesas, homogeninio Puasono proceso $N(t)$ intensyvumas yra λ, o atsitiktinis dydis Z_1 turi baigtinį antros eilės momentą $\mathbb{E}(Z_1^2)$. Tada bet kuriam teigiamam t

$$\mathbb{D}S(t)=\lambda t\ \mathbb{E}(Z_1^2).$$

$\triangle$ Analogiškai, kaip 2.3.3 lemos įrodyme, gauname

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(S^2(t)\right) &= \mathbb{E}\left(\left(\sum_{i=1}^{N(t)} Z_i\right)^2\right)\\
&= \mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(\left(\sum_{i=1}^{N(t)} Z_i\right)^2 \Big| N(t)\right)\right)\\
&= \mathbb{E}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\mathbb{E}\left(\left(\sum_{i=1}^{N(t)} Z_i\right)^2 \Big| N(t)=k\right)\mathbb{I}_{\{N(t)=k\}}\right)
\end{aligned}
$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}\left(\left(\sum_{i=1}^{k} Z_i\right)^2\right) \mathbb{P}(N(t) = k).$$

Bet kuriam sveikam neneigiamam k

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\left(\sum_{i=1}^{k} Z_i\right)^2\right) &= \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{k} Z_i^2 + \sum_{i=1}^{k} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{k} Z_i Z_j\right) \\
&= k\mathbb{E}\left(Z_1^2\right) + \sum_{i=1}^{k} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{k} \mathbb{E}Z_i \mathbb{E}Z_j \\
&= k\mathbb{E}\left(Z_1^2\right) + k(k-1)\left(\mathbb{E}Z_1\right)^2.
\end{aligned}$$

Todėl

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(S^2(t)\right) &= \mathbb{E}\left(Z_1^2\right) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{(k-1)!} e^{-\lambda t} \\
&+ \left(\mathbb{E}Z_1\right)^2 \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{(k-2)!} e^{-\lambda t} \\
&= \mathbb{E}\left(Z_1^2\right) \lambda t + \left(\mathbb{E}Z_1\right)^2 (\lambda t)^2.
\end{aligned}$$

Vadinasi, pagal 2.3.3 lemą

$$\mathbb{D}(S(t)) = \mathbb{E}\left(S^2(t)\right) - \left(\,\mathbb{E}S(t)\right)^2 = \lambda t\ \mathbb{E}(Z_1^2).$$

$\triangle$

2.4 Bankroto tikimybė klasikiniam rizikos procesui

Sakykime procesas $U(t)$ aprašo draudiko valdomo turto kitimą klasikiniame dinaminiame rizikos modelyje. Pagal (30) formulę bet kuriam laiko momentui t

$$U(t) = u + ct - \sum_{i=1}^{N(t)} Z_i$$

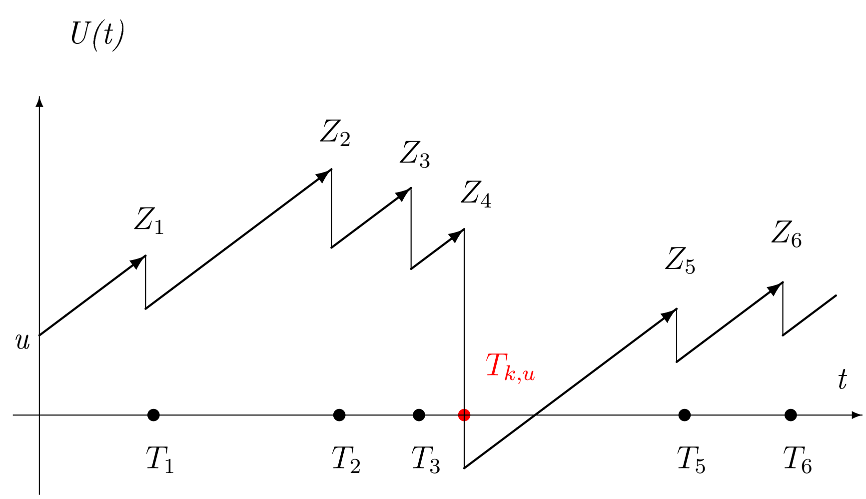
ir tenkinamos tokios sąlygos:

- draudiko turtas pradiniu laiko momentu $u = U(0)$ yra neneigiamas;
- draudiko patiriamos žalos $Z_1, Z_2, Z_3, \ldots$ yra nepriklausomi vienodai pasiskirstę neneigiami atsitiktiniai dydžiai;
- premijų surinkimo greitis per laiko vienetą c yra teigiamas;
- žalų skaičius intervale $[0, t]$ $N(t)$ yra homogeninis Puasono procesas su tam tikru teigiamu intencyvumu λ;
- procesas $N(t)$ ir atsitiktinių dydžių seka $Z_1, Z_2, Z_3, \ldots$ yra nepriklausomi.

Jeigu kuriuo nors momentu $t > 0$ draudiko turto vertė $U(t)$ nukrenta žemiau 0, tai laikome, kad įvyko bankrotas. Laiko momentą, kai draudiko turtas pirmą kartą nukrito žemiau 0, vadiname bankroto laiku ir žymime $T_{k,u}$. Aišku, kad $T_{k,u}$ yra atsitiktinis dydis priklausantis nuo draudiko pradinio kapitalo ir nuo kitų klasikinio dinaminio rizikos modelio sudedamųjų dalių. Be to

$$T_{k,u} = \begin{cases} \inf\{t > 0 : U(t) < 0\}, \\ \infty, \text{ jeigu } U(t) \geqslant 0 \text{ visiems } t > 0. \end{cases}$$

Žemiau nubrėžta charakteringa klasikinio rizikos proceso $U(t)$ trajektorija su bankrotu



Šiame grafike, kaip ir 2.1 skyrelyje, T_n yra n-osios žalos pasirodymo laikas.

Tikimybė, kad bankroto laikas baigtinis vadinama bankroto tikimybe ir žymima simboliu $\psi(u)$. Taigi

$$\begin{aligned}\psi(u) &= \mathbb{P}(T_{k,u} < \infty) \\ &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{t\geqslant 0}\{U(t)<0\}\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\inf_{t\geqslant 0} U(t) < 0\right). \end{aligned} \tag{36}$$

Iš 2.2.1 teoremos išplaukia, kad atsitiktiniai laiko tarpai tarp įvykusių žalų $W_1 = T_1, W_2 = T_2 - T_1, W_3 = T_3 - T_2, \ldots$ yra nepriklausomi pasiskirstę pagal eksponentinį dėsnį su parametru λ.

Antra vertus, procesas $U(t)$ tiesiškai auga intervaluose $[T_n, T_{n+1}),\ n \in \mathbb{N}$. Vadinasi, bankrotas gali įvykti tik kokiu nors žalos pasirodymo momentu T_n. Todėl bankroto tikimybę galima išreikšti ir kitaip:

$$\begin{aligned}\psi(u) &= \mathbb{P}\left(\inf_{n\geqslant 1} U(T_n) < 0\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\inf_{n\geqslant 1}\left\{u + cT_n - \sum_{i=1}^{n} Z_i\right\} < 0\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\inf_{n\geqslant 1}\left\{u - \sum_{i=1}^{n}(Z_i - cW_i)\right\} < 0\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\sup_{n\geqslant 1}\left\{\sum_{i=1}^{n}(Z_i - cW_i)\right\} > u\right) \end{aligned} \tag{37}$$

Gautoji išraiška rodo, kad bankroto tikimybė klasikiniame dinaminiame rizikos modelyje yra tam tikrų atsitiktinių dydžių sumų supremumo pasiskirstymo funkcijos uodega.

2.5 Grynojo pelno sąlyga

Sakykime draudiko valdomas turtas $U(t)$ kinta pagal (30) formulę, t.y. bet kuriam laiko momentui t

$$U(t) = u + ct - \sum_{i=1}^{N(t)} Z_i$$

ir tenkinamos įprastinės klasikinio dinaminio rizikos modelio sąlygos:

- draudiko turtas pradiniu laiko momentu $u = U(0)$ yra neneigiamas;
- draudiko patiriamos žalos $Z_1, Z_2, Z_3, ...$ yra nepriklausomi vienodai pasiskirstę neneigiami atsitiktiniai dydžiai;
- premijų surinkimo greitis per laiko vienetą c yra teigiamas;
- žalų skaičius intervale $[0, t]$ $N(t)$ yra homogeninis Puasono procesas su tam tikru teigiamu intencyvumu λ;
- procesas $N(t)$ ir atsitiktinių dydžių seka $Z_1, Z_2, Z_3, ...$ yra nepriklausomi.

Šiame skyrelyje aptarsime atvejus, kada bankroto tikimybė $\psi(u)$ nusakyta (36) ir (37) formulėmis lygi vienetui. Iš 2.2.1 teoremos išplaukia, kad laiko tarpai tarp žalų pasirodymų $W_1 = T_1, W_2 = T_2 - T_1, W_3 = T_3 - T_2, ...$ yra nepriklausomi pasiskirstę pagal eksponentinį dėsnį su parametru λ, t.y. $\mathbb{P}(W_1 \leqslant x) = (1 - e^{-\lambda x})\mathbb{I}_{\{x \geqslant 0\}}$. Nesunku suskaičiuoti, kad tokiam atsitiktiniam dydžiui $\mathbb{E}W_1 = 1/\lambda$.

2.5.1 Lema. *Jeigu klasikiniame dinaminiame rizikos modelyje žala Z_1 turi baigtinį vidurkį ir*

$$\mathbb{E}Z_1 - c\mathbb{E}W_1 = \mathbb{E}Z_1 - \frac{c}{\lambda} > 0,$$

tai bankroto tikimybė $\psi(u) = 1$ bet kuriai fiksuotai neneigiamai pradinio kapitalo u reikšmei .

△ Pagal (37) formulę fiksuotam u

$$\psi(u) = \mathbb{P}\left(\sup_{n \geqslant 1}\left\{\sum_{i=1}^{n}(Z_i - cW_i)\right\} > u\right).$$

Pažymėkime

$$\mathbb{E}(Z_1 - cW_1) = \mu > 0.$$

Visiems pakankamai dideliems n ($n \geqslant M_{u,\mu}$)

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n}(Z_i - cW_i) > u\right) &\geqslant \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n}(Z_i - cW_i) > \frac{n\mu}{2}\right)\\ = \ \mathbb{P}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(Z_i - cW_i) - \mu > -\frac{\mu}{2}\right).\end{aligned}$$

Iš didžiųjų skaičių dėsnio išplaukia, kad

$$\mathbb{P}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(Z_i - cW_i) - \mu > -\frac{\mu}{2}\right) \to 1.$$

Todėl bet kuriam teigiamam ε atsiras natūralusis $M_\varepsilon \geqslant M_{u,\mu}$ toks, kad

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n}(Z_i - cW_i) > u\right) \geqslant 1 - \varepsilon,$$

kai $n \geqslant M_\varepsilon$.

Taigi bet kuriam teigiamam ε

$$\psi(u) \geqslant \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{M_\varepsilon}(Z_i - cW_i) > u\right) \geqslant 1 - \varepsilon.$$

Iš paskutinio įverčio išplaukia lemos tvirtinimas. $\triangle$

Lemos 2.5.1 tvirtinimas gali būti sustiprintas sąlygą $\mathbb{E}Z_1 - c\mathbb{E}W_1 > 0$ pakeičiant sąlyga $\mathbb{E}Z_1 - c\mathbb{E}W_1 \geqslant 0$. Tačiau tokio naujo teiginio įrodymui neužtenka didžiųjų skaičių dėsnio pritaikymo. Reikalinga gilesnė vadinamojo atsitiktinio klaidžiojimo savybių analizė. Tokį tvirtinimą įrodysime sekančiame skyriuje, kuriame nagrinėsime bendresnį dinaminį E. Sparre Andersen rizikos modelį.

Taigi esant sąlygai $\mathbb{E}Z_1 - c\mathbb{E}W_1 \geqslant 0$ bankroto tikimybė $\psi(u) = 1$. Vadinasi, $\psi(u)$ gali būti mažesnė už vienetą tik tuo atveju, kai $\mathbb{E}Z_1 - c\mathbb{E}W_1 < 0$ Pastaroji sąlyga draudos matematikoje vadinama grynojo pelno sąlyga.

2.5.1 Apibrėžimas. *Sakykime patenkintos klasikinio dinaminio rizikos modelio sąlygos, o žalos Z_1 skirstinys turi baigtinį vidurkį. Tada sąlyga*

$$\mathbb{E}Z_1 - c\mathbb{E}W_1 = \mathbb{E}Z_1 - \frac{c}{\lambda} < 0, \tag{38}$$

vadinama grynojo pelno sąlyga.

Grynojo pelno sąlyga turi paprastą interpretaciją. Būtent, apibrėžimo sąlyga $\mathbb{E}Z_1 - c\mathbb{E}W_1 < 0$ reiškia, kad fiksuotam vienetiniam laiko tarpui gresiančios žalos vidurkis $\mathbb{E}Z_1$ yra mažesnis už vidutines draudiko pajamas gaunamas per šį vienetinį laiko tarpą $c\mathbb{E}W_1$. Aišku, kad klasikiniame dinaminiame rizikos modelyje, parinkus

$$c = (1 + \varrho)\frac{\mathbb{E}Z_1}{\mathbb{E}W_1}$$

su teigiamu ϱ, gausime klasikinį dinaminį rizikos modelį su patenkinta grynojo pelno sąlyga. Teigiamas skaičius ϱ tokioje situacijoje paprastai vadinamas apsaugos koeficijentu.

2.6 Pusiausvyros koeficientas

Šiame skyrelyje apibrėšime vadinamąjį Lundbergo pusiausvyros koeficientą, kuris betarpiškai susijęs su bankroto tikimybės $\psi(u)$ įvertinimu iš viršaus. Aptarsime atvejus, kada tas pusiausvyros koeficientas egzistuoja. Iš žemiau pateiktų sanprotavimų nesunku pastebėti, kad Lundbergo pusiausvyros koeficientas klasikiniame dinaminiame rizikos modelyje atlieka tokį patį vaidmenį kaip (28) Lundbergo lygties sprendinys diskrečiame dinaminiame rizikos modelyje.

2.6.1 Apibrėžimas. *Sakykime žalos skirstinys klasikiniame dinaminiame rizikos modelyje turi baigtinį eksponentinį momentą* $\mathbb{E}\left(e^{vZ_1}\right)$ *intervale* $v \in [0, \gamma)$. *Teigiamas lygties*

$$\lambda \mathbb{E}\left(e^{rZ_1}\right) - \lambda - cr = 0, \tag{39}$$

vadinamas pusiausvyros arba Lundbergo koeficijentu.

2.6.1 Lema. *Sakykime kažkokiam teigiamam* γ

$$\mathbb{E}\left(e^{vZ_1}\right) < \infty,$$

visiems $v \in [0, \gamma)$ *ir*

$$\lim_{v \to \gamma - 0} \mathbb{E}\left(e^{vZ_1}\right) = \infty.$$

Sakykime, be to patenkinta grynojo pelno sąlyga (38), t.y.

$$\mathbb{E}Z_1 - \frac{c}{\lambda} < 0$$

Tada egzistuoja vienintelis teigiamas (39) lygties sprendinys $r = R$.

$\triangle$ Realiems $r \in [0, \gamma)$ apibrėžkime funkciją

$$g(r) = \lambda \mathbb{E}\left(e^{rZ_1}\right) - \lambda - cr.$$

Funkcija $g(r)$ savo apibrėžimo srityje yra baigtinė turi bet kurios eilės išvestines, be to $g(0) = 0$.

Iš grynojo pelno sąlygos gauname

$$(g(r))'_{r=0} = \lambda \left(\mathbb{E}\left(e^{rZ_1}\right)\right)'_{r=0} - c = \lambda \mathbb{E}Z_1 - c < 0.$$

Antra vertus,

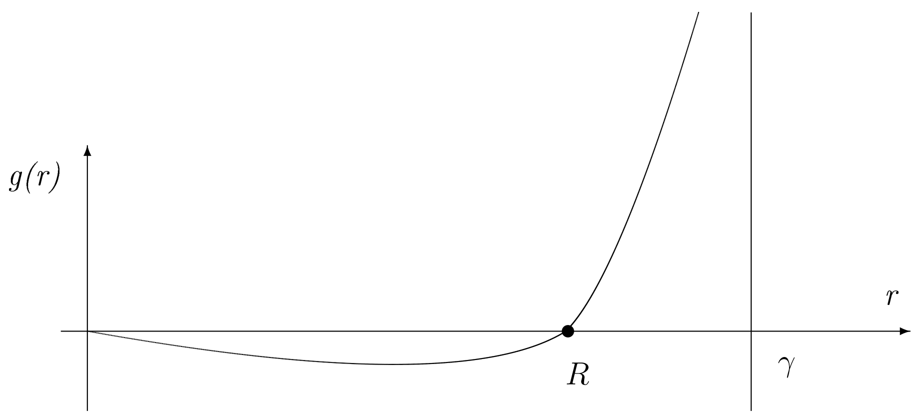
$$(g(r))'' = \lambda \left(\mathbb{E}\left(e^{rZ_1}\right)\right)'' = \lambda \int\limits_0^\infty y^2 e^{ry} \mathrm{d}\mathbb{P}(Z_1 \leqslant y) \geqslant 0$$

visiems $r \in [0, \gamma)$.

Pagaliau atsižvelgę į lemos antrąją sąlygą, gauname

$$\lim_{r \to \gamma - 0} g(r) = \infty.$$

Iš gautų funkcijos $g(r)$ tyrimo epizodų išplaukia, kad funkcija $g(r)$ turi tokio pavidalo grafiką.



Iš grafiko nesunku pastebėti, kad egzistuoja vienintelis teigiamas skaičius R, kuriam

$$g(R) = \lambda \mathbb{E}\left(e^{RZ_1}\right) - \lambda - cR = 0.$$

$\triangle$

2.6.2 Lema. *Sakykime bet kokiam teigiamam v*

$$\mathbb{E}\left(e^{vZ_1}\right) < \infty,$$

patenkinta grynojo pelno sąlyga (38), ir atsitiktinis dydis aprašantis žalą Z_1 neišsigimęs taške 0, t.y.

$$\mathbb{P}(Z_1 = 0) < 1.$$

Tada irgi egzistuoja vienintelis teigiamas (39) lygties sprendinys $r = R$.

$\triangle$ Lemos įrodymas panašus į 1.6.1 lemos įrodymą. Bet kokiam realiam $r \in [0, \infty)$ apibrėžkime funkciją

$$g(r) = \lambda \mathbb{E}\left(e^{rZ_1}\right) - \lambda - cr.$$

Kaip ir lemoje 1.6.1 funkcija $g(r)$ bet kuriam realiam r baigtinė ir turi bet kurios eilės baigtines išvestines. Analogiškai, kaip 1.6.1 lemoje:

$$\begin{aligned} g(0) &= 0, \\ (g(r))'_{r=0} &= \lambda\left(\mathbb{E}\left(e^{rZ_1}\right)\right)'_{r=0} - c = \lambda \mathbb{E} Z_1 - c < 0, \\ (g(r))'' &= \lambda\left(\mathbb{E}\left(e^{rZ_1}\right)\right)'' = \lambda \int\limits_0^\infty y^2 e^{ry} \mathrm{d}\mathbb{P}(Z_1 \leqslant y) \geqslant 0,\ r \geqslant 0. \end{aligned}$$

Kadangi žala Z_1 yra neneigiamas neišsigimęs taške 0 atsitiktinis dydis, tai egzistuoja teigiami skaičiai ε ir q, kuriems

$$\mathbb{P}(Z_1 > \varepsilon) = q$$

Vadinasi, nagrinėjamu atveju

$$\mathbb{E}\left(e^{rZ_1}\right) = \int\limits_0^\infty e^{ry} \mathrm{d}\mathbb{P}(Z_1 \leqslant y) \geqslant \int\limits_\varepsilon^\infty e^{ry} \mathrm{d}\mathbb{P}(Z_1 \leqslant y) \geqslant e^{r\varepsilon} q$$

bet kuriam teigiamam r.

Todėl

$$\lim_{r \to \infty} g(r) \geqslant \lim_{r \to \infty} (\lambda e^{r\varepsilon} q - \lambda - cr) = \infty.$$

Iš surašytų funkcijos $g(r)$ tyrimo rezultatų išplaukia, kad šios funkcijos grafikas turi tokį patį pavidalą kaip 1.6.1 lemoje. Vadinasi, nagrinėjamu atveju (39) Lundberg lygtis irgi turi vienintelį teigiamą sprendinį. $\triangle$

2.6.1 Pavyzdys. *Sakykime žala Z_1 klasikiniame dinaminiame rizikos modelyje pasiskirsčiusi pagal eksponentinį skirstinį su teigiamu parametru α, t.y.*

$$\mathbb{P}(Z_1 \leqslant y) = \left(1 - e^{-\alpha y}\right) \mathbb{I}_{\{y \geqslant 0\}}.$$

Rasime pusiausvyros koeficijento R išraišką tokiai žalai.

$\triangle$ Kadangi bet kuriam $r \in [0, \alpha)$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(e^{rZ_1}\right) &= \int_0^\infty e^{ry}\mathrm{d}\mathbb{P}(Z_1 \leqslant y) \\
&= \alpha \int_0^\infty e^{(r-\alpha)y}\mathrm{d}y = \frac{\alpha}{\alpha - r},
\end{aligned}$$

tai patenkintos 1.6.1 lemos sąlygos ir (39) Lundberg lygtis

$$\lambda \frac{\alpha}{\alpha - r} = \lambda + cr$$

turi vienintelį teigiamą sprendinį. Būtent:

$$\begin{aligned}
&\lambda\alpha = (\lambda + cR)(\alpha - R), \\
&cR^2 + (\lambda - c\alpha)R = 0, \\
&R^2 - \left(\alpha - \frac{\lambda}{c}\right) R = 0, \\
&R = \alpha - \frac{\lambda}{c}\ .
\end{aligned}$$

$\triangle$

2.6.2 Pavyzdys. *Sakykime žala Z_1 klasikiniame dinaminiame rizikos modelyje pasiskirsčiusi pagal gama skirstinį su parametrais $n = 2$ ir $\alpha = 2$, t.y.*

$$\mathbb{P}(Z_1 \leqslant y) = \left(1 - e^{-2y}(1 - 2y)\right) \mathbb{I}_{\{y \geqslant 0\}},$$

o modelio apsaugos koeficientas $\varrho = 0.1$. Rasime tokio rizikos modelio pusiausvyros koeficientą R.

$\triangle$ Nagrinėjamu atveju bet kuriam $r \in [0, 2)$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(e^{rZ_1}\right) &= \int_0^\infty e^{ry}\mathrm{d}\mathbb{P}(Z_1 \leqslant y) = 4\int_0^\infty ye^{(r-2)y}\mathrm{d}y \\
&= \frac{4}{2-r}\int_0^\infty e^{(r-2)y}\mathrm{d}y = \frac{4}{(2-r)^2}\ .
\end{aligned}$$

Matome, kad 1.6.1 lemos sąlygos patenkintos, todėl (39) Lundberg lygtis

$$\lambda \frac{4}{(2-r)^2} = \lambda + cr$$

turi vienintelį teigiamą sprendinį intervale $[0, 2)$.

Nagrinėjamu atveju

$$c = (1 + \varrho)\, \frac{\mathbb{E}Z_1}{\mathbb{E}W_1} = 1.1\ \lambda\ \mathbb{E}Z_1 = 1.1\ \lambda.$$

Todėl Lundberg lygtis ekvivalenti lygčiai

$$\frac{4}{(2-r)^2} = 1 + 1.1\ r.$$

Pertvarkę šią lygtį gauname, kad pusiausvyros koeficientas R turi tenkinti lygtį

$$1.1R^3 - 3.4R^2 + 0.4R = 0.$$

Išsprendę šią lygtį, gauname tris šaknis:

$$R_1 = 0,\ R_2 = 0.1225,\ R_3 = 2.968.$$

Kadangi $\mathbb{E}\left(e^{rZ_1}\right)$ egzistuoja tik tada kai $r < 2$, tai

$$R = 0.1225\ .$$

$\triangle$

Norint įvertinti bankroto tikimybę nebūtina tiksliai surasti pusiausvyros koeficijento reikšmę. Pakanka įvertinti šį pusiausvyros koeficijentą iš viršaus. Geriausia tą padaryti skaitiniais metodais. Toliau aprašysime vieną gana grubų, tačiau labai paprastai skaičiuojamą pusiausvyros koeficijento įvertį.

Lygtį (39) pusiausvyros koeficijentui skaičiuoti galima užrašyti taip:

$$\lambda + cr = \lambda \int_0^\infty e^{ry} \mathrm{d}\mathbb{P}(Z_1 \leqslant y)\ .$$

Kadangi

$$e^{ry} \geqslant 1 + ry + \frac{1}{2}(ry)^2,$$

tai pusiausvyros koeficientas R turi tenkinti nelygybę

$$\begin{aligned}
\lambda + cR &\geqslant \lambda \int_0^\infty \left(1 + Ry + \frac{1}{2}(Ry)^2\right) \mathrm{d}\mathbb{P}(Z_1 \leqslant y) \\
&= \lambda\left(1 + R\ \mathbb{E}Z_1 + \frac{1}{2}\ R^2\ \mathbb{E}Z_1^2\right).
\end{aligned}$$

Taigi, jeigu pusiausvyros koeficientas egzistuoja, tai

$$R \leqslant \frac{2(c - \lambda \mathbb{E} Z_1)}{\lambda \mathbb{E} Z_1^2}. \tag{40}$$

2.6.3 Pavyzdys. *Sakykime žala Z_1 klasikiniame dinaminiame rizikos modelyje pasiskirsčiusi pagal gama skirstinį su parametrais $n = 2.5$ ir $\alpha = 2.5$, t.y.*

$$\mathbb{P}(Z_1 \leqslant y) = \frac{(2.5)^{2.5}}{\Gamma(2.5)} \int_0^y v^{1.5} e^{-2.5v} dv,$$

o modelio apsaugos koeficientas $\varrho = 0.05$. Įsitikinsime, kad tokio rizikos modelio pusiausvyros koeficientas R egzistuoja ir rasime jo įvertį iš viršaus.

△ Po tam tikrų skaičiavimų galima įsitikinti, kad nagrinėjamu atveju visiems $r \in [0, 2.5)$

$$\mathbb{E}\left(e^{rZ_1}\right) = \left(\frac{2.5}{2.5 - r}\right)^{2.5}.$$

Nesunku pastebėti, kad šis eksponentinis momentas tenkina 1.6.1 lemos sąlygas. Vadinasi, nagrinėjamo modelio pusiausvyros koeficientas egzistuoja.

Kadangi

$$\mathbb{E} Z_1 = 1, \ \mathbb{E} Z_1^2 = \frac{7}{5}$$

ir

$$c = (1 + \varrho)\lambda \, \mathbb{E} Z_1 = 1.05 \, \lambda,$$

tai pagal (40) formulę

$$R \leqslant \frac{2(1.05 \, \lambda - \lambda)}{7\lambda/5} = \frac{1}{14} = 0.0714.$$

△

2.7 Lundberg nelygybė klasikiniam rizikos procesui

Šiame skyrelyje įrodysime vieną klasikinį rezultatą, vadinamąją Lundberg nelygybę. Ši nelygybė leidžia įvertinti bankroto tikimybę $\psi(u)$ klasikiniame dinaminiame rizikos modelyje iš viršaus tuo atveju, kai žalos skirstinys užtikrina pusiausvyros koeficijento egzistavimą.

2.7.1 Teorema. *Sakykime tenkinamos visos įprastinės klasikinio dinaminio rizikos modelio sąlygos:*

- *draudiko turtas pradiniu laiko momentu $u = U(0)$ yra neneigiamas;*
- *draudiko patiriamos žalos $Z_1, Z_2, Z_3, \ldots$ yra nepriklausomi vienodai pasiskirstę neneigiami atsitiktiniai dydžiai;*
- *premijų surinkimo greitis per laiko vienetą c yra teigiamas;*
- *žalų intervale $[0,t]$ skaičius $N(t)$ yra homogeninis Puasono procesas su tam tikru teigiamu intensyvumu λ;*
- *procesas N ir atsitiktinių dydžių seka $Z_1, Z_2, Z_3, \ldots$ yra nepriklausomi.*

Sakykime be to patenkinta grynojo pelno sąlyga (38):

$$\mathbb{E}Z_1 - c\mathbb{E}W_1 = \mathbb{E}Z_1 - \frac{c}{\lambda} < 0,$$

žala Z_1 turi baigtinį eksponentinį momentą $\mathbb{E}\left(e^{rZ_1}\right)$ kokiam nors teigiamam r, ir egzistuoja pusiausvyros koeficientas R apibrėžtas (39) lygtimi:

$$\lambda\mathbb{E}\left(e^{RZ_1}\right) = \lambda + cR.$$

Tada

$$\psi(u) \leqslant \exp\{-Ru\} \tag{41}$$

bet kuriai pradinio kapitalo vertei u.

$\triangle$ Iš (37) lygybės turime

$$\psi(u) = \mathbb{P}\left(\sup_{k\geqslant 1}\left\{\sum_{i=1}^{k}(Z_i - cW_i)\right\} > u\right).$$

Bet kokiam natūraliąjam n apibrėžkime panašius dydžius

$$\begin{aligned}\psi_n(u) &= \mathbb{P}\left(\max_{1\leqslant k\leqslant n}\left\{\sum_{i=1}^{k}(Z_i - cW_i)\right\} > u\right)\\ &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n}\left\{\sum_{i=1}^{k}(Z_i - cW_i) > u\right\}\right).\end{aligned}$$

Toliau, taikydami indukcijos principą parodysime, kad visiems n ir u

$$\psi_n(u) \leqslant \exp\{-Ru\} \tag{42}$$

Iš šios nelygybės išplaukia teoremos įvertis, nes bet kuriai pradinio kapitalo vertei u

$$\lim_{n\to\infty}\psi_n(u) = \psi(u)$$

Jeigu $n = 1$, tai taikydami Markovo nelygybę, gauname

$$\begin{aligned}
\psi_1(u) &= \mathbb{P}\left(Z_1 - cW_1 > u\right) = \mathbb{P}\left(e^{R(Z_1 - cW_1)} > e^{Ru}\right) \\
&\leqslant e^{-Ru}\mathbb{E}e^{R(Z_1 - cW_1)} = e^{-Ru}\mathbb{E}e^{RZ_1}\ \mathbb{E}e^{-cRW_1} \\
&= e^{-Ru}\mathbb{E}e^{RZ_1}\frac{\lambda}{\lambda + cR} = e^{-Ru}.
\end{aligned}$$

Sakykime, (42) įvertis teisingas kažkokiam natūraliąjam M. Parodysime, kad tokiu atveju toks pats įvertis teisingas ir kai $n = M + 1$.

Iš tiesų:

$$\begin{aligned}
&\psi_{M+1}(u) = \mathbb{P}\left(\max_{1\leqslant k\leqslant M+1}\left\{\sum_{i=1}^{k}(Z_i - cW_i)\right\} > u\right) \\
= \;& \mathbb{P}(Z_1 - cW_1 > u) \\
+ \;& \mathbb{P}\left(\max_{2\leqslant k\leqslant M+1}\left\{Z_1 - cW_1 + \sum_{i=2}^{k}(Z_i - cW_i)\right\} > u, Z_1 - cW_1 \leqslant u\right) \\
= \;& \int\limits_{(u,\infty)} \mathrm{d}\mathbb{P}(Z_1 - cW_1 \leqslant y) \\
+ \;& \int\limits_{(-\infty,u]} \mathbb{P}\left(\max_{2\leqslant k\leqslant M+1}\left\{y + \sum_{i=2}^{k}(Z_i - cW_i)\right\} > u\right)\mathrm{d}\mathbb{P}(Z_1 - cW_1 \leqslant y) \\
= \;& \int\limits_{(u,\infty)} \mathrm{d}\mathbb{P}(Z_1 - cW_1 \leqslant y) \\
+ \;& \int\limits_{(-\infty,u]} \mathbb{P}\left(\max_{2\leqslant k\leqslant M+1}\left\{y + \sum_{i=1}^{k-1}(Z_i - cW_i)\right\} > u\right)\mathrm{d}\mathbb{P}(Z_1 - cW_1 \leqslant y) \\
= \;& \int\limits_{(u,\infty)} \mathrm{d}\mathbb{P}(Z_1 - cW_1 \leqslant y) \\
+ \;& \int\limits_{(-\infty,u]} \mathbb{P}\left(\max_{1\leqslant k\leqslant M}\left\{\sum_{i=1}^{k}(Z_i - cW_i)\right\} > u - y\right)\mathrm{d}\mathbb{P}(Z_1 - cW_1 \leqslant y) \\
= \;& \int\limits_{(u,\infty)} \mathrm{d}\mathbb{P}(Z_1 - cW_1 \leqslant y) + \int\limits_{(-\infty,u]} \psi_M(u-y)\mathrm{d}\mathbb{P}(Z_1 - cW_1 \leqslant y).
\end{aligned}$$

Pagal indukcijos prielaidą antrasis integralas neviršija

$$\int\limits_{(-\infty,u]} e^{-R(u-y)}\mathrm{d}\mathbb{P}(Z_1 - cW_1 \leqslant y).$$

Tuo tarpu pirmasis integralas akivaidžiai neviršija dydžio

$$\int\limits_{(u,\infty)} e^{-R(u-y)} \mathrm{d}\mathbb{P}(Z_1 - cW_1 \leqslant y).$$

Vadinasi,

$$\begin{aligned}
\psi_{M+1}(u) &\leqslant \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-R(u-y)} \mathrm{d}\mathbb{P}(Z_1 - cW_1 \leqslant y) \\
&= e^{-Ru}\mathbb{E}\left(e^{R(Z_1 - cW_1)}\right) \\
&= e^{-Ru}\mathbb{E}e^{RZ_1}\frac{\lambda}{\lambda + cR} = e^{-Ru}.
\end{aligned}$$

Pagal matematinės indukcijos principą gauname, kad (42) nelygybė teisinga visiems natūraliesiems n ir visoms pradinio kapitalo u reikšmėms. Tuo pačiu, kaip minėta, teisingas (41) įvertis. △

2.7.1 Pavyzdys. *Sakykime žala Z_1 klasikiniame dinaminiame rizikos modelyje pasiskirsčiusi pagal eksponentinį skirstinį su teigiamu parametru α, t.y.*

$$\mathbb{P}(Z_1 \leqslant y) = \left(1 - e^{-\alpha y}\right)\mathbb{I}_{\{y \geqslant 0\}},$$

o premijų surinkimo greitis

$$c = (1+\varrho)\frac{\mathbb{E}Z_1}{\mathbb{E}W_1} = (1+\varrho)\frac{\lambda}{\alpha}$$

su tam tikru teigiamu apsaugos koeficijentu ϱ. Rasime bankroto tikimybės įvertį aprašytame modelyje.

△ Iš 2.6.1 pavyzdžio turime, kad

$$R = \alpha - \frac{\lambda}{c}\ .$$

Kadangi nagrinėjamu atveju

$$c = (1+\varrho)\frac{\lambda}{\alpha}\ ,$$

tai

$$R = \alpha - \frac{\alpha}{1+\varrho} = \alpha\frac{\varrho}{1+\varrho}.$$

Vadinasi, pagal (41) nelygybę

$$\psi(u) \leqslant \exp\{-\alpha \frac{\varrho}{1+\varrho} u\}$$

bet kuriai pradinio kapitalo vertei u. $\triangle$

2.8 Defektyvi atstatymo lygtis bankroto tikimybei klasikiniame dinaminiame rizikos modelyje

Ankstesniame skyrelyje gavome bankroto tikimybės $\psi(u)$ įvertį iš viršaus. Tolimesniam funkcijos $\psi(u)$ elgesio tyrimui reikalinga vadinamoji atstatymo lygtis šiai funkcijai. Šiame skyrelyje išvesime būtent tokią lygtį.

2.8.1 Teorema. *Sakykime tenkinamos visos įprastinės klasikinio dinaminio rizikos modelio sąlygos, žala Z_1 turi baigtinį vidurkį $m = \mathbb{E}Z_1$ ir absoliučiai tolydžią pasiskirstymo funkciją $F(y) = \mathbb{P}(Z_1 \leqslant y)$. Sakykime, be to, patenkinta grynojo pelno sąlyga $m\lambda < c$.*

Tada bankroto tikimybė $\psi(u)$ bet kuriai neneigiamai pradinio kapitalo vertei u tenkina tokią atstatymo lygtį

$$\begin{aligned} \psi(u) &= \frac{\lambda m}{c}\left(1 - \frac{1}{m}\int_0^u (1-F(y))\mathrm{d}y\right) \\ &+ \frac{\lambda}{c}\int_0^u \psi(u-y)(1-F(y))\mathrm{d}y. \end{aligned} \tag{43}$$

$\triangle$ Bet kuriai pradinio kapitalo u vertei pažymime

$$\varphi(u) = 1 - \psi(u).$$

Funkcija $\varphi(u)$ dažniausiai vadinama išlikimo tikimybe.
Iš (37) formulės turime

$$\begin{aligned} \varphi(u) &= \mathbb{P}\left(\sup_{n\geqslant 1}\left\{\sum_{i=1}^n (Z_i - cW_i)\right\} \leqslant u\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^n (Z_i - cW_i) \leqslant u \text{ visiems } n \geqslant 1\right). \end{aligned}$$

Pasinaudodami klasikinio dinaminio rizikos modelio prielaidomis, gauname

$$\begin{aligned}
\varphi(u) &= \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n}(Z_i - cW_i) \leqslant u \text{ visiems } n \geqslant 2, Z_1 - cW_1 \leqslant u\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\sum_{i=2}^{n}(Z_i - cW_i) \leqslant u - Z_1 + cW_1 \text{ visiems } n \geqslant 2, Z_1 - cW_1 \leqslant u\right) \\
&= \int\limits_{[0,\infty)} \Bigg(\int\limits_{[0,u+cv)} \mathbb{P}\left(\sum_{i=2}^{n}(Z_i - cW_i) \leqslant u - y + cv \text{ visiems } n \geqslant 2\right) \\
&\qquad \mathrm{d}\mathbb{P}(Z_1 \leqslant y)\Bigg)\mathrm{d}\mathbb{P}(W_1 \leqslant v) \\
&= \int\limits_{[0,\infty)} \Bigg(\int\limits_{[0,u+cv)} \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n}(Z_i - cW_i) \leqslant u - y + cv \text{ visiems } n \geqslant 1\right) \\
&\qquad \mathrm{d}\mathbb{P}(Z_1 \leqslant y)\Bigg)\mathrm{d}\mathbb{P}(W_1 \leqslant v) \\
&= \lambda \int\limits_0^{\infty} e^{-\lambda v} \left(\int\limits_{[0,u+cv)} \varphi(u + cv - y)\mathrm{d}F(y)\right) \mathrm{d}v.
\end{aligned}$$

Atlikę kintamųjų pakeitimą $z = u + cv$, iš paskutinės lygybės gauname

$$\varphi(u) = \frac{\lambda}{c}\, e^{\frac{\lambda u}{c}} \int\limits_u^{\infty} e^{-\frac{\lambda z}{c}} \left(\int\limits_{[0,z)} \varphi(z - y)\mathrm{d}F(y)\right) \mathrm{d}z. \tag{44}$$

Kadangi pasiskirstymo funkcija $F(y)$ turi tankio funkciją, tai funkcija

$$\int\limits_{[0,z)} \varphi(z - y)\mathrm{d}F(y) = \int\limits_0^{z} \varphi(z - y)\mathrm{d}F(y)$$

yra tolydinė. Iš (44) lygybės išplaukia, kad išgyvenimo funkcija $\varphi(u)$ yra diferencijuojama ir

$$\begin{aligned}
\varphi'(u) &= \frac{\lambda}{c}\, e^{\frac{\lambda u}{c}}\, \frac{\lambda}{c} \int\limits_u^{\infty} e^{-\frac{\lambda z}{c}} \left(\int\limits_0^{\infty} \varphi(z - y)\mathrm{d}F(y)\right) \mathrm{d}z \\
&- \frac{\lambda}{c}\, e^{\frac{\lambda u}{c}}\, e^{-\frac{\lambda u}{c}} \int\limits_0^{u} \varphi(u - y)\mathrm{d}F(y) \\
&= \frac{\lambda}{c}\, \varphi(u) - \frac{\lambda}{c} \int\limits_0^{u} \varphi(u - y)\mathrm{d}F(y).
\end{aligned}$$

Paskutinę lygybę suintegravę intervale $[0, w]$, gauname

$$\varphi(w)-\varphi(0)=\frac{\lambda}{c}\int\limits_0^w \varphi(u)\mathrm{d}u-\frac{\lambda}{c}\int\limits_0^w\left(\int\limits_0^u \varphi(u-y)\mathrm{d}F(y)\right)\mathrm{d}u.$$

Pritaikę integravimo dalimis formulę, pasinaudoję funkcijos $\varphi(u)$ diferencijuojamumu ir lygybe $F(0)=\mathbb{P}(Z_1\leqslant 0)$, turime

$$\begin{aligned}
&\varphi(w)-\varphi(0)-\frac{\lambda}{c}\int\limits_0^w \varphi(u)\mathrm{d}u\\
= \;& -\frac{\lambda}{c}\int\limits_0^w\left(\varphi(u-y)F(y)\Big|_0^u+\int\limits_0^u \varphi'(u-y)F(y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}u\\
= \;& -\frac{\lambda}{c}\int\limits_0^w\left(\varphi(0)F(u)+\int\limits_0^u \varphi'(u-y)F(y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}u.
\end{aligned}$$

Taigi

$$\begin{aligned}
\varphi(w)-\varphi(0) &= \frac{\lambda}{c}\int\limits_0^w \varphi(u)\mathrm{d}u-\frac{\lambda}{c}\,\varphi(0)\int\limits_0^w F(u)\mathrm{d}u\\
&- \frac{\lambda}{c}\int\limits_0^w\left(\int\limits_0^u \varphi'(u-y)F(y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}u\\
&= \frac{\lambda}{c}\int\limits_0^w \varphi(u)\mathrm{d}u-\frac{\lambda}{c}\,\varphi(0)\int\limits_0^w F(u)\mathrm{d}u\\
&- \frac{\lambda}{c}\int\limits_0^w\left(\int\limits_y^w \varphi'(u-y)\mathrm{d}u\right)F(y)\mathrm{d}y\\
&= \frac{\lambda}{c}\int\limits_0^w \varphi(u)\mathrm{d}u-\frac{\lambda}{c}\,\varphi(0)\int\limits_0^w F(u)\mathrm{d}u\\
&- \frac{\lambda}{c}\int\limits_0^w(\varphi(w-y)-\varphi(0))F(y)\mathrm{d}y\\
&= \frac{\lambda}{c}\int\limits_0^w \varphi(u)\mathrm{d}u-\frac{\lambda}{c}\int\limits_0^w \varphi(w-y)F(y)\mathrm{d}y\\
&= \frac{\lambda}{c}\int\limits_0^w \varphi(w-y)\mathrm{d}y-\frac{\lambda}{c}\int\limits_0^w \varphi(w-y)F(y)\mathrm{d}y
\end{aligned}$$

$$= \quad \frac{\lambda}{c}\int\limits_0^w \varphi(w-y)(1-F(y))\mathrm{d}y.$$

Iš paskutinės lygybės išplaukia, kad bet kuriai neneigiamai pradinio kapitalo vertei u

$$\varphi(u) = \varphi(0) + \frac{\lambda}{c}\int\limits_0^u \varphi(u-y)(1-F(y))\mathrm{d}y. \tag{45}$$

Remiantis didžiųjų skaičių dėsniu, beveik visur

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(Z_i - cW_i) = \mathbb{E}(Z_1 - cW_1) = \frac{m\lambda - c}{\lambda} < 0.$$

Vadinasi, beveik visur

$$\sup_{n\geqslant 1}\sum_{i=1}^{n}(Z_i - cW_i) < \infty$$

ir

$$\lim_{u\to\infty}\varphi(u) = \mathbb{P}\left(\sup_{n\geqslant 1}\left\{\sum_{i=1}^{n}(Z_i - cW_i)\right\} < \infty\right) = 1.$$

Lygybėje (45) perėję prie ribos, kai $u \to \infty$, gauname

$$1 = \varphi(0) + \frac{\lambda}{c}\lim_{u\to\infty}\int\limits_0^u \varphi(u-y)(1-F(y))\mathrm{d}y. \tag{46}$$

Kadangi

$$\int\limits_0^\infty (1-F(y))\mathrm{d}y = m < \infty,$$

tai (46) lygybėje galima pereiti prie ribos po integralo ženklu. Būtent

$$\begin{aligned} &\lim_{u\to\infty}\int\limits_0^u \varphi(u-y)(1-F(y))\mathrm{d}y \\ = \quad &\lim_{u\to\infty}\int\limits_0^\infty \mathbb{I}_{\{y\leqslant u\}}\varphi(u-y)(1-F(y))\mathrm{d}y \\ = \quad &\int\limits_0^\infty (1-F(y))\mathrm{d}y = m \end{aligned}$$

Taigi iš (46) lygybės išplaukia

$$\varphi(0) = 1 - \frac{\lambda m}{c}.$$

Šią išraišką įstatę į (45) lygybę, gauname

$$\varphi(u) = 1 - \frac{\lambda m}{c} + \frac{\lambda}{c}\int_0^u \varphi(u-y)(1-F(y))\mathrm{d}y.$$

Tačiau bet kuriam neneigiamam u

$$\varphi(u) = 1 - \psi(u).$$

Todėl

$$1 - \psi(u) = 1 - \frac{\lambda m}{c} + \frac{\lambda}{c}\int_0^u (1-\psi(u-y))(1-F(y))\mathrm{d}y.$$

Arba

$$\begin{aligned}\psi(u) &= \frac{\lambda m}{c}\left(1 - \frac{1}{m}\int_0^u (1-F(y))\mathrm{d}y\right)\\ &+ \frac{\lambda}{c}\int_0^u \psi(u-y)(1-F(y))\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

$\triangle$

Atstatymo lygtis bankroto tikimybei gali būti užrašyta ir kitokiais pavidalais. Aptarsime kelis tokius lygčių pavidalus.

Jei neneigiamos atsitiktinės žalos Z_1 skirstinys turi baigtinį vidurkį $m = \mathbb{E}Z_1$ ir pasiskirstymo funkciją $F(y) = \mathbb{P}(Z_1 \leqslant y)$, tai funkcija

$$F_I(y) = \frac{1}{m}\int_0^y (1-F(z))\mathrm{d}z$$

yra pasiskirstymo funkcija. Be to ši pasiskirstymo funkcija absoliučiai tolydi ir

$$\mathrm{d}F_I(y) = \frac{1}{m}(1-F(y))\mathrm{d}y.$$

Įstatę turimas išraiškas į (43) lygybę, gauname tokią atstatymo lygtį bankroto tikimybei:

$$\psi(u) = \frac{\lambda m}{c}\left(1 - F_I(u) + \int_0^u \psi(u-y)\mathrm{d}F_I(y)\right) \tag{47}$$

Esant patenkintai grynojo pelno sąlygai,

$$c = (1+\varrho)\frac{\mathbb{E}Z_1}{\mathbb{E}W_1} = (1+\varrho)\lambda m$$

kažkokiam teigiamam apsaugos koeficijentui ϱ. Vadinasi, (43) lygtį galima užrašyti ir taip:

$$\psi(u) = \frac{1}{1+\varrho}\left(1 - F_I(u) + \int\limits_0^u \psi(u-y)\mathrm{d}F_I(y)\right) \tag{48}$$

Dažnokai atstatymo lygtis bankroto tikimybei vadinama defektyvia atstatymo lygtimi. Paaiškinsime tokio pavadinimo priežastį. Paskutinis atstatymo lygties pavidalas (48) gali būti perrašytas taip:

$$\psi(u) = \frac{1}{1+\varrho}\left(1 - F_I(u)\right) + \int\limits_0^u \psi(u-y)\ \mathrm{d}\left(\frac{1}{1+\varrho}F_I(y)\right).$$

Nesunku pastebėti, kad lygtyje integruojame pagal nemažėjančią tolydžią funkciją $F_I(y)/(1+\varrho)$, kuri nėra pasiskirstymo funkcija, nes

$$\lim_{y\to\infty}\frac{1}{1+\varrho}F_I(y) = \frac{1}{1+\varrho} < 1.$$

Norint pabrėžti šį faktą atstatymo lygtis bankroto tikimybei vadinama defektyvia.

2.9 Laplace-Stieltjes transformacija ir jos savybės

Ankstesniame skyrelyje gavome defektyvią atstatymo lygtį bankroto tikimybei klasikiniame dinaminiame rizikos modelyje. Norint surasti mus dominančią bankroto tikimybę reikia tą atstatymo lygtį išspręsti. Vienintelis žinomas metodas tokioms lygtims spręsti remiasi Laplace-Stieltjes transformacijų panaudojimu. Šiame skyrelyje apibrėšime Laplace-Stieltjes transformacijas ir aptarsime tokių transformacijų savybes.

2.9.1 Apibrėžimas. *Sakysime funkcija G priklauso klasei $\mathcal{G}$, jeigu G atvaizduoja realių skaičių aibę $\mathbb{R}$ į intervalą $[0,\infty)$, G yra nemažėjanti, aprėžta, tolydi iš dešinės ir $G(x)=0$ visiems neigiamiems x.*

Nesunku pastebėti, kad funkcija G priklauso klasei $\mathcal{G}$ tada ir tik tada, kai egzistuoja neneigiama konstanta C ir neneigiamo atsitiktinio dydžio pasiskirstymo funkcija F_ξ, kuriems $G(x) = CF_\xi(x)$.

2.9.2 Apibrėžimas. *Funkcijos $G \in \mathcal{G}$ Laplace-Stieltjes transformacija vadinama funkcija*

$$\widehat{G}(s) = \int\limits_{[0,\infty)} e^{-sy} dG(y), \ \ s \in \mathbb{C}.$$

Aišku, kad bet kuriai funkcijai $G \in \mathcal{G}$ Laplace-Stieltjes transformacija yra apibrėžta visiems kompleksiniams s, kuriems $\Re s \geqslant 0$.

Bet kuriai funkcijai $G \in \mathcal{G}$ galima surasti

$$\sigma_G = \inf \left\{ \sigma : \int\limits_{[0,\infty)} e^{-\sigma y} \mathrm{d}G(y) < \infty \right\}.$$

Aišku, kad $\sigma_G \geqslant 0$, o funkcijos G Laplace-Stieltjes transformacija $\widehat{G}(s)$ yra analizinė funkcija intervale (σ_G, ∞). Skaičius σ_G paprastai vadinamas funkcijos G Laplace-Stieltjes transformacijos abscise.

Jeigu F_ξ yra neneigiamo atsitiktinio dydžio ξ pasiskirstymo funkcija, tai

$$\widehat{F}_\xi(s) = \int\limits_{[0,\infty)} e^{-sy} \mathrm{d}F_\xi(y) = \mathbb{E}\left(e^{-s\xi}\right).$$

Bet kuriai nenulinei funkcijai $G \in \mathcal{G}$ galima surasti konstantą C ir neneigiamą atsitiktinį dydį ξ, kuriems $G(u) = CF_\xi(u)$. Vadinasi, bet kuriai funkcijai $G \in \mathcal{G}$

$$\widehat{G}(s) = \int\limits_{[0,\infty)} e^{-sy} \mathrm{d}CF_\xi(y) = C\mathbb{E}\left(e^{-s\xi}\right).$$

2.9.1 Pavyzdys. *Rasime funkcijos $G(y) = \mathbb{I}_{[0,\infty)}(y)$ Laplace-Stieltjes transformaciją.*

$\triangle$ Pagal apibrėžimą visiems kompleksiniams s

$$\widehat{G}(s) = \int\limits_{[0,\infty)} e^{-sy} \mathrm{d}\mathbb{I}_{[0,\infty)}(y) = e^{-s\cdot 0}(1-0) = 1.$$

$\triangle$

2.9.2 Pavyzdys. *Sakykime F yra eksponentinio skirstinio su parametru λ pasiskirstymo funkcija, t.y. $F(y) = \left(1 - e^{-\lambda y}\right) \mathbb{I}_{\{y \geqslant 0\}}$ Rasime šios funkcijos Laplace-Stieltjes transformaciją.*

△ Pagal apibrėžimą

$$\begin{aligned}
\widehat{G}(s) &= \int\limits_{[0,\infty)} e^{-sy} \mathrm{d}\left(1 - e^{-\lambda y}\right) = \lambda \int\limits_{[0,\infty)} e^{-(s+\lambda)y} \mathrm{d}y \\
&= \lambda \frac{e^{-(s+\lambda)y}}{s+\lambda} \Big|_0^\infty = \frac{\lambda}{s+\lambda}
\end{aligned}$$

kompleksiniams skaičiams s su savybe $\Re s > -\lambda$. △

2.9.3 Pavyzdys. *Sakykime F yra Puasono dėsnio su teigiamu parametru λ pasiskirstymo funkcija, t.y.*

$$F(y) = \sum_{\substack{k \in \mathbb{N} \\ k \leqslant y}} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

Rasime šios funkcijos Laplace-Stieltjes transformaciją.

△ Bet kokiam kompleksiniam skaičiui s

$$\begin{aligned}
\widehat{G}(s) &= \int\limits_{[0,\infty)} e^{-sy} \mathrm{d}\left(\sum_{\substack{k \in \mathbb{N} \\ k \leqslant y}} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-ks} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \\
&= e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\lambda e^{-s}\right)^k}{k!} = e^{\lambda\left(e^{-s}-1\right)}
\end{aligned}$$

△

Toliau šiame skyrelyje pateiksime pagrindines Laplace-Stieltjes transformacijos savybes.

2.9.1 Lema. *Sakykime funkcija $G \in \mathcal{G}$ turi Laplace-Stieltjes transformaciją $\widehat{G}$ kompleksinių skaičių aibės srityje $\{\Re s > \sigma_G\} \cup \{\Re s \geqslant 0\}$. Tada bet kuriai teigiamai konstantai a lygybė*

$$\widehat{aG}(s) = a\widehat{G}(s)$$

teisinga visiems kompleksiniams s iš minėtos srities.

△ Lemos tvirtinimas išplaukia iš lygybės

$$\widehat{aG}(s) \;=\; \int\limits_{[0,\infty)} e^{-sy}\mathrm{d}(aG(y)) = a \int\limits_{[0,\infty)} e^{-sy}\mathrm{d}G(y) = a\widehat{G}(s).$$

△

2.9.2 Lema. *Sakykime funkcija $G_1 \in \mathcal{G}$ turi Laplace-Stieltjes transformaciją $\widehat{G}_1$ kompleksinių skaičių aibės srityje $\{\Re s > \sigma_{G_1}\} \cup \{\Re s \geqslant 0\}$, o funkcija $G_2 \in \mathcal{G}$ turi Laplace-Stieltjes transformaciją $\widehat{G}_2$ kompleksinių skaičių aibės srityje $\{\Re s > \sigma_{G_2}\} \cup \{\Re s \geqslant 0\}$. Tada funkcija $G_1 + G_2$ turi Laplace-Stieltjes transformaciją srityje $\Re s > \max\{\sigma_{G_1}, \sigma_{G_2}\} \cup \{\Re s \geqslant 0\}$, be to šioje srityje*

$$\widehat{G_1 + G_2}(s) = \widehat{G}_1(s) + \widehat{G}_2(s).$$

.

△ Kadangi funkcija $G_1 + G_2 \in \mathcal{G}$, tai lemos tvirtinimas išplaukia iš Lebesques-Stieltjes integralo savybių. Iš tiesų, bet kuriam fiksuotam kompleksiniam s iš srities $\Re s > \max\{\sigma_{G_1}, \sigma_{G_2}\} \cup \{\Re s \geqslant 0\}$, turime

$$\begin{aligned}
&\widehat{G_1 + G_2}(s) = \int\limits_{[0,\infty)} e^{-sy}\mathrm{d}((G_1 + G_2)(y)) \\
=\;& \int\limits_{[0,\infty)} \Re\left\{e^{-sy}\right\} \mathrm{d}((G_1 + G_2)(y)) + \mathbf{i} \int\limits_{[0,\infty)} \Im\left\{e^{-sy}\right\} \mathrm{d}((G_1 + G_2)(y)) \\
=\;& \int\limits_{[0,\infty)} \Re\left\{e^{-sy}\right\} \mathrm{d}G_1(y) + \int\limits_{[0,\infty)} \Re\left\{e^{-sy}\right\} \mathrm{d}G_2(y) \\
+\;& \mathbf{i} \int\limits_{[0,\infty)} \Im\left\{e^{-sy}\right\} \mathrm{d}G_1(y) + \mathbf{i} \int\limits_{[0,\infty)} \Im\left\{e^{-sy}\right\} \mathrm{d}G_2(y) \\
=\;& \int\limits_{[0,\infty)} \left(\Re\left\{e^{-sy}\right\} + \mathbf{i}\,\Im\left\{e^{-sy}\right\}\right) \mathrm{d}G_1(y) \\
+\;& \int\limits_{[0,\infty)} \left(\Re\left\{e^{-sy}\right\} + \mathbf{i}\,\Im\left\{e^{-sy}\right\}\right) \mathrm{d}G_2(y) \\
=\;& \widehat{G}_1(s) + \widehat{G}_2(s).
\end{aligned}$$

△

2.9.3 Lema. *Sakykime funkcija $G_1 \in \mathcal{G}$ turi Laplace-Stieltjes transformaciją $\widehat{G}_1$ kompleksinių skaičių aibės srityje $\{\Re s > \sigma_{G_1}\} \cup \{\Re s \geqslant 0\}$, o funkcija*

$G_2 \in \mathcal{G}$ turi Laplace-Stieltjes transformaciją $\widehat{G}_2$ kompleksinių skaičių aibės srityje $\{\Re s > \sigma_{G_2}\} \cup \{\Re s \geqslant 0\}$. Tada funkcijų G_1 ir G_2 sąsūka

$$G_1 * G_2(x) = \int_0^x G_1(x - y\ )\mathrm{d}G_2(y)$$

turi Laplace-Stieltjes transformaciją srityje $\{\Re s > \max\{\sigma_{G_1}, \sigma_{G_2}\}\} \cup \{\Re s \geqslant 0\}$, be to šioje srityje

$$\widehat{G_1 * G}_2(s) = \widehat{G}_1(s) \cdot \widehat{G}_2(s).$$

.

$\triangle$ Jeigu bent viena iš funkcijų G_1, G_2 yra nulinė, tai lemos tvirtinimas akivaizdus. Jeigu abi funkcijos G_1, G_2 yra nenulinės, tai egzistuoja konstantos C_1, C_2 ir neneigiami atsitiktiniai dydžiai ξ_1, ξ_2, kuriems

$$G_1(y) = C_1 F_{\xi_1}(y),\ G_2(y) = C_2 F_{\xi_2}(y).$$

Nesunku pastebėti, kad

$$G_1 * G_2 = C_1 C_2\ F_{\xi_1} * F_{\xi_2}.$$

Todėl pagal 2.9.1 lemą

$$\widehat{G_1 * G}_2(s) = C_1 C_2\ \widehat{F_{\xi_1} * F}_{\xi_2}(s).$$

Pasiskirstymo funkcijų sąsūka yra lygi atsitiktinio dydžio $\xi_1 + \xi_2$ pasiskirstymo funkcijai, kai ξ_1 ir ξ_2 yra nepriklausomi. Pasinaudoję nepriklausomų atsitiktinių dydžių sandaugos vidurkio savybe, gauname

$$\begin{aligned} \widehat{F_{\xi_1} * F}_{\xi_2}(s) &= \mathbb{E}\left(e^{-s(\xi_1+\xi_2)}\right) = \mathbb{E}\left(e^{-s\xi_1} e^{-s\xi_2}\right) \\ &= \mathbb{E}\left(e^{-s\xi_1}\right) \mathbb{E}\left(e^{-s\xi_2}\right) = \widehat{F_{\xi_1}}(s)\widehat{F_{\xi_2}}(s) \end{aligned}$$

visiems kompleksiniams s iš srities $\{\Re s > \max\{\sigma_{G_1}, \sigma_{G_2}\}\} \cup \{\Re s \geqslant 0\}$.

Dar kartą pasinaudoję 2.9.1 lema, gauname

$$\begin{aligned} \widehat{G_1 * G}_2(s) &= C_1 C_2 \widehat{F_{\xi_1} * F}_{\xi_2}(s) = C_1 \widehat{F_{\xi_1}}(s) C_2 \widehat{F_{\xi_2}}(s) \\ &= \widehat{G}_1(s) \cdot \widehat{G}_2(s). \end{aligned}$$

$\triangle$

2.9.4 Lema. *Sakykime funkcija $G \in \mathcal{G}$ turi Laplace-Stieltjes transformaciją $\widehat{G}$ kompleksinių skaičių aibės srityje $\{\Re s \geqslant 0\}$. Kompleksinių skaičių aibės srityje $\Re s > 0$ Laplace-Stieltjes transformacija yra analizinė funkcija, be to, bet kuriam natūraliąjam n*

$$\{\widehat{G}(s)\}^{(n)} = (-1)^n \int\limits_{[0,\infty)} y^n e^{-sy} \mathrm{d}(G(y)).$$

Jeigu $\widehat{G}$ egzistuoja kompleksinių skaičių srityje $\{\Re s > \sigma_G\}$ kažkokiai neigiamai konvergavimo abscisei σ_G, tai užrašytoji lygybė teisinga visiems s iš Laplace-Stieltjes transformacijos egzistavimo srities

$\triangle$ Įrodysime pirmąją lemos dalį, kai $\sigma_G = 0$. Atvejis $\sigma_G < 0$ nagrinėjamas analogiškai.

Pradžioje įrodysime, kad funkcijos $G \in \mathcal{G}$ Laplace-Stielties transformacija yra analizinė funkcija. Tuo pačiu įrodysime lemos lygybę kai $n = 1$.

Bet kuriems kompleksiniams s ($\Re s > 0$) ir h ($h \neq 0$)

$$\begin{aligned} \frac{\widehat{G}(s+h) - \widehat{G}(s)}{h} &= \int\limits_{[0,\infty)} \frac{e^{-(s+h)y} - e^{-sy}}{h} \mathrm{d}(G(y)) \\ &= \int\limits_{[0,\infty)} e^{-sy} \frac{e^{-hy} - 1}{h} \mathrm{d}(G(y)). \end{aligned} \tag{49}$$

Bet kokiam kompleksiniam h ir realiam $y \geqslant 0$

$$\left| e^{-hy} - 1 \right| \leqslant |h| y e^{|h|y}. \tag{50}$$

Kai $|h| < \Re s$, integralas

$$\int\limits_{[0,\infty)} \left| e^{-sy} \right| y e^{|h|y} \mathrm{d}(G(y))$$

yra baigtinis. Pagal Lebesque teoremą apie perėjimą prie ribos po integralo ženklu iš (49) lygybės gauname kad bet kuriam kompleksiniam s su teigiama realiąja dalimi egzistuoja

$$\begin{aligned} \{\widehat{G}(s)\}' &= \int\limits_{[0,\infty)} e^{-sy} \lim_{h \to 0} \frac{e^{-hy} - 1}{h} \mathrm{d}(G(y)) \\ &= -\int\limits_{[0,\infty)} e^{-sy} y \, \mathrm{d}(G(y)). \end{aligned}$$

Taigi Funkcija $\widehat{G}(s)$ analizinė ir teisinga lemos lygybė kai $n = 1$. Įrodysime lemos lygybę kitiems natūraliesiems n. Sakykime, lemos lygybė teisinga kažkokiam natūraliąjam $n = N$. Tada kompleksiniams s, h ($\Re s > 0, h \neq 0$) turime

$$\frac{\{\widehat{G}(s+h)\}^{(N)} - \{\widehat{G}(s)\}^{(N)}}{h} = (-1)^N \int\limits_{[0,\infty)} y^N e^{-sy} \frac{e^{-hy}-1}{h} \mathrm{d}(G(y)).$$

Iš (50) įvertinimo išplaukia, kad paskutinėje lygybėje galima pereiti prie ribos kai $h \to 0$ po integralo ženklu. Vadinasi,

$$\{\widehat{G}(s)\}^{(N+1)} = (-1)^{N+1} \int\limits_{[0,\infty)} y^{N+1} e^{-sy} \mathrm{d}(G(y)).$$

Pagal matematinės indukcijos principą gauname, kad lemos lygybė teisinga visiems natūraliesiems n. Lema įrodyta. △

2.9.5 Lema. *Sakykime funkcija $G \in \mathcal{G}$ turi Laplace-Stieltjes transformaciją $\widehat{G}$ kompleksinių skaičių aibės srityje $\{\Re s > \sigma_G\} \cup \{\Re s \geqslant 0\}$. Bet kuriam kompleksiniam skaičiui s su sąlyga $\Re s > 0$ teisinga lygybė*

$$\frac{\widehat{G}(s)}{s} = \int\limits_{[0,\infty)} e^{-sy} G(y) dy.$$

.

△ Pagal 2.9.2 apibrėžimą bet kuriam kompleksiniam s su teigiama realiąja dalimi

$$\widehat{G}(s) = \int\limits_{[0,\infty)} e^{-sy} \mathrm{d}G(y).$$

Kadangi funkcija G aprėžta ir $G(-0) = 0$, tai užrašytąjai lygybei pritaikę integravimo dalimis formulę, gauname

$$\begin{aligned}\widehat{G}(s) &= e^{-sy}G(y)\Big|_{-0}^{\infty} + \int\limits_{[0,\infty)} se^{-sy}G(y)\mathrm{d}y \\ &= s \int\limits_{[0,\infty)} e^{-sy} G(y) \mathrm{d}y.\end{aligned}$$

△

2.9.6 Lema. *Sakykime funkcija $G \in \mathcal{G}$ turi Laplace-Stieltjes transformaciją $\widehat{G}$ kompleksinių skaičių aibės srityje $\{\Re s > \sigma_G\} \cup \{\Re s \geqslant 0\}$. Bet kuriam teigiamam realiam skaičiui a funkcijai $F(x) = G(x/a)$ lygybė*

$$\widehat{G}(as) = \widehat{F}(s).$$

teisinga visiems kompleksiniams s su sąlyga $\{\Re s > \frac{\sigma_G}{a}\} \cup \{\Re s \geqslant 0\}$.

$\triangle$ Bet kuriam kompleksiniams $s \in \{\Re s > \sigma_G\} \cup \{\Re s \geqslant 0\}$

$$\widehat{G}(s) = \int\limits_{[0,\infty)} e^{-sy} \mathrm{d}G(y)$$

Vadinasi, kompleksiniams $s \in \{\Re s > \frac{\sigma_G}{a}\} \cup \{\Re s \geqslant 0\}$

$$\begin{aligned} \widehat{F}(s) &= \int\limits_{[0,\infty)} e^{-sy} \mathrm{d}F(y) = \int\limits_{[0,\infty)} e^{-sy} \mathrm{d}G(\frac{y}{a}) \\ &= \int\limits_{[0,\infty)} e^{-sax} \mathrm{d}G(x) = \widehat{G}(as). \end{aligned}$$

$\triangle$

2.9.7 Lema. *Sakykime funkcija $G \in \mathcal{G}$ turi Laplace-Stieltjes transformaciją $\widehat{G}$ kompleksinių skaičių aibės srityje $\{\Re s > \sigma_G\} \cup \{\Re s \geqslant 0\}$. Bet kuriems realiems a, b ir bet kuriam $\sigma \geqslant 0$ teisinga lygybė*

$$\frac{G(b) + G(b-)}{2} - \frac{G(a) + G(a-)}{2} = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2\pi \boldsymbol{i}} \int\limits_{\sigma - \boldsymbol{i}T}^{\sigma + \boldsymbol{i}T} \frac{e^{bs} - e^{as}}{s} \widehat{G}(s) ds.$$

Jeigu Laplace-Stieltjes transformacijos konvergvimo abscisė σ_G yra neigiama, tai užrašytoji lygybė teisinga bet kuriam $\sigma > \sigma_G$.

$\triangle$ Nagrinėsime atvejį, kai Laplace-Stieltjes transformacijos abscisė σ_G yra neigiama. Šiuo atveju Laplace-Stieltjes transformacija $\widehat{G}$ egzistuoja bet kuriam kompleksiniam skaičiui su savybe $\Re s > \sigma_G$. Atvejis $\sigma_G = 0$ nagrinėjamas analogiškai.

Bet kuri nenulinė funkcija $G \in \mathcal{G}$ gaunama iš pasiskirstymo funkcijos padauginant ją iš kokios nors konstantos. Vadinasi, pakanka lemos lygybę įrodyti bet kokiai pasiskirstymo funkcijai G.

Šiuo atveju

$$\widehat{G}(-\mathbf{i}v) = \int\limits_{[0,\infty)} e^{\mathbf{i}vy} \mathrm{d}G(y)$$

yra pasiskirstymo funkcijos G charakteristinė funkcija.

Tikimybių teorijoje gerai žinoma apvertimo formulė charakteristinėms funkcijoms (žiūrėkite, pavyzdžiui, [1] 246-252 psl.). Pagal šią formulę bet kuriems realiems a, b turime

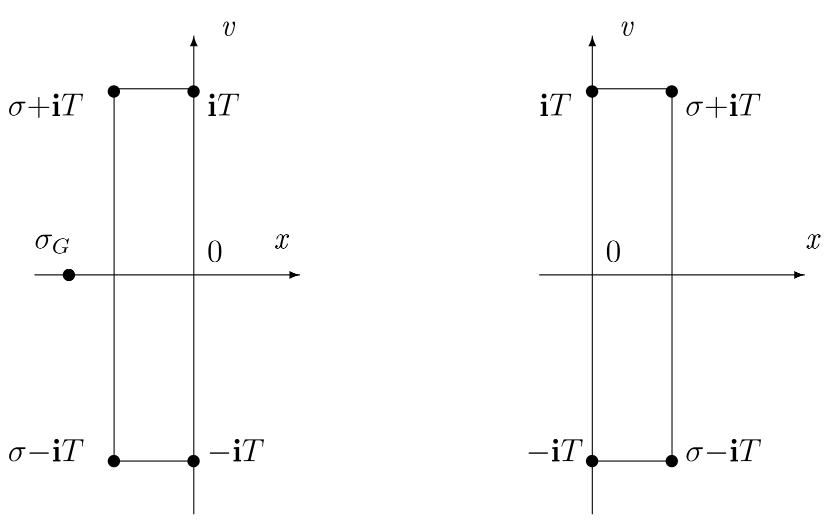
$$\begin{aligned}
&\frac{G(b)+G(b-)}{2}-\frac{G(a)+G(a-)}{2} \\
=\ & \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-T}^{T}\frac{e^{-\mathbf{i}av}-e^{-\mathbf{i}bv}}{\mathbf{i}v}\,\widehat{G}(-\mathbf{i}v)\mathrm{d}v \\
=\ & \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2\pi\mathbf{i}}\int\limits_{-\mathbf{i}T}^{\mathbf{i}T}\frac{e^{bs}-e^{as}}{s}\,\widehat{G}(s)\mathrm{d}s. \qquad (51)
\end{aligned}$$

Taigi lemos lygybė teisinga kai $\sigma = 0$. Toliau laikysime, kad $\sigma \neq 0$.

Paskutinio integralo pointegrinė funkcija yra analizinė kompleksinių skaičių aibės srityje $\{s \in \mathbb{C} : \Re s > \sigma_G\}$. Kompleksinio kintamojo funkcijų teorijoje gerai žinomas faktas, kad analizinės funkcijos integralas uždaru kontūru lygus nuliui (žiūrėkite, pavyzdžiui, [2]). Vadinasi,

$$\int\limits_{\Gamma}\frac{e^{bs}-e^{as}}{s}\,\widehat{G}(s)\mathrm{d}s = 0, \qquad (52)$$

kur Γ yra vienas iš kontūrų pavaizduotų brėžinyje



Abiejų tipų kontūrai nagrinėjami analogiškai. Todėl plačiau nagrinėsime

[1] J. Kubilius. *Tikimybių teorija ir matematinė statistika.* Vilnius, 1980.
[2] A. Nagelė, L. Papreckienė. *Kompleksinio kintamojo funkcijų teorija.* Vilnius, 1996.

tik pirmo tipo kontūrą. Šiuo atveju iš (52) lygybės gauname

$$\frac{1}{2\pi\mathbf{i}}\int\limits_{\sigma-\mathbf{i}T}^{\sigma+\mathbf{i}T}\frac{e^{bs}-e^{as}}{s}\,\widehat{G}(s)\mathrm{d}s=\frac{1}{2\pi\mathbf{i}}\int\limits_{-\mathbf{i}T}^{\mathbf{i}T}\frac{e^{bs}-e^{as}}{s}\,\widehat{G}(s)\mathrm{d}s$$
$$+\ \frac{1}{2\pi\mathbf{i}}\int\limits_{\sigma-\mathbf{i}T}^{-\mathbf{i}T}\frac{e^{bs}-e^{as}}{s}\,\widehat{G}(s)\mathrm{d}s+\frac{1}{2\pi\mathbf{i}}\int\limits_{\mathbf{i}T}^{\sigma+\mathbf{i}T}\frac{e^{bs}-e^{as}}{s}\,\widehat{G}(s)\mathrm{d}s \tag{53}$$

su $\sigma<0$.

Paskutinės išraiškos priešpaskutinis integralas gali būti įvertintas taip:

$$\left|\frac{1}{2\pi\mathbf{i}}\int\limits_{\sigma}^{0}\frac{e^{b(x-\mathbf{i}T)}-e^{a(x-\mathbf{i}T}}{x-\mathbf{i}T}\,\widehat{G}(x-\mathbf{i}T)\mathrm{d}x\right|$$

$$\begin{aligned}&\leqslant\ \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\sigma}^{0}\frac{e^{bx}-e^{ax}}{|x-\mathbf{i}T|}\,|\widehat{G}(x-\mathbf{i}T)|\mathrm{d}x\\&\leqslant\ \frac{1}{\pi}\widehat{G}(\sigma)\int\limits_{\sigma}^{0}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+T^2}}\leqslant\frac{|\sigma|}{\pi T}\widehat{G}(\sigma).\end{aligned}$$

Kadangi $\widehat{G}(\sigma)<\infty$, tai iš gauto įverčio išplaukia, kad priešpaskutinis (53) išraiškos integralas artėja į nulį, neaprėžtai augant T. Paskutinis (53) išraiškos integralas vertinamas analogiškai. Taigi jis irgi artėja į nulį neaprėžtai augant T. Vadinasi, iš (51) ir (53) formulių išplaukia lemos tvirtinimas. △

2.9.8 Lema. *Sakykime funkcijos G_1 ir G_2 priklauso klasei $\mathcal{G}$. Jeigu $\widehat{G}_1(s)=\widehat{G}_2(s)$ visiems $s\in\{s\in\mathbb{C}:\Re s\geqslant 0\}$, tai $G_1=G_2$.*

△ Lemos teiginys yra 2.9.7 lemos išvada. △

2.9.9 Lema. *Jeigu funkcijų seka $G_n\in\mathcal{G}$ konverguoja nenulinę funkciją G kiekviename jos tolydumo taške, ir $G_n(\infty)\to G(\infty)$, tai $\widehat{G}_n(s)\to\widehat{G}(s)$ visiems kompleksiniams $s\in\{s\in\mathbb{C}:\Re s\geqslant 0\}$.*

△ Funkcijos $\Re e^{-sy}$,$\Im e^{-sy}$ yra tolydžios ir aprėžtos ($y\geqslant 0$ atžvilgiu) nagrinėjamiems kompleksiniams s. Iš vienos Helly teoremos (žiūrėkite, pavyzdžiui, [1], 233–234 psl.) išplaukia, kad

$$\int\limits_{[0,\infty)} \Re\left\{e^{-sy}\right\} \mathrm{d}G_n(y) \to \int\limits_{[0,\infty)} \Re\left\{e^{-sy}\right\} \mathrm{d}G(y),$$
$$\int\limits_{[0,\infty)} \Im\left\{e^{-sy}\right\} \mathrm{d}G_n(y) \to \int\limits_{[0,\infty)} \Im\left\{e^{-sy}\right\} \mathrm{d}G(y).$$

Vadinasi, $\widehat{G}_n(s) \to \widehat{G}(s)$ visiems nagrinėjamiems s. $\triangle$

2.9.10 Lema. *Sakykime visiems kompleksiniams s iš aibės $\{s \in \mathbb{C} : \Re s \geqslant 0\}$ funkcijų $G_n \in \mathcal{G}$ Laplace-Stieltjes transformacijos $\widehat{G}_n(s)$ konverguoja į kokią nors funkciją $\widehat{G}(s)$ tolydžią taške $s = 0$ su savybe $\widehat{G}(0) \neq 0$. Tada aibėje $\mathcal{G}$ egzistuoja funkcija G, kuriai $G_n(x) \to G(x)$ visuose ribinės funkcijos tolydumo taškuose. Be to, $\widehat{G}$ yra funkcijos G Laplace-Stieltjes transformacija.*

$\triangle$ Iš lemos sąlygos turime, kad

$$\widehat{G}_n(0) \to \widehat{G}(0).$$

Kadangi $\widehat{G}_n(0) = G_n(\infty)$ ir $\widehat{G}(0) = C > 0$, tai pakankamai dideliems n funkcijos G_n yra nenulinės. Vadinasi, $G_n(x) = C_n F_{\xi_n}(x)$ kažkokiems neneigiamiems atsitiktiniams dydžiams ξ_n ir nenulinėms konstantoms $C_n = \widehat{G}_n(0) = G_n(\infty)$.

Atsitiktinių dydžių ξ_n charakteristinės funkcijos

$$\varphi_{\xi_n}(v) = \int\limits_{[0,\infty)} e^{-\mathbf{i}vy} \mathrm{d}F_{\xi_n}(y) = \frac{\widehat{G}_n(-\mathbf{i}v)}{C_n}$$

pagal lemos sąlygas bet kuriam realiam v konverguoja į tolydžią taške 0 funkciją $\widehat{G}(\mathbf{i}v)/C$. Pagal tikimybių teorijoje gerai žinomą tolydumo teoremą charakteristinėms funkcijoms (žiūrėkite, pavyzdžiui, [1], 258–260 psl.) gauname, kad pasiskirstymo funkcijos F_{ξ_n} konverguoja į kažkokią pasiskirstymo funkciją F jos tolydumo taškuose. Vadinasi, bet kuriame funkcijos $G(x) = CF(x)$ tolydumo taške

$$G_n(x) = C_n F_{\xi_n}(x) \to CF(x) = G(x).$$

Pagaliau pagal 2.9.9 lemą šios funkcijos G Laplace-Stieltjes transformacija yra $\widehat{G}$. Lema įrodyta. $\triangle$

[1] J. Kubilius. *Tikimybių teorija ir matematinė statistika.* Vilnius, 1980.

2.10 Bankroto tikimybės išraiška sudėtine geometrine tikimybe.

Kaip visame visame šiame skyriuje sakykime, kad draudiko valdomas turtas $U(t)$ kinta pagal (30) formulę, t.y. bet kuriam laiko momentui t

$$U(t) = u + ct - \sum_{i=1}^{N(t)} Z_i$$

ir tenkinamos įprastinės klasikinio dinaminio rizikos modelio sąlygos:

- draudiko turtas pradiniu laiko momentu $u = U(0)$ yra neneigiamas;
- draudiko patiriamos žalos $Z_1, Z_2, Z_3, \ldots$ yra nepriklausomi vienodai pasiskirstę neneigiami atsitiktiniai dydžiai;
- premijų surinkimo greitis per laiko vienetą c yra teigiamas;
- žalų intervale $[0, t]$ skaičius $N(t)$ yra homogeninis Puasono procesas su tam tikru teigiamu intensyvumu λ;
- procesas N ir atsitiktinių dydžių seka $Z_1, Z_2, Z_3, \ldots$ yra nepriklausomi.

Kai žalos Z_1 pasiskirstymo funkcija F yra absoliučiai tolydi, $\mathbb{E}Z_1 = m$ yra baigtinis ir tenkinama grynojo pelno sąlyga $m\lambda < c$ skyrelyje 2.8 buvo surasta defektyvi atstatymo lygtis bankroto tikimybei $\psi(u)$. Būtent 2.8.1 teoremoje buvo gauta, kad (žiūrėkite (48))

$$\psi(u) = \frac{1}{1+\varrho}\left(1 - F_I(u) + \int_0^u \psi(u-y)\mathrm{d}F_I(y)\right),$$

kur

$$\varrho = \frac{c}{\lambda m} - 1$$

yra teigiamas apsaugos koeficientas, o pasiskirstymo funkcija

$$F_I(y) = \frac{1}{m}\int_0^y (1 - F(z))\mathrm{d}z$$

visiems $y \geqslant 0$.

Šiame skyrelyje naudodamiesi Laplace-Stieltjes transformacijos savybėmis gausime bankroto tikimybės išraišką sudėtine geometrine tikimybe.

2.10.1 Teorema. *Sakykime tenkinamos visos įprastinės klasikinio dinaminio rizikos modelio sąlygos, žala Z_1 turi baigtinį vidurkį $m = \mathbb{E}Z_1$ ir* *absoliučiai tolydžią pasiskirstymo funkciją $F(y) = \mathbb{P}(Z_1 \leqslant y)$. Sakykime, be to, patenkinta grynojo pelno sąlyga $m\lambda < c$.*

Tada bet kuriam neneigiamam pradiniam kapitalui u bankroto tikimybė

$$\psi(u) \quad = \quad \frac{\varrho}{1+\varrho}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(1+\varrho)^n}\overline{F_I^{*n}}(u). \tag{54}$$

Čia:

$$\begin{aligned} \varrho \quad &= \quad \frac{c}{\lambda m} - 1, \\ F_I(u) \quad &= \quad \frac{1}{m}\int\limits_0^u (1 - F(z))dz, \ \ y \geqslant 0, \end{aligned}$$

F_I^{*n} žymi n-ąją pasiskirstymo funkcijos F_I sąsūką su pačia savimi, o $\overline{F_I^{*n}}(u) = 1 - F_I^{*n}(u)$.

$\triangle$ Esant patenkintoms teoremos sąlygoms bankroto tikimybė $\psi(u)$ bet kuriam neneigiamam u tenkina (48) formulę:

$$\psi(u) = \frac{1}{1+\varrho}\left(1 - F_I(u) + \int\limits_0^u \psi(u-y)\mathrm{d}F_I(y)\right).$$

Vadinasi, išlikimo tikimybė $\varphi(u) = 1 - \psi(u)$ bet kuriam neneigiamam u tenkina lygybę

$$\varphi(u) = \frac{\varrho}{1+\varrho}\mathbb{I}_{[0,\infty)}(u) + \frac{1}{1+\varrho}\int\limits_0^u \varphi(u-y)\mathrm{d}F_I(y).$$

Funkcija $\varphi(u)$ priklauso klasei $\mathcal{G}$. Tegul $\widehat{\varphi}$ yra išlikimo tikimybės Laplace-Stieltjes transformacija, o $\widehat{F_I}$ yra pasiskirstymo funkcijos F_I Laplace-Stieltjes transformacija. Pasinaudoję Laplace-Stieltjes transformacijos savybėmis (žr. 2.9.1 pavyzdį ir 2.9.1, 2.9.2, 2.9.3 lemas) iš paskutinės lygybės gauname, kad visiems kompleksiniams skaičiams su neneigiama realiąja dalimi

$$\widehat{\varphi}(s) = \frac{\varrho}{1+\varrho} + \frac{1}{1+\varrho}\ \widehat{\varphi}(s)\widehat{F_I}(s).$$

Iš čia

$$\widehat{\varphi}(s) \quad = \quad \frac{\frac{\varrho}{1+\varrho}}{1 - \frac{\widehat{F_I}(s)}{1+\varrho}} = \frac{\varrho}{1+\varrho}\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(1+\varrho)^n}\left(\widehat{F_I}(s)\right)^n\right).$$

Sakykime $\eta_1, \eta_2, \ldots$ yra nepriklausomi, visi pasiskirstę pagal pasiskirstymo funkciją F_I atsitiktiniai dydžiai. Naudodami tas pačias Laplace-Stieltjes transformacijos savybes (žr. 2.9.1, 2.9.2, 2.9.3 ir 2.9.9 lemas) gauname, kad funkcijos

$$\frac{\varrho}{1+\varrho}\left(\mathbb{I}_{[0,\infty)}(u)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(1+\varrho)^n}\mathbb{P}(\eta_1+\eta_2+\ldots+\eta_n\leqslant u)\right).$$

Laplace-Stieltjes transformacija irgi lygi

$$\frac{\varrho}{1+\varrho}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(1+\varrho)^n}\left(\widehat{F_I}(s)\right)^n\right)$$

bet kuriam kompleksiniam skaičiui su neneigiama realiąja dalimi.

Iš 2.9.8 lemos išplaukia, kad

$$\varphi(u)=\frac{\varrho}{1+\varrho}\left(\mathbb{I}_{[0,\infty)}(u)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(1+\varrho)^n}\mathbb{P}(\eta_1+\eta_2+\ldots+\eta_n\leqslant u)\right).$$

Todėl bet kuriam neneigiamam u

$$\begin{aligned}
\psi(u) &= 1-\varphi(u)\\
&= 1-\frac{\varrho}{1+\varrho}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(1+\varrho)^n}\mathbb{P}(\eta_1+\eta_2+\ldots+\eta_n\leqslant u)\right)\\
&= 1-\frac{\varrho}{1+\varrho}-\frac{\varrho}{1+\varrho}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(1+\varrho)^n}(1-\mathbb{P}(\eta_1+\eta_2+\ldots+\eta_n>u))\\
&= \frac{\varrho}{1+\varrho}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(1+\varrho)^n}\mathbb{P}(\eta_1+\eta_2+\ldots+\eta_n>u)\\
&= \frac{\varrho}{1+\varrho}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(1+\varrho)^n}\overline{F_I^{*n}}(u).
\end{aligned}$$

Teorema įrodyta. △

2.10.1 Pavyzdys. *Sakykime tenkinamos visos įprastinės klasikinio dinaminio rizikos modelio sąlygos, žala Z_1 turi eksponentinį pasiskirstymą su parametru α:*

$$F(y)=\mathbb{P}\left(Z_1\leqslant y\right)=\left(1-e^{-\alpha y}\right)\mathbb{I}_{\{y\geqslant 0\}}$$

ir patenkinta grynojo pelno sąlyga:

$$c=(1+\varrho)\frac{\mathbb{E}Z_1}{\mathbb{E}W_1}=(1+\varrho)\frac{\lambda}{\alpha}$$

su kažkokiu teigiamu apsaugos koeficientu ϱ. Rasime bankroto tikimybės išraišką aprašytu atveju.

$\triangle$ Pagal (54) formulę bet kuriai neneigiamai pradinio kapitalo reikšmei u

$$\psi(u) = \frac{\varrho}{1+\varrho}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(1+\varrho)^n}\overline{F_I^{*n}}(u).$$

Norint panaudoti šią formulę, reikia rasti dydžių $\overline{F_I^{*n}}(u)$ išraiškas. Nesunku pastebėti, kad bet kuriam neneigiamam x

$$F_I(x) = \frac{1}{\mathbb{E}Z_1}\int_0^x e^{-\alpha y}\mathrm{d}y = 1 - e^{-\alpha x} = F(x).$$

ir

$$\begin{aligned}
F_I^{*2}(x) &= F^{*2}(x) = \int_0^x F(x-y)\mathrm{d}F(y)\\
&= \int_0^x \left(1 - e^{-\alpha(x-y)}\right)\mathrm{d}\left(1-e^{-\alpha y}\right)\\
&= \alpha\int_0^x e{-}\alpha y\mathrm{d}y - \alpha\int_0^x e{-}\alpha x\mathrm{d}y\\
&= 1 - e^{-\alpha x} - \alpha x e^{-\alpha x}\\
&= 1 - e^{-\alpha x}(1+\alpha x),\\
F_I^{*3}(x) &= F^{*3}(x)\\
&= 1 - e^{-\alpha x}\left(1 + \alpha x + \frac{(\alpha x)^2}{2!}\right)
\end{aligned}$$

Matematinės indukcijos metodu nesunku įrodyti, kad bet kuriam natūraliajam n.

$$F_I^{*n}(x) = F^{*n}(x) = 1 - e^{-\alpha x}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(\alpha x)^k}{k!}$$

Vadinasi, bet kuriam natūraliąjam n ir bet kuriam neneigiamam u

$$\overline{F_I^{*n}}(u) = e^{-\alpha u}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(\alpha u)^k}{k!}.$$

Šiuos paskaičiavimus įstatę į (54) lygybę gauname

$$
\begin{aligned}
\psi(u) &= \frac{\varrho}{1+\varrho}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(1+\varrho)^n}\ e^{-\alpha u}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(\alpha u)^k}{k!} \\
&= \frac{\varrho\ e^{-\alpha u}}{1+\varrho}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(1+\varrho)^n}\ \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(\alpha u)^k}{k!} \\
&= \frac{\varrho\ e^{-\alpha u}}{1+\varrho}\ \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\alpha u)^k}{k!}\ \sum_{n=k+1}^{\infty}\frac{1}{(1+\varrho)^n} \\
&= \frac{\varrho\ e^{-\alpha u}}{1+\varrho}\ \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\alpha u)^k}{k!}\ \frac{\frac{1}{(1+\varrho)^{k+1}}}{1-\frac{1}{1+\varrho}} \\
&= \frac{e^{-\alpha u}}{1+\varrho}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{\alpha u}{1+\varrho}\right)^k}{k!} \\
&= \frac{1}{1+\varrho}\exp\left\{-\frac{\varrho}{1+\varrho}\alpha u\right\}.
\end{aligned}
$$

$\triangle$

2.11 Bankroto tikimybės asimptotika "lengvoms" žaloms.

Ankstesnio skyrelio 2.10.1 pavyzdyje nustatėme bankroto tikimybę klasikiniame diskretaus laiko rizikos modelyje esant eksponentinėms žaloms. Eksponentinis pasiskirstymas yra vienas iš pasiskirstymų turinčių baigtinį eksponentinį momentą.

Jeigu atsitiktinės žalos Z_1 pasiskirstymo funkcija $F(x)$ tenkina lygybę

$$\lim_{x\to\infty}\overline{F}(x)e^{vx}=0$$

kokiam nors teigiamam v, tai žala Z_1 dažnai vadinama "lengva". O jeigu bet kuriam teigiamam v

$$\lim_{x\to\infty}\overline{F}(x)e^{vx}=\infty,$$

tai žala atitinkanti pasiskirstymo funkciją $F(x)$ vadinama "sunkia". Aišku, kad eksponentiškai pasiskirsčiusi žala nagrinėta 2.10.1 pavyzdyje yra "lengva". Be abejo yra ir daugiau "lengvų" skirstinių. Bet kuris skirstinys su baigtine atrama, bet kuris skirstinys iš gama skirstinių grupės, bet kuris vienpusis normalusis skirstinys priklauso "lengviems" skirstiniams.

Pasirodo, kad labai plačiai "lengvų" skirstinų aibei galioja bankroto tikimybės asimptotika analogiška lygybei gautai 2.10.1 pavyzdyje.

2.11.1 Teorema. *Sakykime tenkinamos visos įprastinės klasikinio dinaminio rizikos modelio sąlygos:*

- *draudiko turtas pradiniu laiko momentu $u = U(0)$ yra neneigiamas;*
- *draudiko patiriamos žalos $Z_1, Z_2, Z_3, \ldots$ yra nepriklausomi vienodai pasiskirstę neneigiami atsitiktiniai dydžiai;*
- *premijų surinkimo greitis per laiko vienetą c yra teigiamas;*
- *žalų intervale $[0, t]$ skaičius $N(t)$ yra homogeninis Puasono procesas su tam tikru teigiamu intensyvumu λ;*
- *procesas N ir atsitiktinių dydžių seka $Z_1, Z_2, Z_3, \ldots$ yra nepriklausomi.*

Sakykime, be to, patenkinta grynojo pelno sąlyga (38):

$$\mathbb{E}Z_1 - c\mathbb{E}W_1 = \mathbb{E}Z_1 - \frac{c}{\lambda} < 0,$$

absoliučiai tolydi žala Z_1 turi baigtinį eksponentinį momentą $\mathbb{E}\left(e^{rZ_1}\right)$ kokiam nors teigiamam r, egzistuoja pusiausvyros koeficientas R apibrėžtas (39) lygtimi:

$$\lambda\mathbb{E}\left(e^{RZ_1}\right) = \lambda + cR.$$

ir

$$\int_0^\infty xe^{Rx}\overline{F}(x)dx < \infty.$$

Tada pradiniam kapitalui u neaprėžtai augant

$$\psi(u) \sim D\exp\{-Ru\} \tag{55}$$

su konstanta

$$D = \left(\frac{R}{\varrho m}\int_0^\infty xe^{Rx}\overline{F}(x)dx\right)^{-1}.$$

$\triangle$ Suformuluotoji teorema įrodoma nagrinėjant tam tikros atstatymo lygties sprendinio asimptotines savybes. Tam rnaudojami gana gilūs rezultatų iš atstatymo teorijos. Dėl šios priežasties neįrodinėsime suformuluotos teoremos. Pilną teiginio įrodymą galima rasti [1] knygoje.

[1]P. Embrechts, C. Klüpelberg, T. Mikosch. *Modeling extremal events.* Springer, 1997.

2.12 Subeksponentiniai skirstiniai ir jų savybės.

Ankstesniame skyrelyje nagrinėjome bankroto tikimybės asimptotiką, kai žala Z_1 yra lengva, t.y. egzistuoja baigtinis eksponentinis šio atsitiktinio dydžio momentas $\mathbb{E}e^{vZ_1}$ kažkokiam teigiamam skaičiui v. Be abejo žalos Z_1 skirstinys gali netenkinti šios savybės. Gali būti taip, kad $\mathbb{E}e^{vZ_1} = \infty$ bet kuriam teigiamam v. Yra žinoma daug "sunkių" skirstinių klasių. Šiame skyrelyje išnagrinėsime populiariausią "sunkių" skirstinių klasę – subeksponentinius skirstinius.

2.12.1 Apibrėžimas *Neneigiamo atsitiktinio dydžio pasiskirstymo funkcija F vadinama subeksponentine, jeigu*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\overline{F^{*2}}(x)}{\overline{F}(x)} = 2$$

čia $\overline{F}(x) = 1 - F(x)$, $\overline{F^{*2}}(x) = 1 - F^{*2}(x)$, o $F^{*2}(x)$ žymi pasiskirsymo funkcijos sąsūką su pačia savimi.

2.12.1 Pavyzdys *Pareto dėsnio pasiskirstymo funkcija*

$$F(x) = \left(1 - \left(\frac{1}{1+x}\right)^{\alpha}\right) \mathbb{I}_{\{x \geqslant 0\}}.$$

Parodysime, kad F yra subeksponentinė.

$\triangle$ Sakykime ξ yra neneigiamas atsitiktinis dydis atitinkantis pasiskirstymo funkciją F. Aišku, kad pasiskirstymo funkciją F^{*2} atitinka nepriklausomų atsitiktinio dydžio ξ kopijų ξ_1, ξ_2 suma $\xi_1 + \xi_2$.

Bet kuriam teigiamam x

$$\begin{aligned}
\overline{F^{*2}}(x) &= \mathbb{P}(\xi_1 + \xi_2 > x) \geqslant \mathbb{P}\left(\{\xi_1 > x\} \cup \{\xi_2 > x\}\right) \\
&= \mathbb{P}(\xi_1 > x) + \mathbb{P}(\xi_2 > x) - \mathbb{P}(\xi_1 > x)\mathbb{P}(\xi_2 > x) \\
&= 2\overline{F}(x) - (\overline{F}(x))^2.
\end{aligned}$$

Iš šio įverčio išplaukia, kad

$$\liminf_{x\to\infty} \frac{\overline{F^{*2}}(x)}{\overline{F}(x)} \geqslant 2. \tag{56}$$

Antra vertus bet kuriam $0 < \delta < 1/2$ ir bet kuriam teigiamam x

$$\begin{aligned}\overline{F^{*2}}(x) &= \mathbb{P}(\xi_1+\xi_2 > x)\\ &\leqslant \mathbb{P}\left(\{\xi_1 > (1-\delta)x\} \cup \{\xi_2 > (1-\delta)x\} \cup \{\xi_1 > \delta x, \xi_2 > \delta x\}\right)\\ &\leqslant 2\overline{F}((1-\delta)x) + \left(\overline{F}(\delta x)\right)^2.\end{aligned}$$

Iš čia

$$\begin{aligned}\limsup_{x\to\infty} \frac{\overline{F^{*2}}(x)}{\overline{F}(x)} &\leqslant \limsup_{x\to\infty}\left(\frac{2\overline{F}((1-\delta)x)}{\overline{F}(x)} + \frac{(\overline{F}(\delta x))^2}{\overline{F}(x)}\right)\\ &= \limsup_{x\to\infty}\left(\frac{1+x}{1+(1-\delta)x}\right)^{\alpha} + \limsup_{x\to\infty}\frac{(1+x)^{2\alpha}}{1+\delta x)^{4\alpha}}\\ &= (1-\delta)^{-\alpha}.\end{aligned}$$

Kadangi δ buvo pasirinktas bet koks iš intervalo $(0, 1/2)$, tai

$$\limsup_{x\to\infty}\frac{\overline{F^{*2}}(x)}{\overline{F}(x)} \leqslant 2. \tag{57}$$

Iš gautų (56) ir (57) įverčių išplaukia, kad

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\overline{F^{*2}}(x)}{\overline{F}(x)} = 2.$$

Taigi F yra subeksponentinė pasiskirstymo funkcija. $\triangle$

2.12.2 Pavyzdys *Weibull dėsnio pasiskirstymo funkcija*

$$F(x) = \left(1 - e^{-x^{\alpha}}\right)\mathbb{I}_{\{x\geqslant 0\}}$$

Parodysime, kad F yra subeksponentinė , kai $\alpha \in (0,1)$.

$\triangle$ Aišku, kad bet kuriam teigiamam x teisingas (56) įvertis, t.y.

$$\liminf_{x\to\infty}\frac{\overline{F^{*2}}(x)}{\overline{F}(x)} \geqslant 2.$$

Antra vertus tokiems pat teigiamiems x

$$F^{*2}(x) = \int_0^x F(x-y)\mathrm{d}F(y).$$

Todėl

$$\begin{aligned}\overline{F^{*2}}(x) &= \int\limits_0^\infty \mathrm{d}F(y) - \int\limits_0^x F(x-y)\mathrm{d}F(y)\\ &= \overline{F}(x) + \int\limits_0^x \overline{F}(x-y)\mathrm{d}F(y).\end{aligned}$$

Bet kuriai funkcijai $\phi(x)$ su savybe $0 < \phi(x) < x$

$$\begin{aligned}&\frac{\overline{F^{*2}}(x)}{\overline{F}(x)} = 1 + \int\limits_0^x \frac{\overline{F}(x-y)}{\overline{F}(x)}\mathrm{d}F(y)\\ =\ & 1 + \alpha \int\limits_0^{\phi(x)} e^{x^\alpha-(x-y)^\alpha-y^\alpha} y^{\alpha-1}\mathrm{d}y + \alpha \int\limits_{\phi(x)}^{x-\phi(x)} e^{x^\alpha-(x-y)^\alpha-y^\alpha} y^{\alpha-1}\mathrm{d}y\\ +\ & \alpha \int\limits_{x-\phi(x)}^{x} e^{x^\alpha-(x-y)^\alpha-y^\alpha} y^{\alpha-1}\mathrm{d}y\\ =\ & 1 + \alpha \int\limits_0^{\phi(x)} e^{x^\alpha-(x-y)^\alpha-y^\alpha} y^{\alpha-1}\mathrm{d}y + \alpha \int\limits_{\phi(x)}^{x-\phi(x)} e^{x^\alpha-(x-y)^\alpha-y^\alpha} y^{\alpha-1}\mathrm{d}y\\ +\ & \alpha \int\limits_0^{x} e^{x^\alpha-(x-y)^\alpha-y^\alpha} (x-y)^{\alpha-1}\mathrm{d}y. \end{aligned} \tag{58}$$

Pasirinkę $\phi(x) = \log^{\frac{2}{\alpha}} x$, gauname

$$\begin{aligned}&\alpha \int\limits_0^{\phi(x)} e^{x^\alpha-(x-y)^\alpha-y^\alpha} y^{\alpha-1}\mathrm{d}y = \int\limits_0^{\phi(x)} e^{x^\alpha\left(\alpha\frac{y}{x}+O_\alpha\left(\frac{y^2}{x^2}\right)\right)}\mathrm{d}\left(-e^{-y^\alpha}\right)\\ =\ & \left(1+O_\alpha\left(\frac{\log^{\frac{2}{\alpha}} x}{x^{1-\alpha}}\right)\right)\left(1-e^{-\log^2 x}\right).\end{aligned}$$

Analogiškai,

$$\begin{aligned}&\alpha \int\limits_0^{x} e^{x^\alpha-(x-y)^\alpha-y^\alpha} (x-y)^{\alpha-1}\mathrm{d}y\\ =\ & \int\limits_0^{\phi(x)} e^{x^\alpha\left(\alpha\frac{y}{x}+O_\alpha\left(\frac{y^2}{x^2}\right)\right)}\left(\frac{y}{x-y}\right)^{1-\alpha}\mathrm{d}\left(-e^{-y^\alpha}\right)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(1 + O_\alpha\left(\frac{\log^{\frac{2}{\alpha}} x}{x^{1-\alpha}}\right)\right) \int\limits_0^{\phi(x)} \left(\frac{y}{x-y}\right)^{1-\alpha} \mathrm{d}\left(-e^{-y^\alpha}\right) \\
&= \left(1 + O_\alpha\left(\frac{\log^{\frac{2}{\alpha}} x}{x^{1-\alpha}}\right)\right) O_\alpha\left(\frac{\log^{\frac{2}{\alpha}} x}{x}\right)^{1-\alpha} \left(1 - e^{-\log^2 x}\right).
\end{aligned}
$$

Pagaliau likusį integralą galime įvertinti taip:

$$
\begin{aligned}
I(x) &= \alpha \int\limits_{\phi(x)}^{x-\phi(x)} e^{x^\alpha - (x-y)^\alpha - y^\alpha} y^{\alpha-1} \mathrm{d}y \\
&\leqslant \max_{\phi(x) \leqslant y \leqslant x-\phi(x)} \left\{e^{-y^\alpha - (x-y)^\alpha}\right\} e^{x^\alpha} \alpha \int\limits_{\phi(x)}^{x-\phi(x)} y^{\alpha-1} \mathrm{d}y.
\end{aligned}
$$

Kai $y \in [\phi(x), x - \phi(x)]$ funkcija $y^\alpha + (x-y)^\alpha$ minimumus įgyja intervalo galuose. Vadinasi,

$$
\begin{aligned}
I(x) &\leqslant x^\alpha \exp\{x^\alpha - \phi^\alpha(x) - (x - \phi(x))^\alpha\} \\
&= x^\alpha \exp\left\{x^\alpha \left(1 - \left(1 - \frac{\phi(x)}{x}\right)^\alpha\right) - \log^2 x\right\} \\
&= \frac{x^\alpha}{e^{\log^2 x}} \left(1 + O_\alpha\left(\frac{\log^{\frac{2}{\alpha}} x}{x^{1-\alpha}}\right)\right).
\end{aligned}
$$

Įstatę gautus integralų įverčius į (58) nelygybę turime, kad

$$
\begin{aligned}
&\limsup_{x\to\infty} \frac{\overline{F^{*2}}(x)}{\overline{F}(x)} \leqslant 1 \\
+ \; &\limsup_{x\to\infty} \left(1 + O_\alpha\left(\frac{\log^{\frac{2}{\alpha}} x}{x^{1-\alpha}}\right)\right)\left(1 + O_\alpha\left(\frac{\log^{\frac{2}{\alpha}} x}{x^{1-\alpha}}\right)^{1-\alpha}\right)\left(1 - e^{-\log^2 x}\right) \\
+ \; &\limsup_{x\to\infty} \frac{x^\alpha}{e^{\log^2 x}} \left(1 + O_\alpha\left(\frac{\log^{\frac{2}{\alpha}} x}{x^{1-\alpha}}\right)\right) = 2.
\end{aligned}
$$

Iš nustatytų ribinių sąryšių išplaukia, kad

$$
\lim_{x\to\infty} \frac{\overline{F^{*2}}(x)}{\overline{F}(x)} = 2.
$$

Taigi Weibull pasiskirstymo funkcija F yra subeksponentinė. △

2.12.1 Teorema. *Jeigu pasiskirstymo funkcija F yra subeksponentinė, tai teisingos tokios savybės :*

- *tolygiai kintamojo $y \in [a, b] \subset (0, \infty)$ atžvilgiu*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\overline{F}(x-y)}{\overline{F}(x)} = 1;$$

- *bet kuriam fiksuotam n*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\overline{F^{*n}}(x)}{\overline{F}(x)} = n;$$

- *pasirinktam teigiamam ε egzistuoja konstanta $D = D(\varepsilon)$, kuriai*

$$\frac{\overline{F^{*n}}(x)}{\overline{F}(x)} \leqslant D(1+\varepsilon)^n$$

visiems neneigiamiems x.

△ Pradžioje įrodysime pirmąją teoremos lygybę. Kadangi

$$F^{*2}(x) = \int_0^x F(x-z)\mathrm{d}F(z),$$

tai bet kuriam $y \in [a, b]$ ir bet kuriam $x > b$ turime

$$\begin{aligned}
\frac{\overline{F^{*2}}(x)}{\overline{F}(x)} &= 1 + \int_0^y \frac{\overline{F}(x-z)}{\overline{F}(x)}\mathrm{d}F(z) + \int_y^x \frac{\overline{F}(x-z)}{\overline{F}(x)}\mathrm{d}F(z) \\
&\geqslant 1 + F(y) + \frac{\overline{F}(x-y)}{\overline{F}(x)}(F(x) - F(y)).
\end{aligned}$$

Iš šios nelygybės pakankamai dideliems x (tokiems, kad $F(x) - F(b) > 0$) gauname

$$1 \leqslant \frac{\overline{F}(x-y)}{\overline{F}(x)} \leqslant \left(\frac{\overline{F^{*2}}(x)}{\overline{F}(x)} - 1 - F(y)\right)\frac{1}{F(x) - F(y)}$$

Dešinėje pusėje esantis gauto įverčio reiškinys artėja į 1, kai x neaprėžtai auga. Todėl iš gautų nelygybių išplaukia pirmasis teoremos tvirtinimas. △

$\triangle$ Antrąjį teoremos teiginį įrodysime matematinės indukcijos metodu. Pagal subeksponentinės pasiskirstymo funkcijos apibrėžimą norimas sąryšis teisingas, kai $n = 2$. Sakykime, kad šis sąryšis teisingas, kai $n = M$, t.y.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\overline{F^{*M}}(x)}{\overline{F}(x)} = M.$$

Remdamiesi šia prielaida parodysime, kad

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\overline{F^{*(M+1)}}(x)}{\overline{F}(x)} = M + 1.$$

Tegul $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_M, \xi_{M+1}$ yra nepriklausomi neneigiami atsitiktiniai dydžiai visi pasiskirstę pagal pasiskirstymo funkciją F. Aišku, kad

$$\begin{aligned} \overline{F^{*(M+1)}}(x) &= \mathbb{P}\left(\xi_1 + \xi_2 + ... + \xi_{M+1} > x\right) \\ &\geqslant \mathbb{P}\left(\xi_1 + \xi_2 + ... + \xi_M > x\right) + \mathbb{P}\left(\xi_{M+1} > x\right) \\ &= \overline{F^{*M}}(x) + \overline{F}(x). \end{aligned}$$

Pagal indukcijos prielaidą

$$\liminf_{x\to\infty} \frac{\overline{F^{*(M+1)}}(x)}{\overline{F}(x)} \geqslant 1 + \liminf_{x\to\infty} \frac{\overline{F^{*M}}(x)}{\overline{F}(x)} = 1 + M \tag{59}$$

Antra vertus, bet kuriam $y \in (0, x]$

$$\begin{aligned} \frac{\overline{F^{*(M+1)}}(x)}{\overline{F}(x)} &= 1 + \frac{F(x) - F^{*(M+1)}(x)}{\overline{F}(x)} \\ &= 1 + \frac{1}{\overline{F}(x)}\left(F(x) - \int_0^x F^{*M}(x-z)\mathrm{d}F(z)\right) \\ &= 1 + \int_0^x \frac{\overline{F^{*M}}(x-z)}{\overline{F}(x)}\mathrm{d}F(z) \\ &= 1 + \int_0^{x-y} \frac{\overline{F^{*M}}(x-z)}{\overline{F}(x)}\mathrm{d}F(z) + \int_{x-y}^{x} \frac{\overline{F^{*M}}(x-z)}{\overline{F}(x)}\mathrm{d}F(z) \\ &= 1 + J_1(x) + J_2(x). \end{aligned} \tag{60}$$

Iš indukcijos prielaidos

$$
\begin{aligned}
J_1(x) &= \int_0^{x-y} \left(\frac{\overline{F^{*M}}(x-z)}{\overline{F}(x-z)} - M + M \right) \frac{\overline{F}(x-z)}{\overline{F}(x)} \, \mathrm{d}F(z) \\
&= \int_0^{x-y} (M + \varepsilon_1(y)) \frac{\overline{F}(x-z)}{\overline{F}(x)} \, \mathrm{d}F(z) \\
&= (M + \varepsilon_1(y)) \left(\frac{F(x) - F^{*2}(x)}{\overline{F}(x)} - \int_{x-y}^{x} \frac{\overline{F}(x-z)}{\overline{F}(x)} \, \mathrm{d}F(z) \right) \\
&\leqslant (M + \varepsilon_1(y)) \left(1 + \varepsilon_2(x)\right)
\end{aligned}
$$

kažkokioms nykstančioms funkcijoms $\varepsilon_1(y)$ ir $\varepsilon_1(x)$:

$$
\lim_{y \to \infty} \varepsilon_1(y) = 0, \quad \lim_{x \to \infty} \varepsilon_2(x) = 0.
$$

Iš indukcijos prielaidos išplaukia, kad dydis

$$
\sup_{x-y \leqslant z \leqslant x} \frac{\overline{F^{*(M)}}(x-z)}{\overline{F}(x-z)}
$$

aprėžtas dydžiu $D_{M,y}$ priklausančiu tik nuo M ir y. Todėl

$$
J_2(x) \leqslant D_{M,y} \int_{x-y}^{x} \frac{\overline{F}(x-z)}{\overline{F}(x)} \, \mathrm{d}F(z) \leqslant D_{M,y} \left(\frac{\overline{F}(x-y)}{\overline{F}(x)} - 1 \right).
$$

Įstatę gautus įverčius į (60) lygybę, turime

$$
\begin{aligned}
\limsup_{x \to \infty} \frac{\overline{F^{*(M+1)}}(x)}{\overline{F}(x)} &\leqslant 1 \\
&+ \limsup_{x \to \infty} (M + \varepsilon_1(y)) \left(1 + \varepsilon_2(x)\right) \\
&+ \limsup_{x \to \infty} D_{M,y} \left(\frac{\overline{F}(x-y)}{\overline{F}(x)} - 1 \right).
\end{aligned}
$$

Iš čia, pasinaudoję jau įrodyta pirmąja subeksponentinių pasiskirstymo funkcijų savybe, gauname

$$
\limsup_{x \to \infty} \frac{\overline{F^{*(M+1)}}(x)}{\overline{F}(x)} \leqslant 1 + M + \varepsilon_1(y)
$$

kažkokiai nykstančiai funkcijai $\varepsilon_1(y)$. Paskutinėje nelygybėje perėję prie ribos, kai y artėja į begalybę turime

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{\overline{F^{*(M+1)}}(x)}{\overline{F}(x)} \leqslant 1+M.$$

Paskutinis įvertis ir (59) nelygybė rodo, kad

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\overline{F^{*(M+1)}}(x)}{\overline{F}(x)} = 1+M.$$

Vadinasi, pagal matematinės indukcijos principą išplaukia, kad antroji teoremos savybė galioja visiems $n \geqslant 2$. $\triangle$

$\triangle$ Įrodysime trečiąją teoremoje suformuluotą subeksponentinės pasiskirstymo funkcijos savybę. Pažymėkime

$$D_n = \sup_{x\geqslant 0} \frac{\overline{F^{*n}}(x)}{\overline{F}(x)}$$

Pagal (60) lygybę, bet kuriam baigtiniam B

$$\begin{aligned}
D_{n+1} &= \sup_{x\geqslant 0} \frac{\overline{F^{*(n+1)}}(x)}{\overline{F}(x)} \\
&\leqslant 1+\sup_{x\geqslant 0}\int_0^x \frac{\overline{F^{*n}}(x-z)}{\overline{F}(x)}\,\mathrm{d}F(z) \\
&\leqslant 1+\sup_{0\leqslant x\leqslant B}\int_0^x \frac{\overline{F^{*n}}(x-z)}{\overline{F}(x)}\,\mathrm{d}F(z) \\
&+ \sup_{x\geqslant B}\int_0^x \frac{\overline{F^{*n}}(x-z)}{\overline{F}(x-z)}\frac{\overline{F}(x-z)}{\overline{F}(x)}\,\mathrm{d}F(z) \\
&\leqslant 1+\frac{1}{\overline{F}(B)} + D_n \sup_{x\geqslant B}\frac{F(x)-F^{*2}(x)}{\overline{F}(x)} \\
&= 1+\frac{1}{\overline{F}(B)} + D_n \sup_{x\geqslant B}\left(\frac{\overline{F^{*2}}(x)}{\overline{F}(x)} - 1\right)
\end{aligned}$$

Kadangi F yra subeksponentinė, tai bet kuriam teigiamam ε galima surasti B tokį, kad paskutinis paskutinės nelygybės narys būtų mažesnis už $1+\varepsilon$.

Vadinasi, bet kuriam tegiamam ε atsiras toks B, kad

$$D_{n+1} \leqslant 1 + \frac{1}{\overline{F}(B)} + D_n(1+\varepsilon).$$

Todėl bet kuriam natūraliąjam n

$$\begin{aligned} D_n &\leqslant 1 + \frac{1}{\overline{F}(B)} + D_{n-1}(1+\varepsilon) \\ &\leqslant \left(1 + \frac{1}{\overline{F}(B)}\right)(1 + (1+\varepsilon)) + D_{n-2}(1+\varepsilon)^2 \\ &\leqslant \left(1 + \frac{1}{\overline{F}(B)}\right)(1 + (1+\varepsilon) + (1+\varepsilon)^2) + D_{n-3}(1+\varepsilon)^3 \\ &\leqslant \ldots \leqslant \left(1 + \frac{1}{\overline{F}(B)}\right)(1 + (1+\varepsilon) + \ldots + (1+\varepsilon)^{n-1}) \\ &\leqslant \left(1 + \frac{1}{\overline{F}(B)}\right)\frac{(1+\varepsilon)^n}{\varepsilon}. \end{aligned}$$

Taigi teoremos trečia savybė teisinga su

$$D(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon}\left(1 + \frac{1}{\overline{F}(B)}\right).$$

$\triangle$

Iš teoremos pirmos dalies išplaukia, kad subeksponentinei pasiskirstymo funkcijai F funkcija $\overline{F}(\log x)$ yra lėtai kintanti. (žiūrėkite [1] knygos pirmą skyrių). Pasinaudoję minėtoje knygoje išdėstytomis lėtai kintančių funkcijų savybėmis galime gauti, kad bet kuriam teigiamam ε

$$\lim_{x\to\infty} e^{\varepsilon x}\overline{F}(x) = \infty.$$

Iš šio sąryšio išplaukia, kad atsitiktinio dydis ξ su subeksponentine pasiskirstymo funkcija F yra "sunkus", nes bet kuriam teigiamam v neegzistuoja baigtinis eksponentinis momemtas $\mathbb{E}e^{v\xi}$.

[1] N.H. Bingham, C.M. Goldie, J.L. Teugels. *Regular variation.* Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1987.

2.13 Bankroto tikimybės asimptotika subeksponentinėms žaloms.

2.10 ir 2.11 skyreliuose nagrinėjome klasikinio dinaminio rizikos modelio bankroto tikimybes esant lengvoms žaloms. Šiame skyrelyje gausime asimptotinę formulę bankroto tikimybei "sunkių žalų atveju.

2.13.1 Teorema. *Sakykime tenkinamos visos įprastinės klasikinio dinaminio rizikos modelio sąlygos:*

- *draudiko turtas pradiniu laiko momentu $u = U(0)$ yra neneigiamas;*
- *draudiko patiriamos žalos $Z_1, Z_2, Z_3, \ldots$ yra nepriklausomi vienodai pasiskirstę neneigiami atsitiktiniai dydžiai;*
- *premijų surinkimo greitis per laiko vienetą c yra teigiamas;*
- *žalų intervale $[0, t]$ skaičius $N(t)$ yra homogeninis Puasono procesas su tam tikru teigiamu intensyvumu λ;*
- *procesas $N(t)$ ir atsitiktinių dydžių seka $Z_1, Z_2, Z_3, \ldots$ yra nepriklausomi.*

Sakykime be to patenkinta grynojo pelno sąlyga (38):

$$\mathbb{E}Z_1 - c\mathbb{E}W_1 = \mathbb{E}Z_1 - \frac{c}{\lambda} < 0,$$

ir absoliučiai tolydžios žalos Z_1 integruota pasiskirstymo funkcija

$$F_I(x) = \frac{1}{m}\int_y^\infty (1 - F_{Z_1}(z))dz = \frac{1}{m}\int_y^\infty \mathbb{P}(Z_1 > z)dz$$

yra subeksponentinė.

Tada neaprėžtai didėjant pradiniam kapitalui bankroto tikimybė

$$\psi(u) \sim \frac{1}{\varrho m}\int_u^\infty (1 - F_{Z_1}(z))dz, \tag{61}$$

kur

$$\varrho = \frac{c}{\lambda m} - 1.$$

$\triangle$ Iš 2.10.1 teoremoje įrodytos (54) formulės turime, kad

$$\psi(u) \;=\; \frac{\varrho}{1+\varrho}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(1+\varrho)^n}\overline{F_I^{*n}}(u).$$

Vadinasi,

$$\lim_{u\to\infty}\frac{\psi(u)}{\overline{F_I}(u)} = \frac{\varrho}{1+\varrho}\lim_{u\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(1+\varrho)^n}\frac{\overline{F_I^{*n}}(u)}{\overline{F_I}(u)}. \tag{62}$$

Kadangi F_I yra subeksponentinė pasiskirstymo funkcija, tai iš 2.12.1 teoremos trečiosios dalies gauname, kad

$$\sup_{u\geqslant 0}\frac{\overline{F_I^{*n}}(x)}{\overline{F_I}(ux)} \leqslant D(\varrho)\left(1+\frac{\varrho}{2}\right)^n$$

visiems natūraliesiems n.

Eilutė

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+\frac{\varrho}{2}}{1+\varrho}\right)^n$$

konverguoja, todėl lygybėje (62) galima pereiti prie ribos po sumos ženklu. Pasinaudoję 2.12.1 teoremos antruoju tvirtinimu gauname

$$\begin{aligned}\lim_{u\to\infty}\frac{\psi(u)}{\overline{F_I}(u)} &= \frac{\varrho}{1+\varrho}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(1+\varrho)^n}\lim_{u\to\infty}\frac{\overline{F_I^{*n}}(u)}{\overline{F_I}(u)}\\ &= \frac{\varrho}{1+\varrho}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(1+\varrho)^n}.\end{aligned}$$

Kadangi

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(1+\varrho)^n} &= \frac{1}{1+\varrho}\left(1+\frac{2}{1+\varrho}+\frac{3}{(1+\varrho)^2}+\ldots\right)\\ &= \frac{1}{1+\varrho}\left(1+\frac{1}{1+\varrho}+\frac{1}{(1+\varrho)^2}+\ldots\right)^2 = \frac{1+\varrho}{\varrho^2},\end{aligned}$$

tai

$$\lim_{u\to\infty}\frac{\psi(u)}{\overline{F_I}(u)} = \frac{1}{\varrho}.$$

Teorema įrodyta. $\triangle$

2.13.1 Pavyzdys *Sakykime patenkintos įprastinės klasikinio dinaminio rizikos modelio sąlygos. Žala Z_1 pasiskirsčiusi pagal Pareto dėsnį su pasiskirstymo funkcija*

$$F(x) = \left(1-\left(\frac{1}{1+x}\right)^3\right)\mathbb{I}_{\{x\geqslant 0\}}.$$

o homogeninio Puasono proceso intencyvumas $\lambda = 3$.

Parinksime įmokų greitį c taip, kad būtų ptenkinta grynojo pelno sąlyga (38). Šitam parinktam įmokų greičiui c rasime bankroto tikimybės $\psi(u)$ asimptotiką.

$\triangle$ Nesunku surasti, kad

$$m = \mathbb{E}Z_1 = \int_0^\infty \overline{F_{Z_1}}(x)\mathrm{d}x = \int_0^\infty \frac{1}{(1+x)^3}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}.$$

Tam, kad būtų patenkinta grynojo pelno sąlyga turi būti

$$c > m\lambda = \frac{3}{2}.$$

Kai c tenkina šią nelygybę

$$\varrho = \frac{c}{m\lambda} - 1 = \frac{2c-3}{3} > 0.$$

Pagal 2.13.1 teoremoje gautą asimptotinę formulę

$$\begin{aligned}\psi(u) &\sim \int_u^\infty (1 - F_{Z_1}(z))\mathrm{d}z = \frac{6}{2c-3}\int_u^\infty (1+z)^{-3}\mathrm{d}z \\ &= \frac{3}{2c-3}\frac{1}{(1+u)^2}\end{aligned}$$

bet kuriam premijų surinkimo greičiui $c > \frac{3}{2}$.

2.14 Uždaviniai.

1. N yra homogeninis Puasono procesas su intensyvumu $\lambda = 2$. Raskite $\mathbb{P}(N(1) \leqslant 3)$, $\mathbb{P}(N(2) \geqslant 1)$, $\mathbb{P}(N(1) = 3, N(2) = 5)$ ir $\mathbb{P}(N(1) \leqslant 3, N(2) \leqslant 4)$.

2. N yra homogeninis Puasono procesas su intensyvumu $\lambda = 1$. Raskite $\mathbb{P}(N(1) = 3, N(2) = 5, N(4) = 6)$ ir $\mathbb{P}(N(1) \leqslant 1, N(3) = 3, N(4) \geqslant 4)$.

3. N yra homogeninis Puasono procesas su intensyvumu $\lambda = 1$. Raskite $\mathbb{E}N(2)$, $\mathbb{E}N^2(3)$, $\mathbb{E}N(2)N(3)$ ir $\mathbb{E}N(1)N(2)N(3)$.

4. N yra Puasono procesas su skalės funkcija $\Lambda(t) = \sqrt{t}$. Raskite $\mathbb{P}(N(2) \geqslant 1)$, $\mathbb{P}(N(1) = 3, N(2) = 5)$, $\mathbb{E}N(2)$ ir $\mathbb{E}N(2)N(3)$.

5. Atsitiktinė žala klasikiniame dinaminiame rizikos modelyje pasiskirsčiusi pagal Pareto dėsnį su pasiskirstymo funkcija

$$F(x) = \left(1 - \left(\frac{1000}{1000 + x}\right)^4\right) \mathbb{I}_{\{x \geqslant 0\}},$$

o žalų skaičius laiko intervale $[0, t]$ pasiskirstęs pagal homogeninį Puasono procesą su intensyvumu $\lambda = 3$, jeigu laikas t matuojamas dienomis. Raskite žalų pasirodančių per savaitę sumos $S(7)$ vidurkį ir dispersiją.

6. Atsitiktinė žala klasikiniame dinaminiame rizikos modelyje pasiskirsčiusi pagal gama dėsnį su pasiskirstymo funkcija

$$F(x) = \left(1 - e^{-0.002x}(1 + 0.002x)\right) \mathbb{I}_{\{x \geqslant 0\}},$$

o žalų skaičius laiko intervale $[0, t]$ pasiskirstęs pagal homogeninį Puasono procesą su intensyvumu $\lambda = 4$, jeigu laikas t matuojamas dienomis. Raskite žalų pasirodančių per penkias darbo dienas sumos $S(5)$ vidurkį ir dispersiją.

7. Atsitiktinė žala klasikiniame dinaminiame rizikos modelyje pasiskirsčiusi pagal gama dėsnį su pasiskirstymo funkcija

$$F(x) = \left(1 - e^{-0.001x}(1 + 0.001x)\right) \mathbb{I}_{\{x \geqslant 0\}},$$

o žalų skaičius laiko intervale $[0, t]$ pasiskirstęs pagal homogeninį Puasono procesą su intensyvumu $\lambda = 3$. Kokiam pemijų surinkimo greičiui c klasikinis dinaminis rizikos modelis tenkina grynojo pelno sąlygą.

8. Atsitiktinė žala klasikiniame dinaminiame rizikos modelyje pasiskirsčiusi pagal modifikuotą eksponentinį dėsnį su pasiskirstymo funkcija

$$F(x) = \left(1 - 0.3e^{-0.01x}\right) \mathbb{I}_{\{x \geqslant 0\}},$$

žalų skaičius laiko intervale $[0, t]$ pasiskirstęs pagal homogeninį Puasono procesą su intensyvumu $\lambda = 10$, o premijų surinkimo greitis $c = 400$. Įsitikinkite, kad aprašytas modelis turi pusiausvyros koeficientą. Raskite šį pusiausvyros koeficientą.

9. Atsitiktinė žala klasikiniame dinaminiame rizikos modelyje pasiskirsčiusi pagal modifikuotą eksponentinį dėsnį su pasiskirstymo funkcija

$$F(x) = \left(1 - 0.3e^{-0.001x}\right) \mathbb{I}_{\{x \geqslant 0\}},$$

žalų skaičius laiko intervale $[0, t]$ pasiskirstęs pagal homogeninį Puasono procesą su intensyvumu $\lambda = 5$, o premijų surinkimo greitis $c = 1600$. Įsitikinkite, kad aprašytas modelis turi pusiausvyros koeficientą. Raskite šį pusiausvyros koeficientą. Pagal Lundbergo nelygybę įvertinkite bankroto tikimybę $\psi(10000)$.

10. Atsitiktinė žala klasikiniame dinaminiame rizikos modelyje pasiskirsčiusi pagal eksponentinių dėsnių mišinį su pasiskirstymo funkcija

$$F(x) = \left(0.3\left(1 - e^{-0.001x}\right) + 0.7\left(1 - e^{-0.01x}\right)\right)\mathbb{I}_{\{x\geqslant 0\}},$$

žalų skaičius laiko intervale $[0, t]$ pasiskirstęs pagal homogeninį Puasono procesą su intensyvumu $\lambda = 4$, o premijų surinkimo greitis $c = 1500$. Įsitikinkite, kad aprašytas modelis turi pusiausvyros koeficientą. Raskite šį pusiausvyros koeficientą. Įvertinkite bankroto tikimybę $\psi(1000)$. Užrašykite aprašyto modelio bankroto tikimybės asimptotinę formulę.

11. Raskite gama dėsnio pasiskirstymo funkcijos

$$F(x) = \left(1 - e^{-2x}(1 + 2x)\right)\mathbb{I}_{\{x\geqslant 0\}}$$

Laplace-Stieltjes transformaciją.

12. Diskretus atsitiktinis dydis ξ pasiskirstęs pagal geometrinį dėsnį

$$\mathbb{P}(\xi = k) = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^k, \ k = 0, 1, 2, ...$$

Raskite šio atsitiktinio dydžio Laplace-Stieltjes transformaciją.

13. Atsitiktinė žala klasikiniame dinaminiame rizikos modelyje pasiskirsčiusi pagal gama dėsnį su pasiskirstymo funkcija

$$F(x) = \left(1 - e^{-0.01x}(1 + 0.01x)\right)\mathbb{I}_{\{x\geqslant 0\}},$$

žalų skaičius laiko intervale $[0, t]$ pasiskirstęs pagal homogeninį Puasono procesą su intensyvumu $\lambda = 10$, o premijų surinkimo greitis $c = 2100$. Raskite bankroto tikimybės išraišką aprašytame modelyje.

14. Atsitiktinė žala klasikiniame dinaminiame rizikos modelyje pasiskirsčiusi pagal eksponentinių dėsnių mišinį su pasiskirstymo funkcija

$$F(x) = \left(0.3\left(1 - e^{-0.001x}\right) + 0.7\left(1 - e^{-0.002x}\right)\right)\mathbb{I}_{\{x\geqslant 0\}},$$

žalų skaičius laiko intervale $[0, t]$ pasiskirstęs pagal homogeninį Puasono procesą su intensyvumu $\lambda = 3$, o premijų surinkimo greitis $c = 2000$. Raskite bankroto tikimybės išraišką aprašytame modelyje.

15. Parodykite, kad pasiskirstymo funkcija

$$F(x) = \left(1 - \frac{\log(e + x)}{(1 + x)^3}\right)\mathbb{I}_{\{x\geqslant 0\}}$$

yra subeksponentinė.

16. Parodykite, kad pasiskirstymo funkcija

$$F(x) = \left(1 - e^{-\log^3(1+x)}\right)\mathbb{I}_{\{x \geqslant 0\}}$$

yra subeksponentinė.

17. Atsitiktinė žala klasikiniame dinaminiame rizikos modelyje pasiskirsčiusi pagal Weibul dėsnį su pasiskirstymo funkcija

$$F(x) = \left(1 - e^{-0.001\sqrt{x}}\right)\mathbb{I}_{\{x \geqslant 0\}},$$

žalų skaičius laiko intervale $[0, t]$ pasiskirstęs pagal homogeninį Puasono procesą su intensyvumu $\lambda = 2$, o premijų surinkimo greitis $c = 2000$. Užrašykite bankroto tikimybės asimptotinę formulę aprašytame modelyje.

18. Atsitiktinė žala klasikiniame dinaminiame rizikos modelyje pasiskirsčiusi pagal Pareto dėsnį su pasiskirstymo funkcija

$$F(x) = \left(1 - \left(\frac{1000}{1000 + x}\right)^3\right)\mathbb{I}_{\{x \geqslant 0\}},$$

žalų skaičius laiko intervale $[0, t]$ pasiskirstęs pagal homogeninį Puasono procesą su intensyvumu $\lambda = 3$, o premijų surinkimo greitis $c = 1600$. Užrašykite bankroto tikimybės asimptotinę formulę aprašytame modelyje.