Atsitiktinių procesų teorijos įvadas

Alfredas Račkauskas
Matematikos ir Informatikos fakultetas
Ekonometrinės analizės katedra

Vilnius, 2008

Turinys

1 Įvadas

Su neapibrėžtumais susiduriame nuolatos. Koks bus rytoj oras? Kaip pasikeis JAV dolerio kursas Euro atžvilgiu? Kiek kitą mėnesį išleisime maistui? Tokie ir panašūs klausimai domina kiekvieną. Aišku, kad tikslaus atsakymo į juos negali pasakyti niekas. O kokio atsakymo tikimės? Čia į pagalbą galime pasitelkti tikimybių teoriją, kuri tiria neapibrėžtumus, jų pobūdį, dėsningumus ir gali pasiūlyti įvairių modelių. Atsitiktiniais procesais paprastai aprašomi neapibrėžtumai kintantys laike. Jų teorija yra labai turininga ir gerai išvystyta. Aišku, šių paskaitų ciklo jokiu būdu nepakaks visos atsitiktinių procesų teorijos netgi apžvalgai. Todėl apsiribosime tik pačiais paprasčiausiais, bet svarbiais modeliais bei jų taikymais.

$\diamondsuit \quad \diamondsuit \quad \diamondsuit$

2 Tikimybinė erdvė

2.1 Apibrėžimai

Įprasta, kad pradedant kalbą apie neapibrėžtumus ir jų tyrimą, pradedama *magiškuoju trejetu* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, kuris tikimybių teorijoje vadinamas *tikimybine erdve.*

- Aibė Ω aprašo elementariuosius įvykius (ne tik kai kalbama apie eksperimentus); jos elementus įprasta žymėti ω ir vadinami elementariaisiais įvykiais.

Pavyzdžiui, metant monetą, tik du elementarieji įvykiai yra įdomūs, todėl $\Omega = \{herbas, pinigas\}$. O metant lošimo kauliuką, elementariųjų įvykių aibė yra $\Omega = \{1, 2, \dots, 6\}$.

- $\mathcal{F}$ yra aibės Ω poaibių σ algebra. Tai yra tokia aibės Ω poaibių šeima, kad
  - $\emptyset \in \mathcal{F}, \Omega \in \mathcal{F}$;
  - jei $A \in \mathcal{F}$, tai ir papildinys $A^c = \Omega \backslash A \in \mathcal{F}$;
  - jei $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$, tai ir $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$.

  Šeimos $\mathcal{F}$ elementai dažnai vadinami įvykiais.

2.1 apibrėžimas. *Tegu $\mathcal{A}$ yra bet kuri aibės Ω poaibių šeima. Jos generuota σ algebra $\sigma(\mathcal{A})$ yra*

$$\sigma(\mathcal{A}) = \bigcap \Big\{ \mathcal{G} : \mathcal{G} \ \text{ yra } \ \sigma \text{ algebra}, \ \ \mathcal{A} \subset \mathcal{G} \Big\}.$$

Galima įsitikinti, kad $\sigma(\mathcal{A})$ yra mažiausia σ algebra, kuriai priklauso šeima $\mathcal{A}$ (žr. 2.1 pratimą).

2.1 pavyzdys. Mažiausia galima aibės Ω poaibių σ algebra yra $\mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega\}$.

2.2 pavyzdys. Jei A yra aibės Ω poaibis, tai $\sigma(\{A\}) = \{\emptyset, \Omega, A, A^c\}$.

2.3 pavyzdys. Aibės Ω visų galimų poaibių šeima dažnai žymima 2^Ω. Akivaizdu, kad 2^Ω yra σ algebra.

Tais atvejais, kai aibė Ω yra baigtinė, įvykiu vadianame bet kurį jos poaibį, t.y. σ algebrą $\mathcal{F}$ tuomet sudaro visi galimi Ω poaibiai: $\mathcal{F} = 2^\Omega$.

Realiųjų skaičių aibės $\mathbb{R}$ poaibių šeima

$$\mathcal{A} = \big\{[a,b), (-\infty, b), [a, \infty), (-\infty, \infty) : \quad a, b \in \mathbb{R}\big\}$$

generuoja vadinamąją Borelio σ algebr1, kuri žymima $\mathcal{B}_\mathbb{R}$. Aibės $A \in \mathcal{B}_\mathbb{R}$ vadinamos Borelio aibėmis.

- P yra tikimybinis matas, apibrėžtas įvykiams $A \in \mathcal{F}$. Tai yra, P kiekvienam $A \in \mathcal{F}$ taip priskiria skaičių $P(A) \in [0, 1]$, kad yra teisingos šios aksiomos:
  - $P(\Omega) = 1$;
  - jei $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$ ir $A_i \cap A_j = \emptyset$, kai $i \neq j$, tai
  $$P\Big(\bigcup_{i=1}^\infty A_i\Big) = \sum_{i=1}^\infty P(A_i).$$

  Skaičių $P(A)$ vadiname įvykio A tikimybe (įvykio A pasirodymo galimybės skaitine išraiška).

2.2 apibrėžimas. *Tikimybinė erdvė $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ vadinama pilna, jei σ algebrai $\mathcal{F}$ priklauso kiekviena aibė N, kuri yra nulinės tikimybės įvykio poaibiu, t.y. egzistuoja $A \supset N$, kad $A \in \mathcal{F}$ ir $P(A) = 0$.*

Ateityje (be papildomo priminimo) visos nagrinėjamos tikimybinės erdvės laikomos pilnomis.

Įvykiai $A_1, \dots, A_n$ vadinami:

- poromis nepriklausomi, jei
$$P(A_j \cap A_k) = P(A_j)P(A_k), \quad \text{kai} \quad k \neq j;$$
- nepriklausomi, jei su bet kuriais $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$,
$$P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \cdots P(A_{i_k}),$$

Begalinis rinkinys įvykių yra nepriklausomi, jei bet kuris baigtinis jų porinkinis yra nepriklausomi.

Dvi aibės Ω poaibių σ algebros $\mathcal{F}_1$ ir $\mathcal{F}_2$ vadinamos nepriklausomomis, jei

$$P(A \cap B) = P(A)P(B),$$

kai $A \in \mathcal{F}_1, B \in \mathcal{F}_2$.

Tarkime, yra žinoma, kad įvykis $A \in \mathcal{F}$, kuriam $P(A) > 0$, įvyko. Tuomet elementariųjų įvykių aibę Ω galime susiaurinti iki A ir bet kurio kito įvykio $B \in \mathcal{F}$ tikimybę skaičiuoti atsižvelgdami į tai, kad įvykis A jau įvyko. Tai vadinamoji sąlyginė tikimybė, su sąlyga, kad įvyko įvykis A:

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$$

Iš apibrėžimo gauname šią sandaugos taisyklę:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A)$$

Tarkime, įvykiai $A_1, \dots, A_n$ yra poromis nesutaikomi (t.y. $A_i \cap A_j = \emptyset$, kai $i \neq j$) ir $A_1 \cup \dots \cup A_n = \Omega$. Tuomet

$$P(B) = \sum_{j=1}^{n} P(B \cup A_j) = \sum_{j=1}^{n} P(A_j)P(B|A_j).$$

Tai yra taip vadinama *pilnosios tikimybės formulė*. Iš jos išvedama Bajeso formulė:

$$P(A_j|B) = \frac{P(A_j)P(B|A_j)}{\sum_{j=1}^{n} P(A_i)P(B|A_i)},$$

visiems $j = 1, \dots, n$.

2.2 Pratimai

2.1 pratimas. Įrodykite, kad $\sigma(\mathcal{A})$ (žr. 2.1 apibrėžimą) yra mažiausia σ algebra, kuriai priklauso $\mathcal{A}$.

2.2 pratimas. Įsitikinkite, kad $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} = \sigma(\mathcal{A})$, kai

(a) $\mathcal{A} = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$;

(b) $\mathcal{A} = \{(-\infty, a] : a \in \mathbb{R}\}$.

2.3 pratimas. Tarkime, $\{A_i, i \in I\}$ yra kurios nors aibės poaibių šeima. Įrodykite de Morgano tapatybes:

(a) $\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)^c = \bigcap_{i\in I} A_i^c$,

(b) $\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)^c = \bigcup_{i\in I} A_i^c$.

2.4 pratimas. Tegu $\mathcal{F}$ yra aibės Ω poaibių σ algebra, $B \subset \Omega$. Įsitikinkite, kad rinkinys $\mathcal{G} = \{A \cap B : A \in \mathcal{F}\}$ yra aibės B poaibių σ algebra.

Tegu $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ yra tikimybinė erdvė. Seka $(A_n) \subset \mathcal{F}$ yra

- monotoniškai didėjanti, jei $A_n \subseteq A_{n+1}$ su visais $n \geq 1$;
- monotoniškai mažėjanti, jei $A_n \supseteq A_{n+1}$ su visais $n \geq 1$.

Aibei

$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{i=1}^{\infty} \bigcup_{n=i}^{\infty} A_n$$

priklauso tik tie $\omega \in \Omega$, kurie priklauso begalo daugeliui A_n. Aibei

$$\liminf_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcap_{n=i}^{\infty} A_n$$

priklauso tik tie $\omega \in \Omega$, kurie priklauso visoms aibėms A_n išskyrus galbūt baigtinį jų skaičių. Jei $\liminf_{n\to\infty} A_n = \limsup_{n\to\infty} A_n$ tai tą aibę žymime $\lim_{n\to\infty} A_n$.

2.5 pratimas. Koks ryšys tarp lim sup ir lim inf apibrėžimų skaičių sekai (x_n) ir aibių sekai (A_n)?

2.6 pratimas. Apibrėžkime

$$A_n = \begin{cases} (-1/n, 1], & \text{kai } n \text{ nelyginis} \\ (-1, 1/n], & \text{kai } n \text{ lyginis.} \end{cases}$$

Raskit $\liminf_{n\to\infty} A_n$ ir $\limsup_{n\to\infty} A_n$.

2.7 pratimas. Tegu $(A_n, n \in \mathbb{N})$ yra aibių seka. Įrodykite šiuos teiginius:

(a) $\liminf_{n\to\infty} A_n = \limsup_{n\to\infty} A_n$ tada ir tik tada, kai su kiekvienu $\omega \in \Omega$ egzistuoja riba $\lim_{n\to\infty} \mathbf{1}_{A_n}(\omega)$.

(b) Jei seka (A_n) monotoniškai didėjanti, tai $\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$.

(c) Jei seka (A_n) monotoniškai mažėjanti, tai $\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$.

2.8 pratimas. Tegu funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Bet kuriai aibei $A \subset \mathbb{R}$,

$$f^{-1}(A) := \{x \in \mathbb{R} : f(x) \in A\}.$$

Įrodykite šiuos teiginius:

(a) $f^{-1}(\mathbb{R} \setminus A) = \mathbb{R} \setminus f^{-1}(A)$;

(b) bet kuriam aibių rinkiniui $\{A_i, i \in I\}$

$$f^{-1}\Big(\bigcup_{i\in I} A_i\Big) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(A_i)$$

ir

$$f^{-1}\Big(\bigcap_{i\in I} A_i\Big) = \bigcap_{i\in I} f^{-1}(A_i).$$

2.9 pratimas. Tarkime, įvykių A ir B tikimybės atitinkamai lygios $P(A) = 3/4$, $P(B) = 1/3$. Įrodykite, kad

$$\frac{1}{12} \le P(A \cap B) \le \frac{1}{3}.$$

Raskite pavyzdžius, parodančius ekstreminių reikšmių galimybes. Analogiškas ribas nustatykite ir tikimybei $P(A \cup B)$.

2.10 pratimas. Tegu $A_i, i \ge 1$ yra tokie įvykiai, kad $P(A_i) = 1$ su visais $i \ge 1$. Parodykite, kad $P(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = 1$.

2.11 pratimas. Tarkime, įvykiai A ir B yra nepriklausomi. Įsitikinkite, kad įvykiai A^c ir B taip pat nepriklausomi ir išveskite įvykių A^c ir B^c nepriklausomumą.

2.12 pratimas. Įrodykite Bonferroni nelygybę:

$$P\Big(\bigcup_{k=1}^{n}\Big) \ge \sum_{k=1}^{n} P(A_k) - \sum_{j<k} P(A_j \cap A_k).$$

2.13 pratimas. Išveskite Kounias'o nelygybę:

$$P\Big(\bigcup_{k=1}^{n}\Big) \le \min_j \Big\{ \sum_{k=1}^{n} P(A_k) - \sum_{k:k\neq j} P(A_j \cap A_k).$$

3 *Atsitiktiniai dydžiai*

3.1 *Apibrėžimai*

Labai dažnai eksperimento rezultatus galime aprašyti realiaisiais skaičiais, kurių reikšmės nėra žinomos, kol neatliktas eksperimentas. Tokiu atveju sakoma, kad eksperimento rezultatai yra *atsitiktiniai*. Jiems aprašyti naudojame atsitiktinius dydžius.

Matematine-tikimybine kalba, *atsitiktinis dydis*, apibrėžtas tikimybinėje erdvėje $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, yra $\mathcal{F}/\mathcal{B}_\mathbb{R}$ matus atvaizdis $X : \Omega \to \mathbb{R}$, t.y., tokia funkcija

$$X : \Omega \to \mathbb{R},$$

kad

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A\} \in \mathcal{F} \tag{3.1}$$

su kiekviena Borelio aibe $A \subset \mathbb{R}$ ($A \in \mathcal{B}_\mathbb{R}$).

Kadangi Borelio σ algebrą generuoja intervalai, pakanka, kad (3.1) savybė būtų teisinga šio pavidalo

$$[a, b), (-\infty, b), [a, \infty), (-\infty, \infty), \quad a, b \in \mathbb{R} \tag{3.2}$$

aibėms $A \subset \mathbb{R}$. Taigi tie elementarieji įvykiai $\omega \in \Omega$, dėl kurių atsitiktinio dydžio X reikšmės yra, tarkime, intervale $[a, b]$, visados yra įvykis, t.y.

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in [a, b)\} \in \mathcal{F}.$$

Todėl galime sužinoti to įvykio tikimybę $p = P(X \in [a, b))$.

3.1 teiginys. *Jei X yra atsitiktinis dydis ir $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ yra Borelio funkcija, t.y.,*

$$g^{-1}(A) := \{x \in \mathbb{R} : g(x) \in A\} \in \mathcal{B}_\mathbb{R},$$

su kiekviena aibe $A \in \mathcal{B}_\mathbb{R}$, tai $g(X)$ yra atsitiktinis dydis.

Tolydžios funkcijos ir funkcijos turinčios ne daugiau nei skaičią trūkio taškų aibę yra Borelio. Taigi jei X yra atsitiktinis dydis, tai X^2, $\cos(X)$, $1/X$, $\mathbf{1}_{\{X \le t\}}$ yra atsitiktiniai dydžiai.

Du atsitiktiniai dydžiai X_1 ir X_2 vadinami ekvivalenčiais (žymėsime $X_1 \overset{\text{b.t.}}{=} X_2$), jei

$$P(\omega : X_1(\omega) \ne X_2(\omega)) = 0.$$

Atsitiktinis dydis X apibrėžia σ algebrą $\mathcal{F}_X := \{X^{-1}(B) : B \in \mathcal{B}_\mathbb{R}\} \subset \mathcal{F}$, kuri vadinama atsitiktinio dydžio X generuota σ algebra.

Atsitiktinis dydis X Borelio σ algebroje $\mathcal{B}_\mathbb{R}$ apibrėžia tikimybinį matą P_X:

$$P_X(A) = P(\{\omega : X(\omega) \in B\}).$$

Tikimybinis matas P_X vadinamas atsitiktinio dydžio X skirstiniu. Taigi atsitiktinis dydis tikimybinę erdvę $(\Omega, \mathcal{F}.P)$ pakeičia kita tikimybine erdve $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, P_X)$ arba $(\mathbb{R}, \mathcal{F}_{\mathbb{R}}, P_X)$.

3.2 Pasiskirstymo funkcija ir kitos charakteristikos

Atsitiktinio dydžio aprašymui naudojamos įvairios neatsitiktinės charakteristikos. Svarbiausioji yra pasiskirstymo funkcija. Atsitiktinio dydžio X pasiskirstymo funkcija yra

$$F_X(x) = P(\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Priminsime pasiskirstymo funkcijų charakterizaciją.

3.2 teiginys. *Pasiskirstymo funkcija F pasižymi šiomis savybėmis:*

(i) $\lim_{x\to+\infty} F_X(x) = 1, \quad \lim_{x\to-\infty} F_X(x) = 0,$

(ii) F yra nemažėjanti: jei $x < y$ tai $F(x) \leq F(y)$,

(iii) F yra tolydi iš dešinės: $F(x+h) \to F(x)$, jei $h \downarrow 0$.

Be to, kiekviena nemažėjanti tolydi iš kairės ir tenkinanti a) *sąlygą funkcija $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ yra kurio nors atsitiktinio dydžio X pasiskirstymo funkcija, t.y. $F = F_X$.*

Atsitiktiniai dydžiai X_1, X_2 yra vienodai pasiskirstę (žymėsime $X_1 \overset{\mathcal{D}}{=} X_2$), jei jų pasiskirstymo funkcijos sutampa, t.y.

$$P(\omega : X_1(\omega) \leq x) = P(\omega : X_2(\omega) \leq x)$$

su visais $x \in \mathbb{R}$.

Ekonometrija bei finansų matematika paprastai nagrinėja tik diskrečiuosius ir tolydžiuosius atsitiktinius dydžius. Diskretūs – įgyjantys tik baigtinį arba suskaičiuojamą skaičių reikšmių. Jie pilnai aprašomi įgyjamomis reikšmėmis ir atitinkamomis tų reikšmių įgyjimo tikimybėmis. Diskretaus atsitiktinio dydžio X įgyjamas reikšmes žymėsime $x_1, x_2, \ldots$, o atitinkamas tikimybes $p_1, p_2, \ldots$,

$$p_k = p_X(x_k) = P(\omega : X(\omega) = x_k), \quad k = 1, 2, \ldots$$

Skaičių rinkinys $(p_X(x_k))$ $((p_k))$ vadinamas diskrečiojo atsitiktinio dydžio X *reikšmių tikimybių funkcija.* Ji pasižymi šiomis savybėmis:

(i) $0 \leq p_X(x_k) \leq 1$ su visais k

(ii) $p_X(x) = 0$, jei $x \neq x_k$;

(iii) $\sum_k p_X(x_k) = 1$.

Jei X yra diskretus atsitiktinis dydis su reikšmėmis $x_1, x_2, \dots$ ir

$$P(X = x_k) = p_k, \quad k = 1, 2, \dots$$

tai jo pasiskirstymo funkcija yra

$$F(x) = \sum_{k:\ x_k \leq x} p_k,$$

$x \in \mathbb{R}$. Atsitiktinį dydį X su pasiskirstymo funkcija F_X vadiname tolydžiuoju, jei egzistuoja tokia neneigiama Borelio funkcija $f_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, kad

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t) dt,$$

$x \in \mathbb{R}$. Tolydžiam atsitiktiniam dydžiui X,

$$P(\omega : X(\omega) = x) = 0.$$

Funkcija f_X vadinama tankio funkcija (tankiu). Ji pasižymi šiomis savybėmis:

(i) $f_X(x) \geq 0$, $x \in R$;

(ii) $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = 1$;

(iii) f_X yra atkarpomis tolydi funkcija

(iv) $P(\omega : a < X(\omega) \leq b) = \int_a^b f_X(x) dx$.

Atsitiktinio dydžio X vidurkis (tikėtina reikšmė arba tipinė reikšmė) yra X integralas atžvilgiu tikimybinio mato P:

$$E(X) = \int_\Omega X dP.$$

Priminsime šio integralo apibrėžimą. Pirmiausia jis apibrėžimas atskiru atveju, kai X yra diskretusis atsitiktinis dydis su reikšmėmis $a_1, a_2, \dots$ ir $A_j = \{\omega : X(\omega) = a_j\}$, $j = 1, 2, \dots$. Tuomet

$$\int_\Omega X dP = a_1 P(A_1) + a_2 P(A_2) + \cdots .$$

Taigi $E(\mathbf{1}_A) = P(A)$. Todėl vidurkis yra tam tikra prasme bendresnė sąvoka už tikimybę.

Jei X yra neneigiamas a.d. tuomet egzistuoja tokia diskrečiųjų a.d. seka $X_1, X_2, \dots$, kad

$$X_1(\omega) \leq X_2(\omega) \leq \cdots$$

ir, be to,

$$\lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)$$

su visais $\omega \in \Omega$. Tuomet apibrėžiame

$$\int_\Omega X dP = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega X_n dP \leq \infty.$$

Riba visada egzistuoja, nes seka $(\int_\Omega X_n dP, n \geq 1)$ yra nemažėjanti. Jei X yra bet kuris atsitiktinis dydis, tuomet apibrėžiame

$$E(X) = E(X^+) - E(X^-),$$

čia $X^+ = \max\{X, 0\}, X^- = \min\{X, 0\}$, jei tik abu vidurkiai EX^+ ir EX^- yra baigtiniai. Tai ekvivalentu tam, kad $E|X| < \infty$. Šiuo atveju sakome, kad a.d. X yra integruojamas.

3.3 teiginys. *Neneigiamo tolydžiojo atsitiktinio dydžio vidurkis yra*

$$E(X) = \int_0^\infty P(\omega : X(\omega) > x)dx.$$

Įrodymas. Šią formulę nesunkiai išvedame pritaikę integravimo tvarkos sukeitimą:

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_\Omega X dP = \int_\Omega \Big(\int_0^\infty \mathbf{1}_{X>t} dt \Big) dP \\ &= \int_0^\infty P(X > t)dt. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Diskretaus neneigiamo sveikareikšmio a.d. vidurkiui skaičiuoti galima naudotis tokia formule.

3.4 teiginys. *Jei X yra neneigiamas sveikareikšmis atsitiktinis dydis, tai*

$$EX = \sum_{k=0}^\infty P(X > k). \tag{3.3}$$

Įrodymas. Įrodymui reikia pritaikyti sumavimo sukeitimą:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^\infty P(X > k) &= \sum_{k=0}^\infty \sum_{j=k+1}^\infty p_j = \sum_{j=1}^\infty \Big(\sum_{k=0}^{j-1} \Big) p_j \\ &= \sum_{j=1}^\infty j p_j = EX. \ \blacksquare \end{aligned}$$

Atsitiktinio dydžio vidurkį galima išreikšti ir integralu atžvilgiu a.d. pasiskirstymo funkcijos:

$$E(X) = \int_0^\infty x dF_X(x).$$

Čia integralą reikia suprasti Rymano-Stiltjeso prasme. Jei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ yra Borelio funkcija ir $E|g(X)| < \infty$, tuomet

$$E(g(X)) = \int_\Omega g(X(\omega))dP(\omega) = \int_\mathbb{R} g(x)dF_X(x).$$

Atskiru atveju, jei X yra tolydusis a.d. su tankio funkcija f_X, tai

$$\int_\mathbb{R} g(x)dP_X(x) = \int_{-\infty}^\infty g(x)f_X(x)dx.$$

Jei X yra diskretusis a.d. su tikimybių funkcija (p_k) tuomet

$$\int_\mathbb{R} g(x)dF_X(x) = \sum_k g(x_k)p_k.$$

Priminsime kitas svarbiausias diskrečiųjų bei tolydžiųjų atsitiktinių dydžių charakteristikas.

- *n-tosios eilės momentas*:

$$E(X^n) = \begin{cases} \int_{-\infty}^\infty x^k f_X(x)dx, & \text{kai } X \text{ tolydus a.d.} \\ \sum_k x_k^n p_X(x_k), & \text{kai } X \text{ diskretus a.d.} \end{cases}$$

- *dispersija*

$$\sigma_X^2 = var(X) = \begin{cases} \int_{-\infty}^\infty (x - \mu_X)^2 f_X(x)dx, & \text{kai } X \text{ tolydus a.d.} \\ \sum_k (x_k - \mu_X)^2 p_X(x_k), & \text{kai } X \text{ diskretus a.d.} \end{cases}$$

- *standartinis nuokrypis* yra σ_X - kvadratinė šaknis iš dispersijos.
- *charakteristinė funkcija* yra argumento $t \in \mathbb{R}$ funkcija

$$c_X(t) = Ee^{itX} = E\cos(tX) + iE\sin(tX).$$

3.1 pavyzdys. *Bernuli atsitiktinis dydis.*

Tai pats paprasčiausias diskretus atsitiktinis dydis. Atsitiktinis dydis X turintis tik dvi galimas reikšmes 0 ir 1, vadinamas Bernulio atsitiktiniu dydžiu. Tikimybė, kad tas dydis įgis reikšmę 1 lygi p, o $P(X = 0) = 1 - p$. Bernuli atsitiktinis dydis aprašo vieno kurio nors įvykio „sėkmę" – „nesekmę". Tai gali būti, tarkime, vartotojo sprendimas pirkti kurią nors prekę; banko sprendimas apie kredito išdavimą; darbdavio sprendimas apie priėmimą į darbą ir t.t.

$$\mu_X = p, \quad \sigma_X^2 = p(1 - p).$$

3.2 pavyzdys. *Binominis atsitiktinis dydis.*

Jei atliekame n bandymų, kiekviename iš kurių įvykis pasirodo su tikimybe p ir nepasirodo su tikimybe $1-p$, tuomet įvykio pasirodymų skaičius X yra Binominis atsitiktinis dydis. Jo galimos reikšmės yra $0, 1, \dots, n$ ir

$$P(X = k) = b(k; n, p) := \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

Be to, $\mu_X = E(X) = np$, $\sigma_X^2 = var(X) = np(1-p)$.

Trumpai žymime $X \sim b(k; n, p)$.

3.3 pavyzdys. *Puasono atsitiktinis dydis.*

Puasono atsitiktinis dydis X – diskretus atsitiktinis dydis, kurio reikšmės yra $0, 1, 2, 3, \dots$ ir atitinkamos tikimybės

$$P(X = k) = p(k; \lambda) := \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

su kiekvienu $k = 0, 1, \dots$ (žymėsime $X \sim p(k; \lambda)$). Čia $\lambda > 0$ yra puasono parametras, dar vadinamas intensyvumu.

Tai labai plačiai naudojamas atsitiktinis dydis, dažniausiai aprašantis kokių nors įvykių pasirodymo skaičių vienetinio ilgio laiko intervale, kai vidutinis tų įvykių pasirodymas per vienetino ilgio laiko intervalą yra λ. Pavyzdžiui, skambučių skaičius per tam tikrą laiką (valandą, dieną ir t.t.); fiksuotame laiko intervale kreditinių kortelių panaudojimo bankomate skaičius; per tam tikrą laiko intervalą (per dieną, valandą ar pan.) užeinančių į parduotuvę pirkėjų skaičius.

Tegu X yra Puasono atsitiktinis dydis su parametru $\lambda > 0$. Tuomet

$$\begin{aligned} EX =& \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \\ =& \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda} = \lambda. \end{aligned}$$

Norėdami suskaičiuoti dispersiją, pirmiausia suskaičiuojame

$$EX(X-1) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \lambda^2.$$

Kadangi $EX^2 = EX(X-1) + EX = \lambda^2 + \lambda$, todėl dispersija yra

$$var(X) = EX^2 - (EX)^2 = \lambda.$$

3.4 pavyzdys. *Geometrinis atsitiktinis dydis.*

Bandymą, kuriame įvykis pasirodo su tikimybe p tol kartojame, kol įvykis pasirodo. Reikalingų tam bandymų skaičius X ir turi geometrinį skirstinį. Be to,

$$P(X = n) = (1-p)^n p, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Žymėsime $X \sim g(n; p)$.

Pažymėję $q = 1 - p$, suskaičiuojame

$$\begin{aligned} EX &= \sum_{k=0}^{\infty} kq^k p = p \sum_{k=0}^{\infty} kq^k = p \sum_{k=0}^{\infty} \Big(\sum_{j=1}^{k} 1 \Big) q^k \\ &= p \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=j}^{\infty} q^j = p \sum_{j=1}^{\infty} q^j (1-q)^{-1} \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} q^j = \frac{q}{p}. \end{aligned}$$

3.5 pavyzdys. *Tolygusis a.d.* Atsitiktinis dydis X vadinamas tolygiuoju intervale (a, b), jei jo tankio funkcija yra

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & \text{kai } a < x < b \\ 0 & \text{kitur} \end{cases}$$

pasiskirstymo funkcija yra

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{kai } x \le a \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & \text{kai } a < x < b; \\ 1 & \text{kai } x \ge b. \end{cases}$$

Vidurkis:

$$\mu_X = E(X) = \frac{a+b}{2},$$

dispersija

$$\sigma_X^2 = var(X) = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

3.6 pavyzdys. *Eksponentinis a.d.* Atsitiktinis dydis X vadinamas eksponentiniu su parametru λ ($\lambda > 0$), jei jo tankio funkcija yra

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & \text{kai } x > 0 \\ 0 & \text{kitur} \end{cases}$$

pasiskirstymo funkcija yra

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & \text{kai } x \ge 0; \\ 0 & \text{kai } x < 0. \end{cases}$$

Žymėsime $X \sim \exp\{\lambda\}$. Pagrindinės charakteristikos yra šios. Vidurkis:

$$\mu_X = E(X) = \frac{1}{\lambda},$$

dispersija

$$\sigma_X^2 = var(X) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

3.7 pavyzdys. *Normalusis a.d.* Atsitiktinis dydis X vadinamas normaliuoju su parametrais (μ, σ^2), jei jo tankio funkcija yra

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\Big\{ -\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2} \Big\}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Trumpai žymėsime $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

3.3 Atsitiktiniai vektoriai

Jei $X_1, \dots, X_d$ – atsitiktiniai dydžiai, apibrėžti vienoje tikimybinėje erdvėje, tai $X = (X_1, \dots, X_d)$ – atsitiktinis vektorius.

Erdvės $\mathbb{R}^d$ Borelio σ algebra $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^d}$ yra mažiausia σ algebra, kuriai priklauso aibės

$$A_1 \times \cdots \times A_d, \quad A_1, \dots, A_d \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}.$$

3.5 teiginys. *Jei funkcija $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m$ yra Borelio, t.y.*

$$g^{-1}(A) \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^d}$$

su kiekviena aibe $A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^m}$, tai $g(X_1, \dots, X_d)$ yra m-matis atsitiktinis vektorius.

Tolydi funkcija arba funkcija turinti ne daugiau nei skaičią trūkių taškų aibę yra Borelio. Pavyzdžiui, jei X_1, X_2 yra atsitiktiniai dydžiai, tai $X_1 + X_2$, X_1X_2, X_1/X_2 yra a.d.

Atsitiktinio vektoriaus X pasiskirstymo funkcija vadiname funkciją

$$F_X(x_1, \dots, x_d) = P(\omega : X_1(\omega) \le x_1, \dots, X_d \le x_d), \quad x = (x_1, \dots, x_d) \in R^d.$$

Atsitiktinio vektoriaus $X = (X_1, \dots, X_d)$, kurio pasiskirstymo funkcija yra $F_X(x_1, \dots, x_d)$ komponentės X_k *marginalinė pasiskirstymo funkcija* yra

$$F_k(x_k) = F_X(+\infty, \cdots, +\infty, x_k, +\infty, \dots, +\infty), \quad x_k \in \mathbb{R}.$$

Bet kuri d-mačio atsitiktinio vektoriaus pasiskirstymo funkcija F tenkina šias savybes.

(i) kiekvienam k, $1 \le k \le d$, $F(x_1, \dots, x_d) \to 0$, kai $x_k \to -\infty$;

(ii) $F(x_1, \dots, x_d) \to 1$, kai $x_1 \to \infty, \dots, x_d \to \infty$;

(iii) F yra tolydi iš dešinės kiekvieno argumento atžvilgiu;

(iv) su bet kuriais $a_i < b_i, i = 1, \dots, d$,

$$\sum_{\varepsilon_1, \dots \varepsilon_d = \pm 1} (-1)^{\varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_d} F(\varepsilon_1 a_1 + (1-\varepsilon_1) b_1, \dots, \varepsilon_d a_d + (1-\varepsilon_d) b_d) \ge 0.$$

Ir atvirkščiai, jei d kintamųjų funkcijai $F(x_1, \dots, x_d)$ yra teisingos (i)-(iv) savybės, tai ji yra kurio nors atsitiktinio vektoriaus pasiskirstymo funkcija.

Atsitiktiniai vektoriai $X_1 = (X_{11}, \dots, X_{1d}), X_2 = (X_{21}, \dots, X_{2d})$ yra vienodai pasiskirstę (žymėsime $X_1 \overset{\mathcal{D}}{=} X_2$), jei jų pasiskirstymo funkcijos sutampa, t.y.

$$P(\omega : X_{11}(\omega) \le x_1, \dots, X_{1d}(\omega) \le x_d) = P(\omega : X_{21}(\omega) \le x_1, \dots, X_{2d} \le x_d)$$

su visais $(x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$.

Sakysime, kad atsitiktinis vektorius $X \in \mathbb{R}^d$ turi tankio funkciją f_X jei $f_X : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ yra neneigiama Borelio funkcija ir tokia, kad

$$P(a_i < X_i \le b_i, i = 1, \dots, d) = \int_{a_1}^{b_1} \cdots \int_{a_d}^{b_d} f_X(x_1, \dots, x_d) dx_1 \cdots dx_d,$$

su visais $a_i < b_i, i = 1, \dots, d$.

Atsitiktinio vektoriaus $X = (X_1, \dots, X_d)$ vidurkis yra vektorius

$$E(X) = (E(X_1), \dots, E(X_d)).$$

Atsitiktinio vektoriaus $X = (X_1, \dots, X_d)$ kovariacinė matrica yra matrica

$$\Gamma_X = (cov(X_i, X_j))_{1 \le i,j \le d};$$

čia

$$cov(X_i, X_j) = E(X_i X_j) - E(X_i)E(X_j), \quad i, j = 1, \dots, d.$$

Ji yra simetrinė ir neneigiamai apibrėžta, t.y.,

$$\sum_{i,j=1}^{d} \Gamma_X(i,j) a_i a_j \ge 0$$

su visais realiaisais skaičiais $a_1, \dots, a_d$. Čia $\Gamma_X(i,j) = cov(X_i, X_j), i, j = 1, \dots, d$. Tikrai,

$$\sum_{i,j=1}^{d} \Gamma_X(i,j) a_i a_j = \sum_{i,j=1}^{d} cov(X_i, X_j) a_i a_j = var\Big(\sum_{i=1}^{d} a_i X_i\Big) \ge 0.$$

Atsitiktinis vektorius $X = (X_1, \ldots, X_d)$ turi normalųjį skirstinį su parametrais m ir Γ (trumai žymėasime $X \sim \mathcal{N}(m, \Gamma)$), jei jo tankio funkcija yra

$$f_X(x_1, \ldots, x_d) = (2\pi \det \Gamma)^{-d/2} \exp\Big\{ -\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{d} (x_i - m_i)(x_j - m_j)\Gamma^{-1}(i,j) \Big\}.$$

Čia $m = (m_1, \ldots, m_d) \in \mathbb{R}^d$ yra atsitiktinio vektoriaus X vidurkio vektorius, $\Gamma = (\Gamma(i,j))$ - kovariacinė matrica, o $\Gamma^{-1} = (\Gamma^{-1}(i,j)$ - jos atvirkštinė matrica.

Jei Γ yra diagonalinė matrica, $\Gamma = diag(\sigma_1^2, \ldots, \sigma_d^2)$, tuomet atsitiktinio vektoriaus X tankio funkcija yra normaliųjų tankio funkcijų sandauga:

$$f_X(x_1, \ldots, x_d) = \prod_{i=1}^{d} \Big(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_i^2}} \exp\{-(x_i - m_i)^2/2\sigma_i^2\} \Big).$$

Jei $X \sim \mathcal{N}(m, \Gamma)$ ir A yra bet kuri $d \times d$ matrica, tai atsitiktinis vektorius AX turi normalinį skirstinį su parametrais Am ir $A\Gamma A'$ (A' žymi transponuotą matricą).

3.4 Sąlyginis vidurkis I

Įvykio $A \in \mathcal{F}$ sąlyginė tikimybė su sąlyga, kad įvyko įvykis $B \in \mathcal{F}$, apskaičiuojama pagal formulę

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Sąlyginės tikimybės interpretacija paprasta. Tarkime, kad įvykis B įvyko. Ši, papildoma informacija, leidžia pakeisti tikimybinę erdvę. Priskirkime nulinę tikimybę įvykiui B^c, o vienetą – įvykiui B. Taip įvykis B pasidaro nauja elementariųjų įvykių erdve, tarkime, Ω', o įvykiais dabar yra jos poaibiai $A \cap B \subset \Omega'$. Naujoje erdvėje apibrėžiame tikimybinį matą normalizuodami senąsias tikimybes $P(A \cap B)$ skaičiumi $P(B)$.

Jei $P(B) > 0$ ir X – atsitiktinis dydis, tai jo sąlyginė pasiskirstymo funkcija atžvilgiu B yra funkcija

$$F_X(x|B) = \frac{P(X \le x, B)}{P(B)}, \quad x \in \mathbb{R},$$

o sąlyginis vidurkis:

$$E(X|B) = \frac{1}{P(B)} EX\chi_B.$$

3.8 pavyzdys. Imkime $\Omega = (0,1]$, $X(\omega) = \omega$, o tikimybę P apibrėžkime taip, kad $P((a,b]) = b - a$. Nesunku įsitikinti, kad X turi tolygųjį pasiskirstymą ir $EX = 0.5$. Jei $A = (0, 1/4]$, tai

$$E(X|A) = \frac{1}{P(A)} EXI_A = \frac{1}{P(A)} \int_0^{1/4} x dx = \frac{1}{8}.$$

Dabar tarkime, kad Y yra diskretusis atsitiktinis dydis, apibrėžtas aibėje Ω ir įgyjantis reikšmes $y_i, i = 1, 2, \ldots$. Nemažindami bendrumo galime tarti kad tos reikšmės yra skirtingos ir

$$A_i = \{\omega : Y(\omega) = y_i\}, \quad i = 1, 2, \ldots$$

Tuomet aibių rinkinys (A_i) yra aibės Ω skaidinys:

$$A_i \cap A_j = \emptyset, \quad \text{kai} \quad i \neq j \quad \text{ir} \quad \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \Omega.$$

Be to, tarsime, kad $P(A_i) > 0$, su visais $i = 1, 2, \ldots$.

3.1 apibrėžimas. *Atsitiktinio dydžio X, apibrėžto aibėje Ω ir turinčio baigtinį vidurkį ($E|X| < \infty$) sąlyginiu vidurkiu atžvilgiu Y vadinamas toks diskretusis atsitiktinis dydis $E(X|Y)$, kad*

$$E(X|Y)(\omega) = E(X|A_i) = E(X|Y = y_i), \quad \textit{kai} \quad \omega \in A_i, \quad i = 1, 2, \ldots$$

Jei žinome, kad įvyko įvykis A_i, tuomet apsiribojame tik tais ω, kurie priklauso aibei A_i. Tiems ω, $E(X|Y)(\omega)$ sutampa su sąlyginiu vidurkiu $E(X|A_i)$.

3.9 pavyzdys. Prieš tai buvusio pavyzdžio tęsinys.

Išvardinsime kelias sąlyginio vidurkio savybes:

- Sąlyginis vidurkis yra tiesinis:

$$E([aX + bY]|Z) = aE[X|Z] + bE[Y|Z].$$

- Atsitiktinių dydžių X ir $E[X|Y]$ vidurkiai sutampa:

$$EX = E(E[X|Y]).$$

  Įrodymas.

- Jei X ir Y yra nepriklausomi a.d., tai $E[X|Y] = EX$.

Sąlyginis vidurkis $E[X|Y]$, kai Y diskretusis a.d. yra diskretus a.d. Tam tikra prasme, tai yra šiurkštesnė (grubesnė) a.d. X versija. Kuo mažiau reikšmių įgyja Y, tuo grubesnis yra a.d. $E[X|Y]$. Taip, jei $Y = const$, tai $E[X|Y] = EX$; jei Y įgyja dvi skirtingas reikšmes, tai toks yra ir sąlyginis vidurkis $E[X|Y]$.

Sąlyginis vidurkis $E[X|Y]$ yra Y funkcija:

$$E[X|Y] = g(Y), \quad \text{čia} \quad g(y) = \sum_{i=1}^{\infty} E[X|Y = y_i]\mathbf{1}_{\{y_i\}}(y).$$

3.5 Sąlyginis vidurkis II

Iš sąlyginio vidurkio $E[X|Y]$ apibrėžimo, kai Y yra diskretus atsitiktinis dydis aišku, kad a.d. Y reikšmės čia visai nesvarbios, bet svarbūs įvykiai lemiantys tas reikšmes. Todėl sąlyginį vidurkį galime suprasti kaip atsitiktinį dydį sukonstruotą pagal su dydžiu Y susijusią įvykių aibę, tarkime $\sigma(Y)$ ir simboliškai, vietoj $E[X|Y]$ rašyti $E[X|\sigma(Y)]$. Aišku, kad $\sigma(Y)$ suteikia visą informaciją apie a.d. Y, kaip $\omega \in \Omega$ funkciją.

Priminsime, kad atsitiktinius dydžius nagrinėjame apibrėžtus tikimybinėje erdvėje $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Tarkime, $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ yra σ algebra.

3.2 apibrėžimas. *Atsitiktinio dydžio X sąlyginis vidurkis atžvilgiu σ algebros $\mathcal{G}$ yra toks $\mathcal{G}$-matus atsitiktinis dydis $E(X|\mathcal{G})$, kuriam*

$$E(E(X|\mathcal{G})\mathbf{1}_F) = EX\mathbf{1}_F,$$

su kiekviena aibe $F \in \mathcal{G}$.

Sąlyginis vidurkis $E(X|Y) = E(X|\mathcal{G})$, kai $\mathcal{G}$ yra mažiausia σ algebra atžvilgiu kurios yra matus atsitiktinis dydis Y. Įvykio $A \in \mathcal{F}$ sąlyginė tikimybė atžvilgiu $\mathcal{G}$ yra

$$P(A|\mathcal{G}) = E(\mathbf{1}_A|\mathcal{G}).$$

Svarbu įsidėmėti, kad sąlyginis vidurkis ir sąlyginė tikimybė atžvilgiu kurios nors σ algebros yra atsitiktinis dydis.

Jei σ algebra $\mathcal{G}$ yra generuota baigtiniu skaidiniu $\{B_1, \dots, B_n\}$, tuomet

$$E(X|\mathcal{G}) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{P(B_k)} E(X\mathbf{1}_{B_k})\mathbf{1}_{B_k}.$$

Jei atsitiktinis vektorius (Y, X) yra aprašomas tankio funkcija $f(y, x)$, tai sąlygine tankio funkcija, kai fiksuotas dydis $X = x$ yra

$$f(y|x) = \frac{f(y,x)}{f_X(x)},$$

kai $f_X(x)$ – atsitiktinio dydžio X marginalioji tankio funkcija. Tuomet

$$P(a < Y \leq b|X = x) = \int_a^b f(y|x)dy,$$
$$E(Y|X = x) = \int_{-\infty}^{\infty} yf(y|x)dy.$$

Išvardinsime paprasčiausias sąlyginio vidurkio savybes. Lygybės tarp atistiktinių dyžių yra lygybės beveik tikrai.

1) Jei $X = c$ b.t., tai $E(X|\mathcal{G}) = c$ b.t.

2) $E(aX + bY|\mathcal{G}) = aE(X|\mathcal{G}) + bE(Y|\mathcal{G})$;

3) Jei X nepriklauso nuo $\mathcal{G}$, tai $E(X|\mathcal{G}) = EX$;

4) Jei X yra $\mathcal{G}$-matus, tai $E(X|\mathcal{G}) = X$;

5) Jei $X \leq Y$ b.t., tai $E(X|\mathcal{G}) \leq E(Y|\mathcal{G})$ b.t.

6) $|E(X|\mathcal{G})| \leq E(|X||\mathcal{G})$;

7) *Dvigubo vidurkinimo taisyklė*: jei σ-algebros $\mathcal{G}_1, \subset \mathcal{G}_2 \subset \mathcal{F}$, tai

$$E(E(X|\mathcal{G}_2)|\mathcal{G}_1) = E(X|\mathcal{G}_1).$$

8) Jei Y yra $\mathcal{G}$-matus, tai

$$E(XY|\mathcal{G}) = YE(X|\mathcal{G}).$$

9) *Jenseno nelygybė*: jei $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ iškiloji funkcija, tuomet

$$h(E(X|\mathcal{G})) \leq E(h(X)|\mathcal{G}).$$

3.6 Sąsūkos

Tegu X ir Y yra du nepriklausomi neneigiami sveikareikšmiai atsitiktiniai dydžiai,

$$P(X = k) = a_k, \quad P(Y = k) = b_k, \quad k = 0, 1, \ldots.$$

Kadangi su bet kuriuo $n \geq 0$

$$\{X+Y=n\} = \bigcup_{k=0}^{\infty}\{X=k, Y=n-k\},$$

išvedame

$$\begin{aligned} P(X+Y=n) =& P\Big(\bigcup_{k=0}^{\infty}\{X=k, Y=n-k\}\Big) \\ =& \sum_{k=0}^{\infty} P(X=k, Y=n-k) \\ =& \sum_{k=0}^{\infty} a_k b_{n-k}. \end{aligned}$$

Gauta suma dažnai pasitaiko dirbant su sekomis. Jos pagalba gauta seka vadinama sekų (a_k) ir (b_k) sąsūka.

3.3 apibrėžimas. *Dviejų sekų (a_n) ir (b_n) sąsūka vadinama tokia seka (c_n), kurios elementai apibrėžtas taip:*

$$c_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_k b_{n-k}, \quad n = 0, 1, \ldots$$

Trumpai sąsūką užrašome

$$(c_n) = (a_n) * (b_n).$$

Tai labai svarbi operacija, nes ji aprašo dviejų nepriklausomų neneigiamų sveikareikšmių atsitiktinių dydžių sumos tikimybių skirstinį. Naudojant įvestą žymėjimą

$$(P(X+Y=n)) = (P(X=n)) * (P(Y=n)).$$

3.10 pavyzdys. Jei $X \sim p(k;\lambda)$ ir $Y \sim p(k;\mu)$ yra nepriklausomi, tai $X+Y \sim p(k;\lambda+\mu)$.

3.11 pavyzdys. Jei $X \sim b(k;n,p)$ ir $Y \sim b(k;m,p)$ yra nepriklausomi, tai $X+Y \sim b(k;n+m,p)$.

Intuityviai abu šie pavyzdžiai yra suprantami. Griežtai įrodyti galėsime kiek vėliau, susipažinę su generuojančiomis funkcijomis.

Išvardinsime kai kurios sąsūkos operacijos savybės.

1. Dviejų tikimybių skirstinius aprašančių sekų sąsūka taip pat aprašo tikimybių skirstinį.

2. Sąsūkos operacija yra komutatyvi:

$$(a_n) * (b_n) = (b_n) * (a_n).$$

3. Sąsūka yra asociatyvi operacija:

$$((a_n) * (b_n)) * (c_n)) = (b_n) * ((a_n) * (c_n)).$$

Patogu įvesti sutrumpintą žymėjimą sekos sąsūkos su savim:

$$(p_n)^{2*} = (p_n) * (p_n).$$

Taigi jei X_1, X_2 yra nepriklausomi ir vienodai pasiskirstę su tikimybių skirstiniu (p_n) tai $X_1 + X_2 \sim (p_n)^{2*}$.

Jei $X_1, X_2, \ldots, X_n$ yra n.v.p., $X_i \sim (p_k)$, tai

$$X_1 + \cdots + X_n \sim (p_k)^{n*} = (p_k) * \cdots * (p_k).$$

Jei X ir Y tolydieji nepriklausomi a.d., tai atsitiktinio vektoriaus $Z = X+Y$ pasiskirstymo funkcija yra

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= \int\int_{x+y\le z} f_{XY}(x,y)dxdy = \int\int_{x+y\le z} f_X(x)f_Y(y)dxdy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{z-x} f_Y(y)dyf_X(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} F_Y(z-x)dF_X(x). \end{aligned}$$

Gauta formulė aprašo pasiskirstymo funkcijų sąsūką: $F_Z = F_X * F_Y$.

Jei turime dvi funkcijas $g(x,y)$ ir $h(x,y)$, tai galime nagrinėti atsitiktinį vektorių $(Z,W) = (g(X,Y), h(X,Y))$. Jei abi funkcijos yra bijekcijos ir

$$x = q(z,w), y = r(z,w),$$

tai

$$f_{ZW}(z,w) = f_{XY}(x,y)|J(x,y)|^{-1},$$

čia $x = q(z,w), y = r(z,w)$, o

$$J(x,y) = \begin{vmatrix} \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \\ \frac{\partial h}{\partial x} & \frac{\partial h}{\partial y} \end{vmatrix}$$

yra transformacijos Jakobianas. Be to, teisinga tokia formulė

$$f_{ZW}(z,w) = f_{XY}(g(z,w), h(z,w))|\overline{J}(z,w)|,$$

o

$$\overline{J}(x,y) = \begin{vmatrix} \frac{\partial q}{\partial z} & \frac{\partial q}{\partial w} \\ \frac{\partial r}{\partial z} & \frac{\partial r}{\partial w} \end{vmatrix}.$$

3.7 Genruojančios funkcijos

3.4 apibrėžimas. *Tegu* (a_n) *– bet kuri skaitinė seka. Jei egzistuoja toks* $s_0 > 0$*, kad eilutė*

$$A(s) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k s^k$$

konverguoja, kai $|s| < s_0$*, tai funkcija* $A(s)$ *vadinama sekos* (a_k) *generuojančia funkcija.*

Tarkime, X yra neneigiamas sveikareikšmis atsitiktinis dydis su reikšmių tikimybių funkcija (p_n). Sekos (p_n) generuojanti funkcija yra

$$P(s) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k s^k.$$

Ji taip pat vadinama atsitiktinio dydžio X generuojančia funkcija ir dažnai žymima $P_X(s)$. Pastebėsime, kad

$$P_X(s) = Es^X$$

ir $P_X(1) = 1$. Taigi, $P_X(s)$ konvergavimo spindulys yra nemažesnis už 1. Taip pat pastebėkime, kad $P_X(1) = P(X < \infty)$.

Vėliau matysime, kad generuojanti funkcija, kai ji egzistuoja, vienareikšmiškai aprašo ir ją atitinkančią seką.

3.12 pavyzdys. Jei $X \sim p(k; \lambda)$, tai

$$\begin{aligned} P(s) = & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} s^k \\ = & e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda s)^k}{k!} = e^{\lambda(s-1)}. \end{aligned}$$

su visais $s > 0$.

3.13 pavyzdys. Jei $X \sim b(k; n, p)$, tai

$$\begin{aligned} P(s) = & \sum_{k=0}^{\infty} \left(\binom{n}{k} p^k q^{n-k} \right) s^k \\ = & \sum_{k=0}^{\infty} \left(\binom{n}{k} (ps)^k q^{n-k} \right) = (q + ps)^n \end{aligned}$$

su visais $s > 0$.

3.14 pavyzdys. Jei $X \sim g(k;p)$, tai

$$P(s) = \sum_{k=0}^{\infty} (q^k p) s^k = p \sum_{k=0}^{\infty} (qs)^k$$
$$= \frac{p}{1-qs},$$

kai $0 < s < q^{-1}$.

Labai svarbus yra generuojančios funkcijos diferencijavimas. Tarkime $P(s)$ yra generuojanti funkcija, kurios konvergavimo spindulys nemažesnis už 1. Tuomet funkcija $P(s)$ yra be galo daug kartų diferencijuojama ir su kiekvienu $m \geq 1$,

$$\frac{d^m}{s^m} P(s) = \sum_{k=m}^{\infty} k(k-1)\cdots(k-m) p_k s^{k-m}$$
$$= \sum_{k=m}^{\infty} \frac{k!}{(k-m)!} p_k s^{k-m}.$$

Generuojančios funkcijos išvestinės nuliniame taške ypač svarbios:

$$\frac{d^m}{s^m} P(s)\Big|_{s=0} = m! p_m, \quad m = 0, 1, 2, \ldots$$

Taigi yra teisingas šis teiginys.

3.6 teiginys. *Generuojanti funkcija vienareikšmiškai aprašo ją apibrėžiančią seką.*

Toliau išsiaiškinsime tikimybės $P(X > k)$ sąryšį su generuojančia funkcija.

3.7 teiginys. *Tegu $X \sim (p_k)$ ir $\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$. Apibrėžkime*

$$P(s) = Es^X, \quad q_k = P(X > k), \ k = 0, 1, \ldots$$

ir

$$Q(s) = \sum_{k=0}^{\infty} q_k s^k.$$

Tuomet teisinga ši formulė:

$$Q(s) = \frac{1 - P(s)}{1 - s}, \quad 0 \leq s < 1.$$

Įrodymas. Kadangi $q_k = \sum_{j=k+1}^{\infty} p_j$, tai

$$Q(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \Big(\sum_{j=k+1}^{\infty} p_j \Big) s^k = \sum_{j=1}^{\infty} \Big(\sum_{k=0}^{j-1} s^k \Big) p_j$$
$$= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1-s^j}{1-s} p_j = (1-s)^{-1}(1-P(s)). \qquad \blacksquare$$

3.8 teiginys. *Teisingos šios generuojančių funkcijų savybės:*

(i) Jei X_1, X_2 yra nepriklausomi neneigiami sveikareikšmiai a.d., kurių generuojančios funkcijos yra $P_{X_i}(s), 0 \le s \le 1$, $i = 1, 2$, tai

$$P_{X_1+X_2}(s) = P_{X_1}(s)P_{X_2}(s).$$

(ii) Jei sekų (a_n) ir (b_n) generuojančios funkcijos yra atitinkamai $A(s)$ ir $B(s)$, tai sąsūkos $(a_n) * (b_n)$ generuojanti funkcija yra $A(s)B(s)$.

3.15 pavyzdys. Jei $X_1 \sim p(k;\lambda), X_2 \sim p(k;\mu)$ ir a.d. X_1, X_2 yra nepriklausomi, tai

$$P_{X_1+X_2}(s) = P_{X_1}(s)P_{X_2}(s) = e^{\lambda(s-1)}e^{\mu(s-1)} = e^{(\lambda+\mu)(s-1)}.$$

Taigi $X_1 + X_2 \sim p(k;\lambda+\mu)$.

Išsiaiškinkime, kaip rasti atsitiktinio dėmenų skaičiaus sumos generuojančią funkciją.

Tegu $(X_k, k \ge 1)$ nepriklausomi vienodai pasiskirstę neneigiami sveikareikšmiai atsitiktiniai dydžiai, $X_1 \sim (p_n)$ ir $P_{X_1}(s) = Es^{X_1}$, $0 \le s \le 1$. Tarkime, N – nepriklausomas nuo $(X_n, n \ge 1)$ neneigiamas sveikareikšmis atsitiktinis dydis, $N \sim (\alpha_j)$, $P_N(s) = Es^N, 0 \le s \le 1$.

Apibrėžkime $S_0 = 0$,

$$S_n = X_1 + \cdots + X_n, \quad n \ge 1.$$

Nagrinėsime S_N – atsitiktinio skaičiaus atsitiktinių dydžių sumą. Su kiekvienu $j \ge 0$, pagal pilnosios tikimybės formulę,

$$P(S_N = j) = \sum_{k=0}^{\infty} P(S_N = j, N = k) = \sum_{k=0}^{\infty} P(S_k = j, N = k)$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} P(S_k = j)P(N = k) = \sum_{k=0}^{\infty} p_j^{*k} \alpha_k.$$

Pasinaudoję gautąja išraiška, suskaičiuojame

$$\begin{aligned} P_{S_N}(s) &= \sum_{j=0}^{\infty} P(S_N = j)s^j = \sum_{j=0}^{\infty} \Big(\sum_{k=0}^{\infty} p_j^{*k} \alpha_k \Big) s^j \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \sum_{j=0}^{\infty} p_j^{*k} s_j = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \big(P_{X_1}(s) \big)^k = P_N(P_{X_1}(s)). \end{aligned}$$

Taigi teisinga ši formulė

$$P_{S_N}(s) = P_N(P_{X_1}(s)), \quad 0 \le s \le 1. \tag{3.4}$$

Atskiru atveju, kai $N \sim p(k;\lambda)$, sumos S_N skirstinys vadinamas *sudėtiniu Puasono*. Kadangi $P_N(s) = \exp\{\lambda(s-1)\}$, tai

$$P_{S_N}(s) = \exp\{\lambda(P_{X_1}(s) - 1)\}.$$

3.8 Naudingi faktai

Šiame skirelyje surinkti naudingi tikimybių teorijos faktai, kuriais ateityje ne kartą remsimės.

- *Čebyševo nelygybė:* jei $\lambda > 0$, tai
$$P(|X| > \lambda) \le \lambda^{-p} E|X|^p.$$
- *Švarco nelygybė:* $E(XY) \le \Big(EX^2 EY^2 \Big)^{1/2}$.
- *Hiolderio nelygybė:* jei skaičiai $p, q > 1$ tenkina sąryšį $1/p + 1/q = 1$, tai
$$E(XY) \le \big(E|X|^p \big)^{1/p} \big(E|Y|^q \big)^{1/q}.$$
- *Jenseno nelygybė:* jei funkcija $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ yra iškila, tai
$$\phi(E(X)) \le E(\phi(X)).$$

Atsitiktinių dydžių sekoms apibrėžiami kelių tipų konvergavimai.

- *Konvergavimas beveik tikrai*: $X_n \xrightarrow{b.t.} X$, jei egzistuoja tokia mati aibė $N \in \mathcal{F}$, kad $P(N) = 0$ ir
$$\lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega),$$
su visais $\omega \notin N$.

- *Konvergavimas pagal tikimybę*: $X_n \xrightarrow{P} X$, jei
$$\lim_{n\to\infty} P(|X_n - X| > \varepsilon) = 0,$$
su visais $\varepsilon > 0$.

- *Konvergavimas p-ojo momento prasme*: $p \geq 1$, $X_n \xrightarrow{Lp} X$, jei
$$\lim_{n\to\infty} E|X_n - X|^p = 0.$$

- *Konvergavimas pagal skirstinį*: $X_m \xrightarrow{\mathcal{D}} X$, jei
$$\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) \to F_X(x)$$
kiekvienam funkcijos F tolydumo taškui $x \in \mathbb{R}$.

Konvergavimas beveik tikrai stipresnis už konvergavimą pagal tikimybę. Pastarasis silpnesnis ir už konvergavimą p-ojo momento prasme. Jei $X_n \xrightarrow{P} X$, tai egzistuoja posekis (X_{n_k}) konverguojantis prie X beveik tikrai.

Iš konvergavimo pagal tikimybę išplaukia konvergavimas pagal pasiskirstymą. Atvirkščiai teisinga, jei a.d. seka konverguoja į išsigimusį a.d.

Tikimybių teorijai labai svarbūs yra didžiųjų skaičių dėsniai bei centrinė ribinė teorema. Silpnasis didžiųjų skaičių dėasnis yra šis teiginys.

3.9 teiginys. *Tegu $X_1, \ldots, X_n$ nepriklausomi vienodai pasiskirstę atsitiktiniai dydžiai su baigtiniu vidurkiu $\mu = EX_1$. Tuomet su kiekvienu $\varepsilon > 0$*
$$\lim_{n\to\infty} P(|\overline{X} - \mu| > \varepsilon) = 0.$$
Čia $\overline{X} = n^{-1}(X_1 + \cdots + X_n)$.

Stiprusis didžiųjų skaičių dėsnis ir centrinė ribinė teorema suformuluoti šiuose teiginiuose.

3.10 teiginys. *Su kiekvienu $\varepsilon > 0$*
$$P(\lim_{n\to\infty} |\overline{X} - \mu| > \varepsilon) = 0.$$

3.11 teiginys. *Jei*
$$Z_n = \frac{X_1 + \cdots + X_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$$
tai
$$\lim F_{Z_n}(x) = \Phi(x),$$
su visais $x \in \mathbb{R}$.

3.9 Pratimai

3.1 pratimas. Įsitikinkite, kad $\mathcal{F}_X$ yra σ algebra.

3.2 pratimas. Įrodykite, kad atsitiktinių dydžių X ir X skirstiniai sutampa, jei sutampa jų pasiskirstymo funkcijos.

3.3 pratimas. Įrodykite, kad $\lambda F + (1-\lambda)G$ yra pasiskirstymo funkcija, kai F ir G yra pasiskirstymo funkcijos, o $\lambda \in [0,1]$. Ar sandauga FG yra pasiskirstymo funkcija?

3.4 pratimas. Tegu (X_n) yra atsitiktinių dydžių seka. Įsitikinkite, kad

(a) $\limsup_{n\to\infty} X_n$, yra atsitiktinis dydis;

(b) $\liminf_{n\to\infty} X_n$ yra atsitiktinis dydis;

(c) aibė $\{\omega : \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) \text{ egzistuoja}\}$ yra mati;

(d) $X(\omega) = \begin{cases} \lim_{n\to\infty} X_n(\omega), & \text{jei riba egzistuopja} \\ 0, & \text{kitur}. \end{cases}.$
Įsitikinkite, kad X yra atsitiktinis dydis.

3.5 pratimas. Įrodykite, kad $\lambda f + (1-\lambda)g$ yra tankio funkcija, kai f ir g yra tankio funkcijos, o $\lambda \in [0,1]$. Ar sandauga fg yra tankio funkcija?

3.6 pratimas. Tarkime, X yra atsitiktinis dydis su tankio funkcija

$$f_X(x) = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|x|},$$

kai $x \in \mathbb{R}$. Raskite $var(X)$.

3.7 pratimas. Atsitiktinių dydžių

$$X^+ = \max\{0, X\}, \quad X^- = -\min\{0, X\}, \quad |X| = X^+ + X^-, \quad -X$$

pasiskirstymo funkcijas išreiškite atsitiktinio dydžio X pasiskirstymo funkcija F_X.

3.8 pratimas. Atvaizdis $d : S \times S \to \mathbb{R}$ vadinamas aibės S metrika, jei yra teisingos šios savybės:

(i) $d(s,t) = d(t,s) \geq 0$ su visais $s, t \in S$,

(ii) $d(s,t) = 0$ tada ir tik tada, kai $s = t$,

(iii) $d(s,t) \le d(s,u) + d(u,t)$ su visais $s,t,u \in S$.

(a) *Levi metrika.* Pasiskirstymo funkcijoms F ir G, Levi metrika yra

$$d_L(F,G) = \inf\{\varepsilon > 0 : G(x-\varepsilon) \le F(x) \le G(x+\varepsilon), \text{visiems } x\}.$$

Įrodykite, kad d_L yra pasiskirstymo funkcijų aibės metrika.

(b) *Pilnosios variacijos metrika.* Tegu X ir Y yra sveikareikšmiai atsitiktiniai dydžiai ir

$$d_{TV}(X,Y) = \sum_k |P(X=k) - P(Y=k)|.$$

Įrodykite, kad funkcija d_{TV} tenkina pirmą ir trečią metrikos savybes ir $d_{TV}(X,Y) = 0$ tada ir tik tada, kai $P(X=Y) = 1$.

(c) Įrodykite, kad

$$d_{TV}(X,Y) = 2 \sup_{A \subset Z} |P(X \in A) - P(Y \in A)|.$$

3.9 pratimas. Įrodykite, kad

$$\text{argmin}_{a \in \mathbb{R}} E(X-a)^2 = EX.$$

3.10 pratimas. Tarkime, X yra Puasono atsitiktinis dydis su parametru λ. Raskite $E(1/(X+1))$.

3.11 pratimas. Tegu X, Y yra nepriklausomi eksponentiniai atsitiktiniai dydžiai su parametru λ. Raskite $E|X-Y|$.

3.12 pratimas. Tegu $X \sim \mathcal{N}(0,\sigma^2)$. Žinodami, kad

$$Ee^{\lambda X} = \exp\left\{\frac{1}{2}\lambda^2\sigma^2\right\}$$

su visais $\lambda \in \mathbb{R}$, išveskite:

(a) $EX^{2k} = \dfrac{(2k)!}{2^k k!}\sigma^{2k}$, $k = 1, 2, \ldots$;

(b) $EX^{2k-1} = 0$, $k = 1, 2, \ldots$.

3.13 pratimas. Įrodykite, kad Puasono atsitiktinio dydžio X su paramatru λ charakteristinė funkcija yra lygi

$$c_X(t) = \exp\{\lambda(e^{it} - 1)\},$$

$t \in \mathbb{R}$. Remdamiesi šia formule suskaičiuokite $EX^2, var(X), EX^3$.

3.14 pratimas. Tegu X yra Bernulio atsitiktinis dydis, $P(X = 0) = 1 - p, P(X = 1) = p$. Tegu $Y = 1 - X$, o $Z = XY$. Raskite $P(X = x, Y = y)$ ir $P(X = x, Z = z)$, kai $x, y, z \in [0, 1]$.

3.15 pratimas. Tarkime, vektoriaus (X, Y) pasiskirstymo funkcijs yra F. Įrodykite, kad

$$P(a < X \leq b, c < Y \leq d) = F(b, d) - F(a, d) - F(b, c) + F(a, c),$$

kai $a < b, c < d$.

3.16 pratimas. Ar funkcijs $F(x, y) = 1 - \exp\{-xy\}, 0 \leq x, y < \infty$ yra kokio nors atsitiktinio vektoriaus pasiskirstymo funkcija?

3.17 pratimas. Tegu $X_i \sim \mathcal{N}(m_i, \sigma_i^2)$, $i = 1, 2$ yra nekoreliuoti atsitiktiniai dydžiai. Įrodykite, kad jie yra nepriklausomi. Apibendrinkite atsitiktiniams Gausiniams vektoriams.

3.18 pratimas. Jei $X \sim \mathcal{N}(0, I_m)$ ($I_m = diag(1, \ldots, 1)$ yra $m \times m$ vienetinė matrica) ir A, B yra $m \times m$ matricos, tai vektoriai AX ir BX yra nepriklausomi tada ir tik tada, kai $AB' = 0$.

3.19 pratimas. Tegu τ yra eksponentinis atsitiktinis dydis su parametru λ. Raskite sąlyginį vidurkį $E(\tau | \tau < c)$.

3.20 pratimas. Raskite atsitiktinio dydžio Y sąlyginę tankio funkciją ir sąlyginį vidurkį atžvilgiu X, jei poros (X, Y) tankio funkcija yra:

(a) $f(x, y) = \lambda^2 e^{-\lambda y}$, $0 \leq x \leq y < \infty$,

(b) $f(x, y) = xe^{-x(y+1)}$, $x, y \geq 0$.

4 Atsitiktiniai procesai

4.1 Apibrėžimai ir pavyzdžiai

Atsitiktinis procesas yra vienoje tikimybinėje erdvėje, sakykime, $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ apibrėžtų atsitiktinių dydžių rinkinys

$$X = (X_t, t \in T) = (X_t(\omega), t \in T, \omega \in \Omega).$$

4.1 pavyzdys. Atsitiktinis dydis yra (trivialus) atsitiktinis procesas atitinkantis $T = \{1\}$. Jei $T = \{1, \ldots, m\}$, tai atsitiktinis procesas

$$X = (X_t, t \in T) = (X_1, \ldots, X_m)$$

vadinamas (m-mačiu) atsitiktiniu vektoriumi.

Atsitiktinis procesas X yra dviejų argumentų funkcija. Kai t fiksuotas,

$$X_t = X_t(\omega), \quad \omega \in \Omega$$

yra atsitiktinis dydis. Kai fiksuotas „atsitiktinumas" $\omega \in \Omega$, procesas yra laiko funkcija:

$$X_t = X_t(\omega), \quad t \in T.$$

Ši funkcija vadinama *proceso trajektorija* arba *realizacija*.

Atsitiktinio proceso $X = (X_t, t \in T)$, indeksų aibė T vadinama atsitiktinio proceso parametrų aibe arba laiku. Jei ji yra diskreti, tai atsitiktinis procesas vadinamas diskretaus laiko procesu. Diskretaus laiko procesas $X = (X_n, n = 1, 2, ...)$ taip pat vadinamas atsitiktine seka. Jei aibė T yra tolydi, tai ir procesas vadinamas tolydaus laiko. Jei proceso būsenų aibė $E \subset \mathbb{R}$ yra diskreti, tai atsitiktinis procesas vadinamas diskrečiuoju arba diskrečių būsenų arba dar vadinamas grandine. Šiuo atveju dažniausiai tariama, kad būsenų aibė yra $E = \{0, 1, 2, ...\}$. Jei būsenų aibė E yra tolydi, turime tolydžių būsenų procesą.

Kaip ir atsitiktiniams dydžiams, atsitiktiniams procesams apibrėžiamos neatsitiktinės charakteristikos.

Nagrinėkime atsitiktinį procesą $X = (X_t, t \in T)$. Fiksuotu laiko momentu $t_1 \in T$, X_{t_1} yra atsitiktinis dydis. Jo pasiskirstymo funkcija yra

$$F_{t_1}(x_1) = P(\omega : X_{t_1}(\omega) \leq x_1).$$

Pasiskirstymo funkcijų rinkinys $\{F_{t_1}, t_1 \in T\}$ vadinamos atsitiktinio proxceso $X(t)$ pirmosios eilės skirstiniu. Analogiškai, jei $t_1, t_2 \in T$, tai $X(t_1), X(t_2)$ yra du atsitiktiniai dydžiai. Jų bendrasis skirstinys yra

$$F_{t_1,t_2}(x_1, x_2) = P(\omega : X_{t_1}(\omega) \leq x_1, X_{t_2}(\omega) \leq x_2).$$

Rinkinys $\{F_{t_1,t_2}, t_1, t_2 \in T\}$ sudaro proceso antrosios eilės skirstinį.

Jei $t_1, \ldots, t_n$ yra baigtinis parametro t reikšmių rinkinys, tai atsitiktinio vektoriaus $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})$ pasiskirstymo funkcija $F_{t_1,\ldots,t_n}$ yra

$$F_{t_1,\ldots,t_n}(x_1, \ldots, x_n) = P(\omega : X_{t_1}(\omega) \leq t_1, \ldots, X_{t_n}(\omega) \leq t_n)$$

ir jų šeima, kai $t_1, \ldots, t_n \in T$ vadinama n-tosios eilės skirstiniu. Visų eikių skirstinių rinkinys,

$$\{F_{t_1,\ldots,t_n} : \quad t_1, \ldots, t_n \in T, \quad n \in \mathbb{N}\} \tag{4.1}$$

vadinama proceso $(X_t, t \in T)$ *baigtiniamačių pasiskirstymo funkcijų šeima.*

Jie pilnai aprašo atsitiktinį procesą. Todėl natūralus klausimas yra šis: kokias sąlygas turi tenkinti pasiskirstymo funkcijų šeima (4.1), kad ji būtų kokio nors atsitiktinio proceso baigtiniamačių pasiskirstymo funkcijų šeima. Į šį klausimą atsako Kolmogorovo teorema.

4.1 teorema. (Kolmogorovo) *Tam, kad pasiskirstymo funkcijų rinkinys* (4.1) *būtų kurio nors atsitiktinio proceso baigtiniamačių pasiskirstymo funkcijų šeima būtina ir pakankama, kad būtų teisingos šios suderinamumo sąlygos:*

- *reikšmės* $F_{t_1,\ldots,t_n}(x_1, \ldots, x_n)$ *simetriškai priklauso nuo porų* (t_j, x_j);
- *su visais* $t_1, \ldots, t_n \in T$, $x_1, \ldots, x_{n-1} \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{x_n \to \infty} F_{t_1,\ldots,t_n}(x_1, \ldots, x_n) = F_{t_1,\ldots,t_{n-1}}(x_1, \ldots, x_{n-1}).$$

Atsitiktinis procesas $X = (X_t, t \in T)$ vadinamas *antrosios eilės* procesu, jei $EX_t^2 < \infty$ su visais $t \in T$.

Atsitiktinio proceso $X = (X_t, t \in T)$ *vidurkio funkcija* yra $\mu_X : T \to \mathbb{R}$,

$$\mu_X(t) = EX_t, \quad t \in T;$$

Antrosios eilės proceso $X = (X_t, t \in T)$ *kovariacinė funkcija* $\Gamma_X : T^2 \to \mathbb{R}$ yra

$$\Gamma_X(t, s) = cov_X(t, s) = E[(X_t - \mu_X(t))(X_s - \mu_X(s))], \quad t, s \in T,$$

variacijos funkcija $\sigma_X^2 : T \to \mathbb{R}$,

$$\sigma_X^2(t) = c_X(t, t) = varX_t, \quad t \in T.$$

4.2 pavyzdys. Tegu X ir Y yra du nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai. Apibrėžkime procesą $(X_t, t \geq 0)$:

$$X_t = tX + Y, \quad t \geq 0.$$

Šio proceso trajektorijos yra tiesės su atsitiktiniai koeficientais. Baigtiniamačiai skirstiniai yra

$$P(X_{t_1} \leq x_1, \ldots, X_{t_m} \leq x_m) = \int_{\mathbb{R}} F_X\Big(\min_{1 \leq i \leq m} \frac{x_i - y}{t_i}\Big) F_Y(dy),$$

$t < 1, \ldots, t_m \geq 0;\ x_1, \ldots, x_m \in \mathbb{R}$.

4.3 pavyzdys. Apibrėžkime procesą

$$X_t = A\cos(\phi + \lambda t), \quad t \geq 0,$$

čia A ir ϕ yra nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai, $E(A) = 0$, $E(A^2) < \infty$, o ϕ yra tolygiai pasiskirstęs intervale $[0, 2\pi]$. Taip apibrėžtas procesas $(X_t, t \geq 0)$ yra antrosios eilės, jo vidurkio ir kovariacinės funkcijos yra (žr. 4.1 pratimą):

$$m_X(t) = 0 \quad t \geq 0, \tag{4.2}$$

ir

$$\Gamma_X(t,s) = \frac{1}{2}E(A^2)\cos(\lambda(t-s)), \quad t, s \geq 0. \tag{4.3}$$

4.4 pavyzdys. *Atvykimų procesas.* Nagrinėkime klientų atvykimą į parduotuvę, matuodami laikus nuo vieno kliento atvykimo iki kito. Tegu tie laikai yra teigiami atsitiktiniai dydžiai $X_1, X_2, \ldots$. Imdami $t \in [0, \infty)$ apibrėžkime $N_t = k$ tada ir tik tada, kai sveikasis skaičius k yra toks, jog

$$X_1 + \cdots + X_k \leq t < X_1 + \cdots + X_{k+1}.$$

Apibrėžkime $N_t = 0$, jei $t < X_1$. Tuomet N_t yra iki laiko momento t (laiko intervale $[0, t]$) atvykusių klientų skaičius. Pastebėkime, kad su kiekvienu $t \geq 0$, N_t yra atsitiktinis dydis įgyjantis reikšmes aibėje $S = \mathbb{N}$. Taigi $\{N_t, t \geq 0)$ yra tolydaus laiko diskretus procesas. Jo trajekltorijos yra nemažėjančios, tolydžios iš dešinės funkcijos didėjančios vienetiniais šuoliukais taškuose $X_1 + \cdots + X_k$. Be to, $N_t < \infty$ su visais $t \geq 0$ tada ir tik tada, kai $\sum_{k=1}^{\infty} X_k = \infty$.

4.5 pavyzdys. Nagrinėkime diskretaus laiko atsitiktinį procesą (X_t), kurio būsenų aibė yra $S = \{1, 2, 3\}$. Proceso dinamika (kitimas laike) aprašomas taip: iš būsenos 1 į būseną 2 procesas pereina su tikimybe 1. Iš būsenos 3 gali pereiti arba į 1, arba 2 su vienoda tikimybe 1/2, o iš 2 peršoka į 3 su tikimybe 1/3 arba lieka būsenoje 2. Tai yra Markovo grandinės pavyzdys. Markovo grandines detaliai nagrinėsime vėliau.

4.1 apibrėžimas. *Atsitiktinis procesas $X = (X_t, t \in T)$ yra Gauso (arba normalusis), jei baigtiniamačiai skirstiniai yra Gausiniai.*

Gausinį procesą pilnai aprašo jo vidurkio funkcija $m_X(t), t \in T$ ir kovariacinė funkcija $\Gamma_X(t,s), t, s \in T$. Ir atvirkščiai. Jei $m : T \to \mathbb{R}$ yra bet kuri funkcija, o simetrinė funkcija $\Gamma : T \times T \to \mathbb{R}$ yra neneigiamai apibrėžta, t.y.,

$$\sum_{j,k=1}^{n} \Gamma(t_j, t_k) a_j a_k \geq 0$$

su visais $t_i \in T, a_i \in \mathbb{R}, i = 1, \ldots, n$ ir visais $n \in \mathbb{N}$, tuomet egzistuoja Gauso procesas su vidurkio funkcija m ir kovariacine funkcija Γ.

4.6 pavyzdys. Tegu X, Y yra normaliniai atsitiktiniai dydžiai. Tuomet procesas $X_t = tX + Y, t \geq 0$ yra Gauso su vidurkio funkcija

$$m_X(t) = tE(X) + E(Y), \quad t \geq 0,$$

ir kovariacine funkcija

$$\Gamma_X(t, s) = t^2 var(X) + 2tcov(X, Y) + var(Y), \quad t, s \geq 0.$$

4.7 pavyzdys. *Gauso baltasis triukmas.* Nagrinėkime procesą $X = (X_t, t \in T)$, kai $X_t, t \in T$ yra nepriklausomi normaliniai atsitiktiniai dydžiai su vienodu pasiskirstymu $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$. Tuomet procesas X yra Gauso procesas su vidurkio funkcija

$$m_X(t) = 0, \quad t \in T,$$

ir kovariacine funkcija

$$\Gamma_X(s, t) = \begin{cases} \sigma^2, & \text{kai} \quad s = t \\ 0, & \text{kai} \quad s \neq t, \end{cases} \quad s, t \in T.$$

4.2 apibrėžimas. *Vienoje tikimybinėje erdvėje apibrėžti atsitiktiniai procesai $X = (X_t, t \in T)$ ir $Y = (Y_t, t \in T)$ vadinami ekvivalenčiais, jei su kiekvienu $t \in T$,*

$$P(\omega : X_t(\omega) \neq Y_t(\omega)) = 0.$$

Taip pat sakome, kad vienas procesas yra kito *versija.* Du ekvivalentūs procesai gali turėti visai skirtingas trajektorijas.

4.8 pavyzdys. Tegu ξ yra neneigiamas tolydusis atistiktinis dydis. Tegu $T = [0, \infty)$. Apibrėžkime procesus $X = (X_t, t \in T)$ ir $Y = (Y_t, t \in T)$:

$$X_t = 0 \quad \text{su visais} \quad t \in T,$$
$$Y_t = \begin{cases} 0, & \text{jei} \quad t \neq \xi \\ 1, & \text{jei} \quad t = \xi, \end{cases} \quad t \in T.$$

Procesai yra ekvivalentūs, bet turi skirtingas trajektorijas.

4.3 apibrėžimas. *Atsitiktiniai procesai $X = (X_t, t \in T)$ ir $Y = (Y_t, t \in T)$ apibrėžti vienoje tikimybinėje erdvėje vadinami neatskiriamais jei egzistuoja tokia aibė $N \subset \Omega$, kad $P(N) = 0$ ir $X(\omega) = Y(\omega)$ su visais $\omega \notin N$.*

Du atsitiktiniai procesai kurių trajektorijos yra tolydžios iš dešinės yra neatskiriami, tai jie yra ekvivalentūs. Ekvivalentūs diskretieji procesai yra neatskiriami (žr. 4.4 pratimą).

4.2 Stacionarūs procesai

Daugelio svarbių atsitiktinių procesų baigtiniamačiai skirstiniai nepriklauso nuo laiko postūmio. Todėl natūralu juos apjungti į vieną klasę.

4.4 apibrėžimas. *Atsitiktinis procesas* $X = (X_t, t \geq 0)$ *vadinamas stipriai stacionariu (stacionariu siaurąja prasme), jei atsitiktinių vektorių*

$$(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_m})$$

ir

$$(X_{t_1+h}, X_{t_2+h}, \dots, X_{t_m+h})$$

skirstiniai sutampa, kokie bebūtų $t_1, t_2, \dots, t_n \geq 0$ *ir* $h > 0$.

Pastebėsime, kad stipriai stacionaraus atsitiktinio proceso X, atsitiktiniai dydžiai $X_t, t \geq 0$ yra vienodai pasiskirstę.

4.5 apibrėžimas. *Antrosios eilės atsitiktinis procesas* $X = (X_t, t \geq 0)$ *vadinamas silpnai stacionariu (stacionariu plačiąja prasme) , jei su visais* t_1, t_2 *ir* $h > 0$

(i) $E(X_{t_1}) = E(X_{t_2})$;

(ii) $cov(X_{t_1}, X_{t_2}) = cov(X_{t_1+h}, X_{t_2+h})$.

Silpnai stacionaraus atsititktinio proceso X kovariacinė funkcija $\Gamma(t, t+h) = \Gamma(0, h)$. Taigi $\Gamma(t, s)$ priklauso tik nuo skirtumo $t - s$.

Analogiškai apibrėžiame stacionarius diskretaus laiko procesus.

4.9 pavyzdys. Tarkime, α ir β yra nekoreliuoti atsitiktiniai dydžiai su nuliniais vidurkiais ir vienetinėmis dispersijomis. Imdami $\lambda \in [0, \pi]$ apibrėžkime

$$X_n = \alpha \cos(\lambda n) + \beta \sin(\lambda n), \quad n \geq 0.$$

Akivaizdu, kad $EX_n = 0$ su visais $n \geq 1$. Suskaičiuokime kovariacinę funkciją:

$$\begin{aligned}\Gamma_X(m, m+n) &= E(X_n X_{n+m}) \\ &= E(\alpha \cos(\lambda m) + \beta \sin(\lambda m))(\alpha \cos(\lambda(m+n)) + \beta \sin(\lambda(m+n)) \\ &= E(\alpha^2 \cos(\lambda m) \cos(\lambda(m+n))) + E(\beta^2 \sin(\lambda m) \sin(\lambda(m+n))) \\ &= \cos(\lambda n),\end{aligned}$$

nes $E(\alpha\beta) = 0$. Tagi $\Gamma_X(m, m+n)$ priklauso tik nuo n, todėl procesas X yra silpnai stacionarus. Bendru atveju jis nėra stipriai stacionarus. Norėdami tai pastebėti, paimkime $\lambda = \pi/2$. Tuomet

$$(X_0, X_1, X_2, X_3, \dots) = (\alpha, \beta, -\alpha, -\beta, \dots).$$

Šis procesas bus stipriai stacionarus, tada ir tik tada, kai poros (α, β), $(\beta, -\alpha)$, $(-\alpha, -\beta)$ bus vienodai pasiskirsčiusios. Kita vertus, jei α ir β yra standartiniai normaliniai atsitiktiniai dydžiai, tai procesas X bus ir stipriai stacionarus (įsitikinkite).

Stacionariųjų procesų teorijai labai svarbūs yra du rezultatai, tai „spektrinė teorema" ir „ergodinė teorema". Su spektrine teorija susipažinsime vėliau. Čia trumpai aptarkime ergodiškumą. Panagrinėkime du kraštutinumus. Tegu $X = (X_n : n \geq 0)$ yra nepriklausomų vienodai pasiskirsčiusių atsitiktinių dydžių seka su nuliniu vidurkiu ir vienetine dispersija. Akivaizdu, kad procesas X yra stacionarus ir jo autokovariacinė funkcija yra

$$\Gamma_X(m, m+n) = E(X_m X_{m+n}) = \begin{cases} 1, & \text{kai } n = 0, \\ 0, & \text{kai } n \neq 0. \end{cases}$$

Remiantis stipriuoju didžiųjų skaičių dėsniu $n^{-1} \sum_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow{b.t.} 0$, kai $n \to \infty$.

Nagrinėkime kitą pavyzdį. Tegu Y yra atsitiktinis dydis su nuliniu vidurkiu ir vienetine dispersija. Procesą $X = (X_n, n \geq 0)$ apibrėžkime imdami $X_n = Y$ su visais $n \geq 0$. Jo kovariacinė funkcija yra $\Gamma_X(m, m+n) = EX_m X_{m+n} = EY^2 = 1$ su visais n, m. Be to, $n^{-1} \sum_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow{b.t.} Y$.

Abiejuose pavyzdžiuose matėme, kad egzistuoja sumos $n^{-1} \sum_{k=1}^{n} X_k$ riba beveik tikrai, kai $n \to \infty$. Pirmuoju atveju riba yra konstanta, antruoju – atsitiktinis dydis. „Ergodinė teorema" tvirtina, kad stacionarios sekos $X = (X_n : n \geq 0)$ dalinių sumų seka beveik tikrai artėja prie kažkokio atsitiktinio dydžio, t.y.,

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow{b.t.} Y$$

kažkokiam atsitiktiniam dydžiui Y. Panašus rezultatas teisingas ir tolydaus laiko stacionariam procesui.

4.3 Procesų reguliarumas

Kaip suprasti tokias atsitiktinio proceso reguliarumo savybes, kaip tolydumas, diferencijuojamumas ir pan. Teoriniai sunkumai yra tokie, kad šios reguliarumo savybės išreiškiamos begaline aibe taškų (jei argumentų aibė T begalinė) ir aprašomos neskaičia sąjunga mačių aibių. Taigi tolydumą (ir iš jos išplaukiančias sąvokas) aprašantys įvykiai gali nebūti matūs. Labai paprastas, bet ne visada pakankamas tolydumo apibendrinimas gali būti tolydumas pagal tikimybę.

4.6 apibrėžimas. *Atsitiktinis procesas* $(X_t, t \in T)$ *vadinamas tolydžiu pagal tikimybę taške* $t \in T$*, jei su kiekvienu* $\varepsilon > 0$

$$\lim_{h\to 0} P(|X_{t+h} - X_t| > \varepsilon) = 0.$$

Jei procesas tolydus pagal tikimybę kiekviename taške, tai jis vadinamas tiesiog tolydžiu pagal tikimybę.

Tačiau tolydumas pagal tikimybę dar nereiškia trajektorijos tolydumo.

Kad galėtume kalbėti apie proceso trajektorijos tolydumą (bei kitas panašias savybes), pirmiausia susipažinkime su atsitiktinio proceso separabilumo sąvoka.

4.7 apibrėžimas. *Atsitiktinis procesas* $(X_t, t \in T)$ *vadinamas separabiliu, jei egzistuoja tokia seka* $t_k \in T, k = 1, 2, \ldots$ *ir tokia aibė* $N \in \mathcal{F}$*, kad* $P(N) = 0$ *ir su bet kuriuo atviruoju intervalu* $I \subset \mathbb{R}$ *ir be kuria uždara aibe* $A \subset \mathbb{R}$ *teisinga, kad*

$$\{\omega : X_t(\omega) \in A, t_k \in I\} \backslash \{\omega : X_t(\omega) \in A, t \in I\} \in N.$$

Separabiliam atsitiktiniam procesui, jau galime kalbėti apie tokias savybes, kaip

- procesas $X = (X_t, t \in T)$ tolydus aibėje T;
- $X = (X_t, t \in T)$ diferencijuojamas aibėje T;
- $X = (X_t, t \in T)$ matus aibėje T.

Esant labai nežymiems apribojimams, minėti įvykiai bus matūs (priklausys σ algebrai $\mathcal{F}$).

4.2 teorema. *Kiekvienam atsitiktiniam procesui* $(X(t), t \in T)$ *egzistuoja toks separabilus atsitiktinis procesas* $(\widehat{X}(t), t \in T)$*, kad*

$$P(X_t = \widehat{X}_t) = 1$$

su kiekvienu $t \in T$.

Tai beje taip pat reiškia, kad atsitiktinių procesų $(X_t, t \in T)$ ir $(\widehat{X}_t, t \in T)$ baigtiniamačiai skirstiniai sutampa.

4.3 teorema. *Jei procesas* $X(t), t \in T$ *yra tolydus pagal tikimybę beveik visur aibėje* T*, tai egzistuoja tokia separabili jo versija* $(\widehat{X}_t, t \in T)$*, kad atvaizdis* $(t, \omega) \to X_t(\omega)$ *yra matus kaip atvaizdis apibrėžtas sandaugoje* $\Omega \times T$.

Tai leidžia kalbėti apie suintegruotas proceso trajektorijas, kaip apie atsitiktinius dydžius. Tarkime,

$$\int_T E|X_t|dt < \infty.$$

Pritaikę Fubini teoremą, matome, kad b.t. egzistuoja integralas

$$I(\omega) = \int_T X_t(\omega)dt$$

ir funkcija $I(\omega)$ yra mati. Jei

$$\int_T EX_t^2 dt < \infty,$$

tuomet beveik visos proceso $(X_t, t \in T)$ trajektorijos yra kvadratu integruojamos.

4.8 apibrėžimas. *Tegu $p \geq 1$. Atsitiktinis procesas $X = (X_t, t \in T)$, kai $T \subset \mathbb{R}$ yra intervalas, vadinamas tolydžiuoju p-ojo laipsnio vidurkio prasme, jei $E|X_t|^p < \infty$ su kiekvienu $t \in T$ ir su kiekvienu $\varepsilon > 0$ ir kiekvienu $t \in T$*

$$\lim_{s \to t} E|X_s - X_t|^p = 0.$$

Jei procesas yra tolydus p-ojo laipsnio vidurkio prasme, tai jis tolydus ir pagal tikimybę. Tačiau tolydumas pagal tikimybę negarantuoja, kad bus tolydžios proceso trajektorijos. Kokio tolydumo vidurkio prasme pakanka, kad egzistuojtų proceso versija su tolydžiomis trajektorijomis, aprašo Kolmogorovo teorema.

4.4 teorema. (Kolmogorovo kriterijus) *Tegu $X = (X_t, t \in T)$ yra atsitiktinis procesas ir $T \subset \mathbb{R}$ yra intervalas. Tarkime, egzistuoja $a > 1, c > 0$ ir $p > 0$ tokie, kad*

$$E|X_t - X_s|^p < c|t - s|^a, \tag{4.4}$$

su visais $s, t \in T$. Tuomet egzistuoja proceso $(X_t, t \in T)$ versija su tolydžiomis trajektorijomis.

4.4 Paprasčiausi besišakojantys procesai

Populiacija startuoja nuo pradininko, kuris sudaro nulinę kartą. Tas pradininkas skyla (išsiskaido į, palieka) k palikuonių su tikimybe p_k, $k = 0, 1, \ldots$, kurie sudaro pirmąją populiacijos kartą. Kiekvienas iš pirmosios kartos palikuonių savo ruožtu, nepriklausomai skyla į atsitiktinį skaičių palikuonių su tuo pačiu tikimybių tankiu (p_k). Procesas tęsiasi iki išnykimo, kai nei vienas kartos narys nebeturi palikuonių.

Šis modelis yra plačiai taikomas ir vadinamas *besišakojančiu* arba *Galtono-Watsono-Bienimė procesu.* Iš pradžių jis buvo taikomas modeliuojant neutronų skilimą. Juo galime modeliuoti giminės pavardės išlikimo procesą (kiek vaikų turi būti šeimoje, kad šeimos pavardė niekada ateityje neišnyktų?)

Formaliai procesas apibrėžiamas taip. Tegu $\{Z_{n,j}, n \geq 1, j \geq 1\}$ yra nepriklausomi vienodai pasiskirstę neneigiami sveikareikšmiai atsitiktiniai dydžiai, su bendru skirstiniu (p_k). Prilygindami sumą nuliui, kai joje nėra dėmenų, apibrėžkime procesą $\{Z_n, n \geq 0\}$ taip:

$$
\begin{aligned}
&Z_0 = 1 \\
&Z_1 = Z_{1,1} \\
&Z_2 = Z_{2,1} + \cdots + Z_{2,Z_1} \\
&\vdots \\
&Z_n = Z_{n,1} + \cdots + Z_{n,Z_{n-1}}.
\end{aligned}
$$

Taigi $Z_{n,j}$ galime interpretuoti kaip n-tosios kartos narių, kurie yra $n-1$-osios kartos j-ojo nario palikuonys, skaičių.

Pastebėkime, kad $Z_{n+1} = 0$, jei $Z_n = 0$. Be to, Z_{n-1} nepriklauso nuo $\{Z_{n,j}, j \geq 1\}$.

Pažymėkime $P_n(s) = Es^{Z_n}$, $n \geq 0$ ir

$$P(s) = Es^{Z_1} = \sum_{k=0}^{\infty} p_k s^k, \quad 0 \leq s \leq 1.$$

Taigi $P_0(s) = s, P_1(s) = P(s)$ ir

$$P_n(s) = P_{n-1}(P(s)).$$

Iš šios formulės išvedame

$$
\begin{aligned}
&P_2(s) = P(P(s)) \\
&P_3(s) = P_2(P(s)) = P(P(P(s))) = P(P_2(s)) \\
&\vdots \\
&P_n(s) = P_{n-1}(P(s)) = P(P_{n-1}(s)).
\end{aligned}
$$

Panašiai rekurentines formules galime išvesti momentams. Panagrinėkime vidurkį $m_n = EZ_n$. Pažymėkime

$$m = EZ_1 = \sum_{k=0}^{\infty} kp_k \quad \sigma^2 = var(Z_1).$$

Tarkime, kad $m < \infty, \sigma^2 < \infty$. Kadangi $m_n = P_n'(1)$ ir $P_n(s) = P_{n-1}(P(s))$,

$$P_n'(s) = P_{n-1}'(P(s))P'(s),$$

tai

$$m_n = m_{n-1}m.$$

Iš šio sąryšio išvedame

$$m_n = m_{n-2}m^2 = m_{n-3}m^3 = \cdots = m_1 m^{n-1} = m^n,$$

nes $m_1 = m$. Analogiškai galime surasti ir dispersiją, tik skaičiavimai būtų kur kas gremėzdiškesni, o rezultatą gautume šį:

$$var(Z_{n+1}) = \begin{cases} \sigma^2 m^(1 - m^{n+1})/(1-m), & \text{kai} \;\; m \neq 1 \\ \sigma^2(n+1), \;\; \text{kai} \;\; m = 1. \end{cases}$$

Toliau panagrinėsime išnykimo tikimybę $\pi = P(\text{populiacija išnyksta})$. Išnykimo įvykį aprašo sąjunga

$$\{\text{populiacija išnyksta}\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{Z_n = 0\}.$$

Kadangi $\{Z_n = 0\} \subset \{Z_{n+1} = 0\}$, tai

$$\begin{aligned} \pi =& P\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty}\{Z_k = 0\}\Big) = \lim_{n\to\infty} P\Big(\bigcup_{k=1}^{n}\{Z_k = 0\}\Big) \\ &= \lim_{n\to\infty} P(Z_n = 0) = \lim_{n\to\infty} P_n(0) \\ &= \lim_{n\to\infty} \pi_n \\ &= \lim_{n\to\infty} P(\text{populiacija išnyksta iki arba momentu n}). \end{aligned}$$

4.1 teiginys. *Jei $m = EZ_1 \leq 1$ tai $\pi = 1$. jei $m > 1$, tai $\pi < 1$ yra vienintelis neneigiamas lygties*

$$s = P(s)$$

sprendinys, kuris yra mažesnis už vienetą.

Įrodymas. Pirmiausia įrodykime, kad π tikrai tenkina lygtį $s = P(s)$. Kadangi $\{Z_n = 0\} \subset \{Z_{n+1} = 0\}$, tai seka $\pi_n = P(Z_n = 0), n \geq 1$ yra nemažėjanti ir konverguoja prie π. Kadangi

$$P_{n+1}(s) = P(P_n(s)),$$

tai

$$\pi_{n+1} = P(\pi_n).$$

Perėję prie ribos, kai $n \to \infty$, gauname

$$\pi = P(\pi).$$

Lieka įrodyti, kad π yra mažiausias lygties $s = P(s)$ sprendinys intervale $[0, 1]$. Tarkime, q yra mažiausias lygties $s = P(s)$ sprendinys ir $q \in [0, 1]$. Kadangi $q \geq 0$,

$$\pi_1 = P(0) \leq P(q) = q,$$

todėl

$$\pi_2 = P_2(0) = P(\pi_2) \leq P(q) = q.$$

Tęsdami procesą, gauname

$$\pi_n \leq q.$$

Perėję prie ribos, kai $n \to \infty$, išvedame $\pi \leq q$. Taigi, π yra mažiausias sprendinys tarp visų sprendinių intervale $[0, 1]$.

Toliau pastebime, kad funkcija $P(s)$ yra iškila, nes

$$P''(s) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)p_k s^{k-2} \geq 0.$$

Kadangi funkcija $P(s)$ iškila ir $P(0) = p_0 > 0$, tai grafikai

$$y = P(s) \quad \text{ir} \quad y = s$$

intervale $0 \leq s \leq 1$ turi ne daugiau nei du bendrus taškus. Vienas iš jų yra $s = 1$. Jei $P'(1) = m \leq 1$, tai kairėje nuo 1, grafikas $y = P(s)$ negali būti žemiau $y = s$ ir, dėl funkcijos $P(s)$ iškilumo, vienintelis sankirtos taškas yra $s = 1$. Jei $P'(1) = m > 1$, tai grafikas $y = P(s)$ yra žemiau diagonalės, todėl turi būti dar vienas susikirtimo taškas. ∎

4.5 Pratimai

4.1 pratimas. 4.3 pavyzdžiui išveskite (4.2) ir (4.3) formules.

4.2 pratimas. Tegu X ir U yra nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai, U yra tolygiai pasiskirstęs intervale $[0, 2\pi]$, o a.d. X tankis yra

$$f_X(x) = 2x^3 \exp\{-1/(2x^4)\}, \quad x > 0.$$

sitikinkite, kad procesas

$$X_t = X^2 \cos(2\pi t + U), \quad t \geq 0,$$

yra Gausinis ir suraskite jo vidurkio bei kovariacinę funkcijas.

4.3 pratimas. Tegu $\varepsilon_n, n \geq 0$ yra seka nekoreliuotų atsitiktinių dydžių su nuliniu vidurkiu ir vienetine dispersija. Apibrėžkime procesą

$$Y_n = \sum_{i=0}^{r} a_i \varepsilon_{n-i}, \quad n \geq 0.$$

Čia $a_, a_2, \dots, a_r$ yra realūs skaičiai. Įrodykite, kad procesas $(Y_n, n \geq 1)$ yra stacionarus ir raskite jo autokovariacinę funkciją.

4.4 pratimas. Įrodykite, kad ekvivalentūs diskretieji procesai yra neatskiriami.

4.5 pratimas. Tarkime, $(Z_n, n = 0, \pm 1, \pm 2 \dots)$ yra nekoreliuoti atsitiktiniai dydžiai su nuliniu vidurkiu ir vienetine dispersija. Tegu atsitiktinis procesas $Y = (Y_n)$ tenkina autoregresinę lygtį:

$$T_n = \rho Y_{n-1} + Z_n, \quad n = 0, \pm 1, \dots.$$

Čia $|\rho| < 1$. Raskite proceso Y autokovariacinę funkciją.

4.6 pratimas. Tegu U yra tolygusis intervale $[0, 1]$ atsitiktinis dydis. Jo dvejetainis išdėstymas yra $U = \sum_{i=1}^{\infty} X_i 2^{-i}$. Apibrėžkime

$$V_n = \sum_{i=1}^{\infty} X_{i+n} 2^{-i}, \quad n \geq 0.$$

Įrodykite, kad procesas $V = (V_n, n \geq 0)$ yra griežtai stacionarus ir raskite jo autokovariacinę funkciją.

4.7 pratimas. Tegu $(X_n, n = \dots, -1, 0, 1, \dots)$ yra stacionarus procesas su nuliniu vidurkiu ir kovariacine funkcija $c_X(m)$. Įrodykite šiuos teiginius:

a) Jei skaitinė eilutė $\sum_k a_k$ konverguoja absoliučiai, tai eilutė $\sum_{k=0}^{\infty} a_k X_k$ konverguoja beveik tikrai ir kvadratinio vidurkio prasme.

b) Tegu

$$Y_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_k X_{n-k}, \quad n \in Z.$$

Čia $\sum_k |a_k| < \infty$. Raskite proceso Y autokovariacinę funkciją $c_Y(m), m = 0, \pm 1, \cdots$ ir įrodykite, kad

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} |c_Y(m)| < \infty.$$

5 *Puasono procesas*

5.1 *Apibrėžimas ir modeliavimas*

Pirmiausia apibrėšime homogeninį Puasono procesą.

5.1 apibrėžimas. *Homogeniniu Puasono procesu su parametru λ vadiname procesą $\{X_t, t \in [0,\infty)\}$ apibrėžtą tikimybinėje erdvėje $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, jei teisingos šios trys savybės:*

(P1) $X_0 = 0$

(P2) su visais $0 < t_1 < \cdots < t_n$ priaugliai $X_{t_1}, X_{t_2} - X_{t_1}, \ldots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ yra nepriklausomi;

(P3) Jei $0 \le s < t < \infty$, tai $X_t - X_s$ turi Puasono skirstinį su parametru $\lambda(t-s)$, t.y.

$$P(X_t - X_s = k) = \frac{[\lambda(t-s)]^k}{k!} \exp\{-\lambda(t-s)\},$$

su visais $k \in \mathbb{N}$.

Šio apibrėžimo (P2) ir (P3) sąlygos reiškia, kad Puasono procesas turi nepriklausomus ir stacionarius priauglius.

Puasono proceso konstravimui labai svarbūs yra eksponentiniai atsitiktiniai dydžiai. Priminsime, kad a.d. τ turi eksponentinį skirstinį su parametru λ, jei

$$P(\tau \le t) = 1 - e^{-\lambda t}, \quad t \ge 0.$$

Tai yra tolydus atsitiktinis dydis su tankio funkcija

$$f_\tau(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t}, & \text{kai } t \ge 0, \\ 0, & \text{kitur.} \end{cases}$$

Svarbiausios eksponentinio atsitiktinio dydžio charakteristikos yra šios.

- *Vidurkis* $E\tau = 1/\lambda$:

$$\begin{aligned} E\tau &= \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)dx = \int_0^\infty x\lambda e^{-\lambda x}dx \\ &= -xe^{-\lambda x}\Big|_0^\infty + \int_0^\infty e^{-\lambda x}dx = \frac{1}{\lambda}. \end{aligned}$$

- *Dispersija* $var(\tau) = 1/\lambda^2$. Pirmiausia suskaičiuokime antrąjį momentą:

$$
\begin{aligned}
E\tau^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x)dx = \int_0^{\infty} x^2 \lambda e^{-\lambda x} dx \\
&= -x^2 e^{-\lambda x}\Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} 2x e^{-\lambda x} dx = \frac{2}{\lambda^2}.
\end{aligned}
$$

Taigi

$$var\tau = E\tau^2 - (E\tau)^2 = \frac{1}{\lambda^2}.$$

- *Atminties nebuvimas*: $P(\tau > t + s | \tau > t) = P(\tau > s)$:

$$P(\tau > t + s | \tau > t) = \frac{P(\tau > t + s)}{P(\tau > t)} = \frac{e^{-\lambda(t+s)}}{e^{-\lambda t}} = P(\tau > s).$$

Keletas kitų svarbių savybių.

- Jei $\tau_1, \ldots, \tau_m$ yra nepriklausomi eksponentiniai atsitiktiniai dydžiai su parametrais atitinkamai $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$, tai atsitiktinis dydis $V = \min\{\tau_1, \ldots, \tau_m\}$ yra eksponentinis su parametru $\lambda_1 + \cdots + \lambda_m$:

$$
\begin{aligned}
P(\min\{\tau_1, \ldots, \tau_n) > t) &= P(\tau_1 > t, \ldots, \tau_n > t) \\
&= P(\tau_1 > t) \cdots P(\tau_n > t) \\
&= \prod_{k=1}^{n} e^{-\lambda_k t} = \exp\{-(\lambda_1 + \cdots + \lambda_n)t\}.
\end{aligned}
$$

- $P(\tau_i = \min\{\tau_1, \ldots, \tau_m\}) = \lambda_i/(\lambda_1 + \cdots + \lambda_m)$.

Norėdami įrodyti šią savybę, pirmiausia tarkime, kad S ir τ yra nepriklausomi eksponentiniai a.d. su parametrais atitinkamai λ ir μ. Tuomet

$$
\begin{aligned}
P(S < \tau) &= \int_0^{\infty} P(\tau > s) f_S(s) ds = \int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda s} e^{-\mu s} ds \\
&= \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \int_0^{\infty} (\lambda + \mu) e^{-(\lambda+\mu)s} ds = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}.
\end{aligned}
$$

Lieka pasinaudoti šia ir prieš tai išvestąja savybėmis.

- Jei $I = \text{argmin}\{\tau_1, \ldots, \tau_m\}$, tai

$$P(I = i) = \lambda_i/(\lambda_1 + \cdots + \lambda_m).$$

Tegu $I = i$, $S = \tau_i$, $U = \min_{j \neq i} \tau_j$. Atsitiktinis dydis U yra eksponentinis su parametru

$$\mu = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n - \lambda_i.$$

Taigi

$$P(I = i) = P(S < U) = \frac{\lambda_i}{\lambda_i + \mu} = \frac{\lambda_i}{\lambda_1 + \cdots + \lambda_n}.$$

- a.d. I ir V yra nepriklausomi.

Suskaičiuokime bendrą šių a.d. skirstinį:

$$\begin{aligned}
P(I=i,V=t) &= P(\tau_i=t,\tau_j>t,\ \text{kai } j\neq i)\\
&= \lambda_i e^{-\lambda_i t}\prod_{j\neq i} e^{-\lambda_j t}\\
&= \frac{\lambda_i}{\lambda_1+\cdots\lambda_n}(\lambda_1+\cdots+\lambda_n)e^{-(\lambda_1+\cdots+\lambda_n)t}\\
&= P(I=i)P(V=t),
\end{aligned}$$

nes a.d. V turi eksponentinį skirstinį su parametru $\lambda_1+\cdots+\lambda_n$.

5.1 teiginys. *Jei $\tau_1,\tau_2,\ldots$ nepriklausomi eksponentiniai su parametru λ, tai a.d. $Z_n=\tau_1+\cdots+\tau_n$ tankio funkcija yra*

$$f_{Z_n}(t)=\lambda e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!},\quad t\geq 0.$$

Įrodymas. Įrodysime pasitelkę matematinę indukciją. Teiginys akivaizdžiai teisingas, kai $n=1$ (priminsime, kad pagal susitarimą $0!=1$). Tarkime, kad teiginys teisingas, kai $n=m$ ir suskaičiuokime $f_{Z_{m+1}}(t)$. Kadangi a.d. Z_m ir τ_{m+1} yra nepriklausomi, tai

$$\begin{aligned}
f_{Z_{m+1}}(t) &= \int_0^t f_{Z_n}(t)f_{\tau_{m+1}}(t-s)ds\\
&= \int_0^t \lambda e^{-\lambda s}\frac{(\lambda s)^m}{m!}\lambda e^{-\lambda(t-s)}ds\\
&= e^{\lambda t}\lambda^{m+1}\int_0^t\frac{s^m}{m!}ds\\
&= \lambda e^{-\lambda t}\frac{\lambda^m t^m}{m!}.
\end{aligned}$$

Teiginys įrodytas. ∎

Tegu $\tau_1,\tau_2,\ldots$ yra nepriklausomi vienodai pasiskirstę eksponentiniai atsitiktiniai dydžiai, su pasiskirstymo funkcija

$$F_\tau(x)=P(\tau_i\leq x)=1-e^{-\lambda x},\quad x\geq 0.$$

Atsitiktinį dydį τ_i interpretuojame, kaip i-ojo kliento laukimo laiką. Apibrėžkime

$$T_n=\tau_1+\cdots+\tau_n,\quad n=1,2,\ldots.$$

Atsitiktinį dydį T_n interpretuojame, kaip n-ojo kliento atvykimo laiką. Pastebėkime, kad $\lim_{n\to\infty} T_n = \infty$ beveik tikrai, nes pagal didžiųjų skaičių dėsnį

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} T_n = \frac{1}{\lambda} \quad \text{b.t.}$$

Apibrėžkime procesą $(N_t, t \geq 0)$ taip:

$$N_0 = 0, \quad N_t = \max\{n \geq 1 : T_n \leq t\}, \quad t > 0.$$

Ekvivalenčiai

$$N_t = \sum_{n=1}^{\infty} n \mathbf{1}_{T_n \leq t < T_{n+1}}, \quad t > 0.$$

5.1 teorema. *Atsitiktinis procesas $(N_t, t \geq 0)$ yra homogeninis Puasono procesas su parametru (intensyvumu) λ.*

Įrodymas. Irodysime, kad procesas $(N_t, t \geq 0)$ turi (P1)–(P3) savybes. ■

5.1 lema. *Su kiekvienu $s > 0$, N_s yra Puasono atsitiktinis dydis su parametru λs.*

Įrodymas. Reikia pastebėti, kad įvykiai $\{N_s = n\}$ ir $\{T_n \leq s < T_{n+1}\}$ yra lygūs, todėl

$$P(N_s = n) = P(T_n \leq s < T_{n+1}).$$

Pastaroji tikimybė lygi

$$\begin{aligned}
P(T_n \leq s < T_n + \tau_{n+1}) &= \int_0^\infty P(t \leq s < t + \tau_{n+1}) f_{T_n}(t) dt \\
&= \int_0^s P(\tau_{n+1} > s - t) f_{T_n}(t) dt \\
&= \int_0^s e^{-(s-t)\lambda} \lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} dt \\
&= e^{-\lambda s} \frac{(\lambda s)^n}{n!}.
\end{aligned}$$

Lema įrodyta. ■

5.2 lema. *Atsitiktinis dydis $N_{t+s} - N_s$ yra Puasono su parametru λt ir nepriklauso nuo atsitiktinių dydžių $N_u, 0 \le u \le s$.*

5.3 lema. *Atsitiktinio proceso $(N_t, t \ge 0)$ priaugliai yra nepriklausomi.*

Jau matėme, kad Puasono proceso trajektorijos yra trūkios su vienetiniais šuoliukais. Tačiau Puasono procesas yra tolydus antrojo momento prasme:

$$E(N_t - N_s)^2 = \lambda(t-s) + [\lambda(t-s)]^2 \to 0 \quad \text{kai} \quad s \to t.$$

Homogeninis Puasono procesas su intensyvumu λ gali būti charakterizuotas kaip sveikareikšmis procesas, prasidedantis nulyje, nemažėjančių trajektorijų, nepriklausomų priauglių kuriam tolygiai pagal t

$$P(X_{t+h} - X_t = 0) = 1 - \lambda h + o(h)$$
$$P(X_{t+h} - X_t = 1) = \lambda h + o(h).$$

Kodėl Puasono procesas yra svarbus? Spęskime tokį uždavinį. Tegu n MIF studentų nepriklausomai vienas nuo kito eina pietauti tarp 12 ir 13 val. su tikimybe λ/n. Be to, tas kas nusprendžia eiti, laiką pasirenka pagal tolygų skirstinį. Tikimybė, kad lygiai k studentų pietaus tarp 12 ir 13 val. lygi

$$\binom{n}{k}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \to \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},$$

kai $n \to \infty$.

Pavyzdžio tęsinys.

5.2 teorema. *Tarkime, su kiekvienu $n \ge 1$, $X_{nk}, k = 1, \dots, n$ yra nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai,*

$$P(X_{ni} = 1) = p_{ni}, \qquad P(X_{ni} = 0) = 1 - p_{ni},$$

$i = 1, \dots, n$. Tegu

$$S_n = X_{n1} + \dots + X_{nn}, \quad \lambda_n = ES_n = p_{n1} + \dots + p_{nn}$$

ir Z_n yra Puasono atsitiktinis dydis su parametru λ_n. Tuomet, su bet kuria aibe $A \subset N$

$$\big|P(S_n \in A) - P(Z_n \in A)\big| \le \sum_{i=1}^n p_{ni}.$$

5.1 išvada. *Jei $\lambda_n \to \lambda$ ir $\max_{1 \le k \le n} p_{nk} \to 0$ kai $n \to \infty$, tai*

$$\sup_{A \subset N} \big|P(S_n \in A) - P(Z_n \in A)\big| \to 0.$$

5.2 Puasono procesų suma ir išskaidymas

Nagrinėkime du nepriklausomus homogeninius Puasono procesus $N = (N_t, t \geq 0)$ ir $M = (M_t, t \geq 0)$ su intensyvumais atitinkamai λ ir μ. Tuomet procesas $L_t = N_t + M_t, t \geq 0$ vadinamas procesų N ir M superpozicija.

5.2 teiginys. *Atsitiktinis procesas $L = (L_t, t \geq 0)$ yra homogeninis Puasono procesas su intensyvumu $\lambda + \mu$.*

Įrodymas. Akivaizdu, kad L turi nepriklausomus priauglius ir $L_0 = 0$. Pakanka įsitikinti, kad su bet kuriais $0 \leq s < t$ atsitiktinis dydis $L_t - L_s$ yra Puasono su intensyvumo parametru $(\lambda + \mu)(t - s)$. Suskaičiuokime tikimybes:

$$
\begin{aligned}
P(L_t - L_s = n) &= \sum_{k=0}^{n} P(N_t - N_s = k, M_t - M_s = n - k) \\
&= \sum_{k=0}^{n} e^{-\lambda(t-s)} \frac{(\lambda(t-s))^k}{k!} e^{-\mu(t-s)} \frac{(\mu(t-s))^{n-k}}{(n-k)!} \\
&= e^{-(\lambda+\mu)(t-s)} \frac{((\lambda+\mu)(t-s))^n}{n!}.
\end{aligned}
$$

Pirmame žingsnyje pasinaudojome pilnosios tikimybės formule, o antrame - procesų N ir M nepriklausomumu. ∎

Toliau tegu $N = (N_t, t \geq 0)$ yra Puasono procesas su intensyvumu λ. Tegu $(X_n, n \geq 1)$ yra seka nepriklausomų Bernulio atsitiktinių dydžių su parametru $p \in (0, 1)$, nepriklausomu nuo N:

$$P(X_n = 1) = p = 1 - P(X_m = 0), \quad n = 1, 2, \ldots$$

Pažymėkime $S_n = X_1 + \cdots + X_n, n \geq 1$. Interpretuokime S_n, kaip įvykio pasirodymų skaičių po n bandymų ir tegu n-asis bandymas yra vykdomas n-ojo atvykimo laiku T_n. Tokiu atveju, įvykio pasirodymų skaičius laiko intervale $[0.t]$ yra

$$M_t = S_{N_t},$$

o neįvykimų skaičius -

$$L_t = N_t - S_{N_t}.$$

5.3 teiginys. *Atsitiktiniai procesai $L = (L_t, t \geq 0)$ ir $M = (M_t, t \geq 0)$ yra nepriklausomi Puasono procesai su intensyvumais atitinkamai λp ir $\lambda(1 - p)$.*

Įrodymas. Pakanka įsitikinti, kad įvykiai

$$A = \{M_t - M_s = m, L_t - L_s = k\}, \quad 0 \leq s < t,$$

nepriklauso nuo atsitiktinių dydžių $\{M_u, L_u; u \le s\}$ ir

$$P(A) = e^{-\lambda p(t-s)} \frac{(\lambda p(t-s))^m}{m!} e^{-\lambda(1-p)(t-s)} \frac{(\lambda(1-p)(t-s))^k}{k!}.$$

Galime pastebti, kad

$$A = \{N_t - N_s = m + k, S_{N_t} - S_{N_s} = m\}.$$

Be to, σ algebra $\sigma(M_u, L_u; u \le s)$ sutampa su σ algebra

$$\mathcal{F} = \sigma(N_u, u \le s; Y_1, \ldots, Y_{N_s}).$$

Akivaizdu, kad A nepriklauso nuo $\mathcal{F}$. Galiausiai

$$\begin{aligned}
P(A) &= \sum_{n=0}^{\infty} P(A \cap \{N_s = n\}) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} P(N_s = n, N_t - N_s = m + k, S_{m+k+n} - S_n = m) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} P(N_s = n, N_t - N_s = m + k) P(S_{m+k+n} - S_n = m) \\
&= P(N_t - N_s = m + k) P(S_{m+k} = m) \\
&= e^{-\lambda(t-s)} \frac{(\lambda(t-s))^{m+k}}{(m+k)!} \frac{(m+k)!}{m!k!} p^m (1-p)^k.
\end{aligned}$$

Teiginys įrodytas. ■

5.3 Sudėtinis Puasono procesas

Kiek pinigų išleido pikėjai parduotuvėje iki laiko momento t? Koks informacijos kiekis atėjo į serverį iki laiko momento t? Šiems ir panašiems klausimams spręsti galime pasinaudoti sudėtiniu Puasono procesu.

5.2 apibrėžimas. *Tegu $Y_1, Y_2, \ldots$ yra nepriklausomi vienodai pasiskirstę atsitiktiniai dydžiai ir nepriklauso nuo Puasono proceso $(N_t, t \ge 0)$. Tuomet procesas*

$$Z_t = \sum_{k=1}^{N_t} Y_k, \quad t \ge 0,$$

vadinamas sudėtiniu Puasono procesu.

Jei Puasono procesu $(N_t, t \geq 0)$ modeliuosime ateinančių į parduotuvę klientų skaičių, o atsitiktiniu dydžiu Y_j aprašysime j'ojo pirkėjo išleidžiamą pinigų sumą, tai sudėtinis Puasono procesas $(Z_t, t \geq 0)$ kaip tik aprašys pinigų kiekį, kurį pirkėjai išleidžia parduotuvėje. Atsitiktinių dydžių $Y_1, Y_1, \ldots$ nepriklausomumas čia yra visai natūralus.

5.3 teorema. *Tegu $Y_1, Y_2, \ldots$ yra nepriklausomi vienodai pasiskirstę atsitiktiniai dydžiai nepriklausantys nuo sveikareikšmio neneigiamo atsitiktinio dydžio N. Apibrėžkime $S_N = X_1 + \cdots + X_N$ ($S_N = 0$, jei $N = 0$). Tuomet*

(a) jei $EN < \infty$, tai $ES_N = EY \cdot EN$;

(b) jei $EN^2 < \infty$, tai $var(S_N) = ENvar(Y) + var(N)(EY)^2$;

(c) jei N yra Puasono su parametru λ, tai $var(S_N) = \lambda EY^2$.

Įrodymas. Pasinaudijame pilnosios tikimybės formule:

$$\begin{aligned} ES_N &= \sum_{n=0}^{\infty} E(S_N|N=n)P(N=n) = \sum_{n=0}^{\infty} nEY_1 P(N=n) \\ &= ENEY. \end{aligned}$$

Analogiškai skaičiuojame ir variaciją. Pirmiausia pastebime, kad

$$E(S_N^2|N=n) = ES_n^2 = nvar(Y_1) + (nEY_1)^2.$$

Toliau skaičiuojame kaip anksčiau:

$$\begin{aligned} ES_N^2 &= \sum_{n=0}^{\infty} E(S_N^2|N=n)P(N=n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} [nvar(Y_1) + n^2(EY_1)^2]P(N=n) \\ &= (EN)var(Y_1) + EN^2(EY_1)^2. \end{aligned}$$

Lieka suskaičiuoti variaciją:

$$\begin{aligned} var(S_n) &= ES_N^2 - (ES_N)^2 \\ &= (EN)var(Y_1) + EN^2(EY_1)^2 - (EN \cdot EY_1)^2 \\ &= (EN)var(Y_1) + var(N)(EY_1)^2. \end{aligned}$$

Atskiru atveju, kai N yra Puasono atsitiktinis dydis, tai $EN = var(N) = \lambda$, todėl

$$var(S_N) = \lambda(var(Y_1) + (EY_1)^2) = \lambda EY_1^2.$$

Teorema įrodyta. ■

5.4 teiginys. *Sudėtinis Puasono procesas turi nepriklausomus priauglius, o priaugliai $Z_t - Z_s$ turi charakteristinę funkciją*

$$e^{(c_{Y_1}(x)-1)\lambda(t-s)}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Čia c_{Y_1} yra atsitiktinio dydžio Y_1 charakteristinė funkcija.

Įrodymas. Fiksuokime $0 \le s < t$. Galime pastebėti, kad

$$\mathcal{G} := \sigma(Z_u, u \le s) \subset \mathcal{F} := \sigma(N_u, u \le s; Y_1, \ldots, Y_{N_s}).$$

Iš čia gauname, kad $Z_t - Z_s = S_{N_t} - S_{N_s}$ nepriklauso nuo $\mathcal{G}$. Lieka suskaičiuoti charakteristinę funkciją:

$$\begin{aligned}
Ee^{ix(Z_t-Z_s)} &= \sum_{m,k=0}^{\infty} Ee^{ix(Z_t-Z_s)}\mathbf{1}_{N_s=m,N_t-N_s=k} \\
&= \sum_{m,k=0}^{\infty} Ee^{ix(S_{m+k}-S_m)}\mathbf{1}_{N_s=m,N_t-N_s=k} \\
&= \sum_{m,k=0}^{\infty} Ee^{ixS_k}P(N_s=m, N_t-N_s=k) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\Big[Ee^{ixY_1}\Big]^k e^{-\lambda(t-s)}\frac{[\lambda(t-s)]^k}{k!} \\
&= \exp\{(c_{Y_1}(x)-1)\lambda(t-s)\}.
\end{aligned}$$

teiginys pilnai įrodytas. ∎

5.4 Nehomogeniškas Puasono procesas

5.3 apibrėžimas. *Nehomogeniniu Puasono procesu su dažnumo funkcija $\lambda(r), r \ge 0$, vadiname procesą $\{N(t), t \in [0,\infty)\}$ apibrėžtą tikimybinėje erdvėje $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, jei teisingos šios trys savybės:*

(P1) $N(0) = 0$

(P2) su visais $0 < t_1 < \cdots < t_n$ priaugliai $X_{t_1}, N(t_2) - N(t_1), \ldots, N(t_n) - N(t_{n-1})$ yra nepriklausomi;

(P3) Jei $0 \le s < t < \infty$, tai $N(t) - N(s)$ turi Puasono skirstinį su parametru $\int_0^{t-s}\lambda(r)dr$.

Esminis skirtumas nuo homogeninio yra tas, kad laukimo laikai nebėra pasiskirstę pagal eksponentinį skirstinį ir nėra nepriklausomi.

5.5 Pratimai

5.1 pratimas. Tegu X ir Y yra eksponentiniai atsitiktiniai dydžiai su parametrais atitinkamai λ ir μ. Pažymėkime $U = \min\{X, Y\}$, $V = \max\{X, Y\}$. Raskite

(a) $E(U)$,

(b) $E(V - U)$,

(c) $E(V)$,

(c) kiokią išraišką vidurkiui EV, pritaikę tapatybę $V = X + Y - U$.

5.2 pratimas. Tegu T_1 ir T_2 yra eksponentiniai atsitiktiniai dydžiai su parametrais atitinkamai λ_1 ir λ_2. Pažymėkime $U = \min\{T_1, T_2\}$, $V = \max\{T_1, T_2\}$. Tegu $I = \operatorname{argmin}\{T_1, T_2\}$. Raskite vektoriaus $(U, V - U, I)$ bendrą tankio funkciją ir įrodykite, kad U ir $V - U$ yra nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai.

5.3 pratimas. Tarkime, $(N_t, t \geq 0)$ yra Puasono procesas su intensyvumu $\lambda = 15$. Suskaičiuokite

(a) $P(N_6 = 9)$;

(b) $P(N_8 = 10 | N_9 = 6)$;

(c) $P(N_9 = 6 | N_8 = 10)$.

5.4 pratimas. Tegu $(N_t, t \geq 0)$ yra Puasono procesas su parametru $\lambda = 5$. Tegu T_n yra n-ojo kliento atvykimo laikas. Raskite

(a) $E(T_{12})$;

(b) $E(T_{12} | N_2 = 5)$;

(c) $E(N_5 | N_2 = 5)$.

5.5 pratimas. Pirmoji ir antroji futbolo komandos muša įvarčius pagal Puasono procesą su parametrais atitinkamai 1 ir 2. Tarkime $N_0^{(1)} = 2$, $N_0^{(2)} = 1$.

(a) Kokia tikimybė, kad $N_t^{(1)} = 5$ anksčiau, nei $N_t^{(2)} = 5$?

(b) Atsakykite į tą patį klausimą, kai atitinkamų Puasono procesų parametrai yra λ_1 ir λ_2.

5.6 pratimas. Pirkėjai į parduotuvę užeina pagal Puasono dėsnį su intensyvumu $\lambda = 10$ per valandą. Suraskite vidutinį pardavimų kiekį per darbo dieną (8 val.), jei žinoma, kad pirkėjas ką nors nuperka su tikimybe 0.3.

5.7 pratimas. Parduotuvė turi tris įėjimus. Per kiekvieną iš jų pirkėjai ateina pagal Puasono dėsnį su intensyvumais atitinkamai $\lambda_1 = 100$, $\lambda_2 = 90$. $\lambda_3 = 120$ per valandą. Be to, 30 procentų ateina vyrų. Vyrai ką nors nuperka su tikimybe 0.8, o moterys - 0.1. Kiekvienas pirkėjas vidutiniškai išleidžia 12 Lt.

(a) Kiek vidutiniškai pirkėjai išleidžia parduotuvėje per 10 val.

(b) Kokia tikimybė, kad trečioji pirkėja moteris apsipirkti ateis per pirmas 15 min.? Koks yra tikėtinas jos atvykimo laikas?

5.8 pratimas. Tarkime, $Y_1, Y_2, \ldots$ yra neneigiami nepriklausomi vienodai pasiskirstę atsitiktiniai dydžiai. Tegu $Z_0 = 0, Z_n = Y_1 + \cdots + Y_n$, $n \geq 1$. Atsitiktinį dydį Z_n interpretuojame, kaip n-ojo kliento atvykimo į parduotuvę laiką. Atsitiktinis procesas $(Z_n, n \geq 0)$ dar vadinamas atstatymo procesu. Tegu N_t yra atvykimų skaičius laike $[0, t]$.

(a) Įrodykite, kad su visais $n \geq 1$ ir $t \geq 0$, $P(N_t \geq n) = P(Z_n \leq t)$;

(b) Įsitikinkite, kad $\lim_{t\to\infty} N_t = \infty$ b.t.

(c) Įrodykite, kad

$$\frac{Z_{N_t}}{N_t} \xrightarrow{b.t.} a = EY_1.$$

(d) Pritaikę nelygybes $Z_{N_t} \leq t < Z_{N_t+1}$ įrodykite, kad

$$\frac{N_t}{t} \xrightarrow{b.t.} \frac{1}{EY_1},$$

kai $t \to \infty$.

5.9 pratimas. Tegu $\tau_1, \tau_2, \ldots$ yra nepriklausomi vienodai pasiskirstę atsitiktiniai dydžiai su parametru λ, o ν yra nepriklausomas atsitiktinis dydis su $P(\nu = n) = (1-p)^{n-1}$, $n \geq 1$. Raskite sumos $S_\nu = \tau_1 + \cdots \tau_\nu$ skirstinį.

5.10 pratimas. Tegu N yra Puasono procesas su parametru λ, L yra paskutinio atvykimo intervale $[0, t]$ laikas ($L = 0$, jei atvykimų nebuvo). Raskite vidurkį $E(t - L)$ ir išnagrinėkite jo elgesį, kai $t \to \infty$.

6 Markovo grandinės

6.1 Markovo grandinės apibrėžimas

Pradėkime pavyzdžiu.

6.1 pavyzdys. *Paprastasis lošimas.*

Nagrinėkime tokį kazino lošimą: kiekvienu ėjimu lošėjas išlošia 1 Lt su tikimybe $p = 0.4$ ir pralošia 1 Lt su tikimybe $q = 1 - p = 0.6$. Be to, taikoma taisyklė: lošimas baigiamas, kai arba lošėjas susikrauna N Lt kapitalą ir pats pasitraukia, arba praranda visus savo pinigus (kai jo kapitalas lygus nuliui) ir lošimą nutraukia kazino.

Tarkime, X_n yra pinigų kiekis, kurį lošėjas turi po n-tojo ėjimo. Turime procesą $X_k, k = 0, 1, \ldots, n, \ldots$ Jis turi taip vadinamą „Markovo savybę“. Tai reiškia, kad X_{n+1}'sios reikšmės prognozavimui svarbu yra tik tai, kokią reikšmę įgijo dydis X_n ir visai nesvarbu, kokios buvo ankstesnės proceso reikšmės iki laiko momento $n-1$ (iki $n-1$'ojo ėjimo). Tikrai, jei lošėjas tęs lošimą po n'ojo ėjimo, tai jo kapitalas yra $X_n = i$, $0 < i < N$. Tuomet, kokia bebūtų proceso realizacija iki $n - 1$'ojo momento, tarkime $i_{n-1}, i_{n-2}, \ldots, i_1, i_0$

$$P(X_{n+1} = i + 1 | X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, X_0 = i_0) = 0.4,$$

nes norint kapitalą padidinti vienu litu, būtina išlošti.

Taigi su bet kuriais $i, j, i_{n-1}, \ldots, i_0$

$$P(X_{n+1} = j | X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, X_0 = i_0) = P(X_{n+1} = j | X_n = i)$$
$$= p(i, j).$$

Tikimybė $p(i, j)$ vadinama perėjimo iš būsenos i į būseną j tikimybe. Procesas $X_0, X_1, \ldots$ vadinamas Markovo grandine su baigtine būsenų aibe (lošimo pavyzdyje tai yra aibė $\{0, 1, \ldots, N\}$) ir perėjimo matrica

$$p(i, j) = P(X_{n+1} = j | X_n = i), \quad i, j = 0, 1, \ldots, N.$$

Intuityviai yra aišku, kad perėjimo tikimybės $p(i, j)$ aprašo lošimą, jei žinome pradinę būseną. Tai yra ir svarbiausia informacija aprašanti Markovo grandinę. Nesunku suskaičiuoti, kad lošimo pavyzdyje perėjimo tikimybės yra

$$p(i, i + 1) = 0.4, \quad p(i, i - 1) = 0.6, \quad \text{kai} \quad 0 < i < N$$
$$p(0, 0) = 1, \quad p(N, N) = 1.$$

Kai $N = 5$, perėjimo matrica yra

	0	1	2	3	4	5
0	$1,0$	0	0	0	0	0
1	$0,6$	0	$0,4$	0	0	0
2	0	$0,6$	0	$0,4$	0	0
3	0	0	$0,6$	0	$0,4$	0
4	0	0	0	$0,6$	0	$0,4$
5	0	0	0	0	0	$1,0$

Dabar jau galime griežčiau apibrėžti Markovo grandinę. Tegu E yra ne didesnė nei skaiti aibė, $\pi = (\pi_i, i \in E)$ tikimybių skirstinys, t.y, $\pi_i \geq 0$ su visais $i \in E$ ir $\sum_{i \in E} \pi_i = 1$.

6.1 apibrėžimas. *Stochastinis procesas $X = \{X_t, t = 0, 1, 2, \dots\}$, apibrėžtas tikimybinėje erdvėje $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ su reikšmių sritimi $E \subset \{0, 1, 2, \dots\}$ vadinamas Markovo grandine su pradiniu reikšmių skirstiniu $\pi = (\pi_i, i \in E)$, jei*

i) $P(X_0 = i) = \pi_i, \quad i \in E;$

ii) su visais $j \in E$ ir visais $t \in \{0, 1, \dots\}$

$$P(X_{t+1} = j | X_0, \dots, X_j) = P(X_{t+1} = j | X_t).$$

Markovo grandinės reikšmių sritis E vadinama būsenų aibe, o jos elementai - būsenomis. Tikimybė, kad Markovo grandinė iš būsenos i laiko momentu t pereis į būseną j laiko momentu $t+1$ vadinama perėjimo tikimybe ir žymima

$$p^{t,t+1}(i, j) = P(X_{t+1} = j | X_t = i), \quad i, j \in E.$$

Markovo grandinė vadinama *homogenine*, jei perėjimo tikimybės nepriklauso nuo laiko, t.y.

$$p^{t,t+1}(i, j) = p(i, j) = P(X_{t+1} = j | X_t = i), \quad i, j \in E, \quad t = 0, 1, 2, \dots$$

Šiuo atveju matrica

$$p = (p(i, j), \ i, j \in E)$$

vadinama Markovo grandinės X perėjimo matrica. Ji pasižymi šiomis savybėmis:

(i) $p(i, j) \geq 0$ su visais $i, j \in E$, nes $p(i, j)$ yra tikimybės;

(ii) $\sum_{j \in E} p(i, j) = 1$ su visais $i \in E$, nes pereiti iš būsenos i galima į kurią nors būseną $j \in E$.

Paskutinioji lygybė reiškia, kad perėjimo matricos kiekvienos eilutės suma turi būti lygi vienam.

Be to, kiekviena matrica, pasižyminti minėtomis dviem savybėmis, aprašo Markovo grandinę. Labai svarbu, ypač taikymams, Markovo grandines mokėti modeliuoti. Kaip tą padaryti? Prieš atsakydami į šį klausimą, susipažinkime su keliomis Markovo grandinėmis.

Pastebėsime, kad Markovo grandinės apibrėžimo *i*) ir *ii*) savybių pakanka tam, kad galėtume surasti proceso baigtiniamačius skirstinius.

6.1 teiginys. *Jei procesui* $\{X_n, n \geq 0\}$ *teisingos* 6.1 *apibrėžimo* i) *ir* ii) *savybės, tai*

$$P(X_0 = i_0, X_1 = i_1, \dots, X_k = i_k) = \pi_{i_0} p_{i_0,i_1} \cdots p_{i_{k-1}i_k}, \tag{6.1}$$

su bet kuriais $i_0, \dots, i_k \in E$ *ir bet kuriuo* $k \geq 0$.

Įrodymas. Pasinaudosime vadinamąja *grandinine tapatybe.* Bet kuriems įvykiams $A_0, A_1, \dots, A_k$

$$P\Big(\cap_{i=0}^{k} A_i\Big) = P\Big(A_k | \cap_{i=0}^{k-1} A_i\Big) \cdots P(A_1|A_0)P(A_0),$$

kai $P(\cap_{i=0}^{j} A_i) > 0, j = 0, 1, \dots, k-1$.

Tarkime, (i)ir (ii) savybės yra teisingos. Pažymėkime $A_j = (X_j = i_j)$ ir tegu

$$P(X_0 = i_0, \dots, X_j = i_j) > 0, \quad j = 0, 1, \dots, k-1. \tag{6.2}$$

Pritaikę grandininę tapatybę įvykiams A_k ir panaudoję (i), (ii) savybes, gauname

$$\begin{aligned}
&P(X_0 = i_0, \dots, X_k = i_k) = \\
&\prod_{j=1}^{k} P(X_j = i_j | X_0 = i_0, \dots, X_{j-1} = i_{j-1}) P(X_0 = i_0) = \\
&\prod_{j=1}^{k} P(X_j = i_j | X_{j-1} = i_{j-1}) \pi_{i_0} = \pi_{i_0} \prod_{j=1}^{k} p_{i_{j-1} i_j}.
\end{aligned}$$

Ką daryti, jei (6.2) kuriam nors j yra neteisinga. Išnagrinėkime šį variantą. Pažymėkime

$$j^* = \inf\{j \geq 0 : \ P(X_0 = i_0, \dots, X_j = i_j) = 0\}.$$

Jei $j^* = 0$ tai $\pi_{i_0} = 0$ ir teiginys trivialiai teisingas. Jei $j^* > 0$ tai, kaip jau įsitikinome,

$$P(X_0 = i_0, \dots, X_{j^*-1} = i_{j^*-1}) = \pi_{i_0} \prod_{j=1}^{j^*-1} p_{i_{j-1} i_j}.$$

Iš čia

$$p_{i_{j^*-1} i_{j^*}} = P(X_0 = i_0, \dots, X_{j^*} = i_{j^*}) / P(X_0 = i_0, \dots, X_{j^*-1} = i_{j^*-1}) = 0$$

ir formulė vėl teisinga. ∎

6.2 Pavyzdžiai

Panagrinėkime dar kelis pavyzdžius, kurie paaiškins Markovo grandinių svarbą.

6.2 pavyzdys. *Oro grandinė.*

Nagrinėkime tris oro būsenas: 1=lyja, 2=debesuota, 3=saulėta. Tarkime, kad oro kaita vyksta pagal homogeninę Markovo grandinę, aprašomą šia perėjimo matrica:

	1	2	3
1	0.4	0.6	0
2	0.2	0.5	0.3
3	0.1	0.7	0.2

Koks oras bus rytoj, už dviejų dienų ir pan.?

6.3 pavyzdys. *Gyvenimo lygių grandinė.*

Tarkime, kad iš kartos į kartą, šeimos keičia savo pajamų lygį, kurių yra trys: mažos (m), vidutinės (v), aukštos (a), pagal šią Markovo grandinę:

	m	v	a
m	0.6	0.3	0.1
v	0.2	0.7	0.1
a	0.1	0.3	0.6

Ar populiacijos dalys šiose trijuose pajamų lygiuose stabilizuojasi laikui bėgant? Jei taip, tai kokios yra ribinės proporcijos ir, ar jas galime išskaičiuoti iš perėjimo matricos?

6.4 pavyzdys. *Nohomogeninės Markovo grandinės pavyzdys.*

Pirmasis žingsnis vertinant kredito riziką yra reitingavimo sistemos su tam tikromis reitingų kategorijomis nustatymas. Kartu turi būti nustatytos ir reitingų kaitos tikimybės. Paprastai jos skaičiuojamos kiekvieniems metams ir metai iš metų gali skirtis. Tai daro įvairios kompanijos, pavyzdžiui Moody, Standard&Poors ir t.t.

S&P reitingavimo sistemos aukščiausias reitingas yra AAA, toliau eina AA, A, BBB,..., žemiausias CCC po kurio eina tik bankrotas. Vienerių metų perėjimo tikimybės nustatytos šios:

	AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC	D
AAA	0.9081	0.0833	0.068	0.060	0.012	0	0	0
AA	0, 007	0.9065	0.0779	0.0064	0.0006	0.0014	0.0002	0
A	0.0009	0.0227	0.95	0.0552	0.0074	0.00026	0.0001	0.0006
BBB	0.0003	0.0033	0.0595	0.8693	0.053	0.0117	0.0112	0.0018
BB	0.0002	0.0014	0.0067	0.0773	0.8053	0.0884	0.01	0.0106
B	0	0.0011	0.0024	0.0043	0.0648	0.8346	0.0407	0.052
CCC	0	0	0.0022	0.013	0.0238	0.1124	0.6486	0.1979
D	0	0	0	0	0	0	0	1

Ši perėjimo tikimybių lentelė naudojama vertinant kredito riziką.

6.5 pavyzdys. *Gamybos proceso grandinė.*

Mašina turi tris kritinius gendančius mazgus, bet gali dirbti jei bent du iš tų mazgų dirba. Kai du kurie nors mazgai sugenda, jie pakeičiami ir mašina kitą dieną toliau dirba. Modeliuokime Markovo grandinę, kurios būsenų aibė yra sugedę mazgai, t.y. $\{0, 1, 2, 3, 12, 13, 23\}$. Jei tarsime, kad $1, 2, 3$ mazgai sugenda su tikimybėmis atitinkamai $0.01, 0.02$ ir 0.04, bet jokie du mazgai nesugenda tą pačią dieną, gausime tokią perėjimo matricą:

	0	1	2	3	12	13	23
0	0.93	0.01	0.02	0.04	0	0	0
1	0	0.94	0	0	0.02	0.04	0
2	0	0	0.95	0	0.01	0	0.04
3	0	0	0	0.97	0	0.01	0.02
12	1	0	0	0	0	0	0
13	1	0	0	0	0	0	0
23	1	0	0	0	0	0	0

Jei ruošiamės su ta mašina dirbti, tarkime, 1800 dienų (apie 5 metus), kiek atsarginių mazgų $1, 2, 3$ sunaudosime?

6.6 pavyzdys. Nepriklausomų vienodai pasiskirsčiusių sveikareikšmių atsitiktinių dydžių seka yra Markovo grandinė. Tikrai, tarkime, $(X_n, n \geq 0)$ nepriklausomi vienodai pasiskirstę ir

$$P(X_0 = k) = a_k, \quad k = 0, 1, \ldots$$

Tuomet

$$\begin{aligned} P(X_{n+1} = i_{n+1} | X_0 = i_0, \ldots, X_n = i - n) = & P(X_{n+1} = i_{n+1}) = a_{n+1} = \\ & P(X_{n+1} = i_{n+1} | X_n = i_n) \end{aligned}$$

ir

$$P = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_m & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots \\ a_0 & a_1 & \cdots & a_m & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

6.7 pavyzdys. *Paprasčiausias besišakojantis procesas* yra Markovo grandinė.

Prisiminkime apibrėžimą. Tegu (Z_{nj}) nepriklausomi vienodai pasiskirstę su bendru tikimybių skirstiniu (p_k).Apibrėžiame $Z_0 = 0$,

$$Z_n = Z_{n1} + \cdots + Z_{nZ_{n-1}}, \quad n \geq 1.$$

Pagal apibrėžimą

$$\begin{aligned} &P(Z_n = i_n | Z_0 = i_0, \ldots, Z_{n-1} = i_{n-1}) \\ &= P\Big(\sum_{j=1}^{i_{n-1}} Z_{nj} = i_n | Z_0 = i_0, \ldots, Z_{n-1} = i_{n-1}\Big) \\ &= P\Big(\sum_{j=1}^{i_{n-1}} Z_{nj} = i_n\Big). \end{aligned}$$

Taigi

$$P(Z_n = j | Z_{n-1} = i) = P\Big(\sum_{j=1}^{i_{n-1}} Z_{nj} = j\Big) = p_j^{*i}.$$

Čia $*i$ žymi i-tą sąsūką.

6.8 pavyzdys. *Atsitiktinio klaidžiojimo procesas.*

Tarkime, $(X_n, n \geq 0)$ nepriklausomi vienodai pasiskirstę sveikareikšmiai atsitiktiniai dydžiai ir

$$P(X_n = k) = a_k, \quad -\infty < k < \infty.$$

Atsitiktinio klaidžiojimo procesas $(S_n, n \geq 0)$ apibrėžiamas taip:

$$S_0 = 0, \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k, \quad n \geq 1.$$

Procesas $(S_n, n \geq 0)$ yra Markovo grandinė, nes

$$\begin{aligned} &P(S_{n+1} = i_{n+1} | S_0 = 0, S_1 = i_1, \ldots, S_n = i_n) = \\ &P(X_{n+1} + i_n = i_{n+1} | S_0 = 0, S_1 = i_1, \ldots, S_n = i_n) = \\ &P(X_{n+1} = i_{n+1} - i_n) = a_{i_{n+1} - i_n} = \\ &P(S_{n+1} = i_{n+1} | S_n = i_n), \end{aligned}$$

nes X_{n+1} nepriklauso nuo $S_0, \ldots, S_n$.

Yra vienas labai patogus metodas Markovo grandinėms su būsenų aibe E konstruoti. Tarkime, $(V_n, n \geq 0)$ yra nepriklausomi vienodai pasiskirstę atsitiktiniai dydžiai su reikšmėmis kokioje nors erdvėje S (pvz. R, R^d ir pan.) Imkime dvi funkcijas:

$$g_i : E \times S \to E, \quad i = 1, 2$$

ir apibrėžkime

$$X_0 = g_1(j, V_0),$$

ir

$$X_n = g_2(X_{n-1}, V_n), \quad \text{kai} \quad n \geq 1.$$

Tuomet $(X_n, n \geq 0)$ yra Markovo grandinė.

Tiek besišakojantis procesas, tiek atsitiktinis klaidžiojimas pasižymi šia konstrukcija. Kitas labai svarus taip sukonstruotas pavyzdys yra taip vadinamas prekių atsargų modelis.

6.9 pavyzdys. *Prekių atsargų modelis.*

Tarkime, $I(t)$ reiškia atsargų kiekį laiko momentu t. Prekių asortimentas tikrinamas fiksuotais laiko momentais $T_0, T_1, T_2, \ldots$ Dažnai taikoma asortimento papildymo strategija yra tokia. Yra dvi atsargų kritinės reikšmės s ir S, $0 \leq s < S$. Jei laiko momentu T_n atsargų kiekis $I(T_n) := X_n$ yra mažesnis arba lygus s, tai jos papildomos iki lygio S. Jei atsargų kiekis $X_n = I(T_n) \in (s, S]$, tada jų papildymas nedaromas. Tarkime, D_n yra paklausa intervale $[T_{n-1}, T_n), n = 1, 2, \ldots$ ir atsitiktiniai dydžiai (D_n) yra nepriklausomi ir nepriklauso nuo X_0. Be to, tarkime, $X_0 \leq S$. Tuomet

$$X_{n+1} = \begin{cases} (X_n - D_{n+1})^+, & \text{kai} \quad s < X_n \leq S, \\ (S - D_{n+1})^+, & \text{kai} \quad X_n \leq s. \end{cases} \tag{6.3}$$

Čia

$$x^+ = \begin{cases} x, & \text{kai} \quad x > 0, \\ 0, & \text{kai} \quad x \leq 0. \end{cases}$$

Kadangi aprašytas procesas tenkina: $X_{n+1} = g(X_n, D_{n+1}), n \geq 0$, todėl $(X_n, n \geq 0)$ – Markovo procesas.

Atsargų procesui svarbios šios charakteristikos (parametrai).

- Ilgalaikis vidutinis atsargų lygis

$$\lim_{N \tau \infty} N^{-1} \sum_{j=0}^{N} X_j.$$

Pritaikę didžiųjų skaičių dėsnį (kurį įrodysime vėliau), tas dydis yra lygus

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{j=1}^{S} j P(X_n = j).$$

- Nepatenkintos paklausos charakteristika. Tegu U_n, $n \geq 1$ yra nepatenkinta paklausa laiko intervale $[T_{n-1}, T_n), n \geq 1$,

$$U_n = \begin{cases} (D_n - X_{n-1}) \wedge 0, & \text{kai } \ s < X_{n-1} \leq S, \\ (D_n - S) \wedge 0, & \text{kai } \ X_{n-1} \leq s. \end{cases}$$

  Dominantis dydis yra $\sum_{j=1}^{N} U_j$, kai N yra didelis (ilgame laikotarpyje).

- Kokia dalis laiko periodu sudaro nepatenkinta paklausa:

$$\lim_{N\to\infty} N^{-1} \sum_{j=1}^{N} \mathbf{1}\{U_j > 0\}.$$

6.3 Markovo grandinės modeliavimas

Pirmiausia prisiminkime, kaip modeliuoti atsitiktinį neneigiamą sveikareikšmį atsitiktinį dydį. Tarkime X yra toks atsitiktinis dydis,

$$P(X = k) = a_k, \quad k \geq 0, \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k = 1.$$

Tegu U – tolygusis intervale $[0, 1]$ atsitiktinis dydis. Stebėdami U realizacijas, galime modeliuoti ir atsitiktinį dydį X. Dydžiui Y priskiriame reikšmę k, jei U patenka į intervalą $(\sum_{i=0}^{k-1} a_i, \sum_{i=0}^{k} a_i]$. Taigi atsitiktinis dydis

$$Y = \sum_{k=0}^{\infty} k \mathbf{1}_{(A_{k-1}, A_k]}(U),$$

čia

$$A_k = \sum_{i=0}^{k} a_i, k = 0, 1, \ldots,$$

turi tą patį skirstinį kaip X.

Toliau sumodeliuokime Markovo grandinę, kurios būsenų aibė yra $E = \{0, 1, \ldots\}$. Tam reikia fiksuoti pradinį skirstinį (a_k), $a_k \geq 0, \sum_k a_k = 1$, kad galėtume valdyti Makovo grandinės pradžią. Taip pat reikalinga perėjimo matrica, kad būtų galima valdyti perėjimą iš vienos būsenos į kitą. Tarkime, perėjimo matrica yra

$$(p_{ij} = \begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} & \cdots \\ p_{10} & p_{11} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

ir jos elementams teisingos savybės:

$$p_{ij} \geq 0, \quad \sum_{j=0}^{\infty} p_{ij} = 1, \quad i = 0, 1, \ldots .$$

Jei būsenų aibė yra $\{0, 1, \ldots, m\}$, tai P yra $(m+1) \times (m+1)$-eilės matrica.

Dabar konstruokime Markovo grandinę $(X_n, n = 0, 1, \ldots)$. Tarkime, $(U_n, n = 0, 1, \ldots)$ nepriklausomi tolygiai pasiskirste inetrvale $(0, 1)$ atsitiktiniai dydžiai. Apibrėžkime

$$X_0 = \sum_{k=0}^{\infty} k \mathbf{1}_{(A_{k-1}, A_k]}(U_0).$$

Atsitiktinis dydis X_0 yra sveikareikšmis neneigiamas ir reikšmę k įgyja su tikimybe a_k. Tolesnė konstrukcija bus indukcinė. Pažymėkime

$$P_{ik} = \sum_{j=0}^{k} p_{ij}, \; k = 1, 2, \ldots, i = 0, 1, 2, \ldots .$$

Srityje $E \times [0, 1]$ apibrėžkime funkciją $f(i, u)$:

$$f(i, u) = \sum_{k=0}^{\infty} k \mathbf{1}_{(P_{i,k-1}, P_{ik}]}(u), \quad i \in E, u \in [0, 1].$$

Taigi $f(i, u) = k$ tada ir tik tada, kai $u \in (\sum_{j=0}^{k-1} p_{ij}, \sum_{j=0}^{k} p_{ij}]$. Dabar apibrėžkime

$$X_{n+1} = f(X_n, U_{n+1}), \quad n \geq 0.$$

Jei $X_n = i$ tai pagal konstrukciją, $X_{n+1} = k$ su tikimybe p_{ik}. Be to, X_0 priklauso nuo U_0, X_1 – nuo X_0, U_1, taigi nuo U_0, U_1 ir taip toliau. X_{n+1} priklauso nuo $U_0, U_1, \ldots, U_{n+1}$. Toliau panagrinėkime sukonstruoto proceso savybes.

Pagal konstrukciją

$$P(X_0 = k) = a_k, \quad k = 0, 1, \ldots \tag{6.4}$$

Su kiekvienu $n \geq 0$,

$$P(X_{n+1} = j | X_n = i) = p_{ij}. \tag{6.5}$$

Tikrai, pagal konstrukciją kairėje esanti sąlyginė tikimybė lygi

$$\begin{aligned} P(f(X_n, U_{n+1}) = j | X_n = i) &= P(f(i, U_{n+1}) = j | X_n = i) \\ &= P(f(i, U_{n+1}) = j), \end{aligned}$$

nes atsitiktiniai dydžiai X_n ir U_{n+1} yra nepriklausomi. Pagal konstrukciją, paskutinė tikimybė lygi p_{ij}.

Toliau įsitikinkime, kad

$$P(X_{n+1} = j | X_0 = i_0, \ldots, X_{n-1} = i_{n-1}, X_n = i) = p_{ij}, \tag{6.6}$$

kokie bebūtų sveikieji skaičiai $i_0, i_1, \ldots, i_{n-1}, i, j$ (tikimybė $P(X_0 = i_0, \ldots, X_{n-1} = i_{n-1}, X_n = i)$ turi būti teigiama). Vėl kaip ir prieš tai, sąlyginė tikimybė yra lygi

$$P(f(i, U_{n+1}) = j | X_0 = i_0, \ldots, X_{n-1} = i_{n-1}, X_n = i).$$

Kadangi $X_0, \ldots, X_n$ nepriklauso nuo U_{n+1}, tai pastaroji tikimybė yra

$$P(f(i, U_{n+1}) = j) = p_{ij}.$$

Iš išvestų sąvybių ir gauname, kd sukonstruotas procesas yra Markovo, su pradiniu skirstiniu (a_k) ir perėjimo tikimybių matrica P.

Taip sukonstruotą Markovo procesą vadiname *modeliuotu Markovo procesu.* Įrodysime, kad bet kuris kitas Markovo procesas $(Y_n, n \geq 0)$ su pradiniu skirstiniu (a_k) ir perėjimo matrica P yra neatskiriamas nuo modeliuotojo, t.y.

$$\{X_n, n \geq 0\} \stackrel{\mathcal{D}}{=} \{Y_n, n \geq 0\}.$$

Tam reikia įrodyti, kad tų dviejų procesų baigtiniamačiai skirstiniai sutampa. Tai matome iš 6.1 teiginio.

6.4 Daugiapakopės perėjimo tikimybės

Nagrinėkime homogeninę Markovo grandinę $X = (X_t, t = 0, 1, 2, \ldots)$ su perėjimo tikimybių matrica $(p(i,j))$. Perėjimo tikimybės $p(i,j) = P(X_{n+1} = j | X_n = i)$ aprašo sistemos perėjimo iš būsenos i į būseną j per vieną žingsnį tikimybę. Šio skyrelio tikslas – suskaičiuoti perėjimo iš būsenos i į būseną j per $m > 1$ žingsnių tikimybę:

$$p^{(m)}(i,j) = P(X_{n+m} = j | X_n = i).$$

Pastebėsime, kad

$$p^{(m)}(i,j) = P(X_m = j | X_0 = i).$$

Tai išvedame iš markoviškumo savybės.

Šiandien pirmadienis ir apsiniaukę. Kokia tikimybė kad poryt lis, o ryt bus saulėta? Intuityviai aišku, kad ta tikimybė turėtų būti sandauga $p(2,3)p(3,1)$. Tuom nesunku įsitikinti panaudojant markoviškumo savybę. Tikrai

$$P(X_2 = 1, X_3 = 3 | X_0 = 2) = \frac{P(X_2 = 1, X_1 = 3, X_0 = 2)}{P(X_0 = 2)} =$$
$$\frac{P(X_2 = 1, X_1 = 3, X_0 = 2)}{P(X_1 = 3, X_0 = 2)} \cdot \frac{P(X_1 = 3, X_0 = 2)}{P(X_0 = 2)} =$$
$$P(X_2 = 1 | X_1 = 3, X_0 = 2) P(X_1 = 3 | X_0 = 2).$$

Kokia tikimybė, kad trečiadienį lis, jei pirmadienis apsiniaukęs?

Norėdami tikimybę suskaičiuoti turime atsižvelgti į visus galimus variantus antradieniui. Tai yra:

$$P(X_2 = 1|X_0 = 2) = \sum_{k=1}^{3} P(X_2 = 1, X_1 = k|X_0 = 2).$$

Taigi, reikia suskaičiuoti tikimybes $P(X_2 = 1, X_1 = k|X_0 = 2)$, kai $k = 1, 2, 3$. Bet tai nesunku padaryti pasinaudojus sąlyginės tikimybės apibrėžimu. Pavyzdžiui,

$$\begin{aligned}
&P(X_2 = 1, X_1 = 3|X_0 = 2) = \frac{P(X_2 = 1, X_1 = 3, X_0 = 2)}{P(X_0 = 2)} = \\
&\frac{P(X_2 = 1, X_1 = 3, X_0 = 2)}{P(X_1 = 3, X_0 = 2)} \frac{P(X_1 = 3, X_0 = 2)}{P(X_0 = 2)} = \\
&P(X_2 = 1|X_1 = 3, X_0 = 2)P(X_1 = 3|X_0 = 2).
\end{aligned}$$

Pasinaudioję Markoviškumo savybe gauname, kad paskutinioji sandauga lygi

$$P(X_2 = 1|X_1 = 3)P(X_1 = 3|X_0 = 2) = p(2, 3)p(3, 1).$$

Dabar jau galime suskaičiuoti, kad

$$P(X_2 = 1|X_0 = 2) = \sum_{k=1}^{3} p(2, k)p(k, 1) = 0,21.$$

Nesunku suskaičiuoti, kad ir bendru atveju

$$P(X_2 = j|X_0 = i) = \sum_{k=1}^{3} p(i, k)p(k, j).$$

Tegu $P = (p_{ij})$ – Markovo grandinės $(X_n, n \geq 0)$ perėjimo tikimybių matrica.os kvadratas yra

$$P^2 = PP = (d_{ij}), \quad d_{ij} = \sum_k p_{ik}p_{kj}.$$

Čia reikia pastebėti, kad eilutė visados konverguoja, nes

$$\sum_k p_{ik}p_{kj} \leq \sum_k p_{ik} = 1.$$

Aukštesnius matricos P laipsnius apibrėžiame indukcijos būdu:

$$P^m = PP^{m-1}, \quad m = 3, 4, \ldots$$

Be to, sutarkime, kad $P^0 = I$ – tapatingoji matrica.

6.1 teorema. *Perėjimo matrica* $(p^{(m)}(i,j))$ *yra perėjimo matricos* $(p(i,j))$ *m-tasis laipsnis.*

Įrodymas. Tai išvedame iš vadinamosios Kolmogorovo-Čepmeno lygties:

$$p^{(m+n)}(i,j) = \sum_k p^{(m)}(i,k)p^{(n)}(k,j).$$

Šioje tapatybėje paėmę $n = 1$ matome, kad

$$p^{(m+1)}(i,j) = \sum_k p^{(m)}(i,k)p(k,j).$$

Tai yra, matrica $p^{(m+1)}$ yra matricų $p^{(m)}$ ir p sandauga. Taigi $p^{(2)} = p^2$, $p^{(3)} = p^{(2)}p = p^3$ ir t.t. Lieka įrodyti Kolmogorovo-Čepmeno lygybę. Pagal pilnosios tikimybės formulę

$$P(X_{m+n} = j|X_0 = i) = \sum_k P(X_{m+n} = j, X_m = k|X_0 = i)$$

Pagal sąlyginės tikimybės apibrėžimą

$$\begin{aligned}
&P(X_{m+n} = j, X_m = k|X_0 = i) = \frac{P(X_{m+n} = j, X_m = k, X_0 = i)}{P(X_0 = i)} = \\
&\frac{P(X_{m+n} = j, X_m = k, X_0 = i)}{P(X_m = k, X_0 = i)} \cdot \frac{P(X_m = k, X_0 = i)}{P(X_0 = i)} = \\
&P(X_{m+n} = j|X_m = k, X_0 = i)P(X + m = k|X_0 = i) = \\
&P(X_{m+n} = j|X_m = k)P(X + m = k|X_0 = i) = p^{(m)}(i,k)p^{(n)}(k,j).
\end{aligned}$$

Paskutiniame žingsnyje pasinaudojome Markoviškumo savybe. ■

6.1 išvada. *Tikimybę* $P(X_n = j)$ *suskaičiuojame pagal formulę*

$$a_j^{(n)} = P(X_n = j) = \sum_i a_i p_{ij}^{(n)}.$$

Įrodymas. Pagal pilnosios tikimybės formulę

$$P(X_n = j) = \sum_i P(X_n = j|X_0 = i)P(X_0 = i) = \sum_i a_i p_{ij}^{(n)}.$$

■

6.10 pavyzdys. *Oro grandinė.*

Taigi galime atsakyti į skyrelio pradžioje suformuluotą klausimą. Ieškomoji tikimybė yra

$$p^{(2)}(1,3) = \sum_k p(1,k)p(k,3) = 0,18.$$

Dar daugiau, galime suskaičiuoti ir perėjimo per du žingsnius tikimybių matricą:

$$p^{(2)} = p^2 = \begin{pmatrix} 0,28 & 0,54 & 0,18 \\ 0,21 & 0,58 & 0,21 \\ 0,20 & 0,55 & 0,25 \end{pmatrix}$$

Kitame skyrelyje domėsimės, kaip elgiasi matrica $p^{(n)}$, kai $n \to \infty$. Pažiūrėkime, kas darosi oro grandinės pavyzdyje. Remiantis Kolmogorovo-Čepmeno lygybėmis

$$p^{(4)} = p^{(2)}p^{(2)} = \begin{pmatrix} 0,2178 & 0,5634 & 0,2088 \\ 0,2226 & 0,5653 & 0,2121 \\ 0,2215 & 0,5645 & 0,2140 \end{pmatrix}$$

ir

$$p^{(8)} = p^{(4)}p^{(4)} = \begin{pmatrix} 0,22355 & 0,56470 & 0,21175 \\ 0,22352 & 0,56471 & 0,21177 \\ 0,22352 & 0,56471 & 0,21177 \end{pmatrix}$$

Ar jau galime iškelti kokią nors hipotezę? Išties, kiekviena eilutė pasidaro tokia pat. Ir kaip išsiaiškinsime vėliau, riboje ji yra lygi

$$(19/85, 48/85, 18/85) = (0,22353, 0,56471, 0,21176).$$

6.11 pavyzdys. *Lošimas.*

Paprastumo dėlei tarkime, kad $N = 4$. Tuomet perėjimo matrica yra

	0	1	2	3	4
0	1,0	0	0	0	0
1	0,6	0	0,4	0	0
2	0	0,6	0	0,4	0
3	0	0	0,6	0	0,4
4	0	0	0	0,6	1.0

Nesunkiai suskaičiuojame, kad

$$p^2 = \begin{pmatrix} 1.0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.6 & 0.24 & 0 & 0.16 & 0 \\ 0.36 & 0 & 0.48 & 0 & 0.16 \\ 0 & 0.36 & 0 & 0.24 & 0.4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Kompiuterio pagalba galime suskaičiuoti

$$p^{20} = \begin{pmatrix} 1.0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.87655 & 0.00032 & 0 & 0.00022 & 0.12291 \\ 0.69186 & 0 & 0.00065 & 0 & 0.30749 \\ 0.41842 & 0.00049 & 0 & 0.00032 & 0.58437 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

matome, kad per 20 žingsnių negalima iš būsenos 2 pereiti į būseną 3, nes lošėjo sėkmė alternuoja tarp lyginio ir nelyginio skaičių, kol pasiekia vieną iš kraštinių būsenų. Tai vadinama periodiškumu, kurį smulkiau nagrinėsime kiek vėliau.

6.5 Būsenų klasifikavimas

Nagrinėsime Markovo grandinę $(X_n, n = 0, 1, \dots)$ su būsenų erdve $E \subset \mathbb{N}$. Tegu A yra kuri nors būsenų aibė, $A \subset E$. Apibrėžkime taip vadinamą *pirmojo patekimo momentą*

$$\tau_A = \begin{cases} \min\{n \geq 1 : X_n \in A\}, & \text{kai ezistuoja toks} \quad n \geq 1, \quad \text{kad} \quad X_n \in A; \\ \infty & \text{kitu atveju.} \end{cases}$$

Tai yra pirmojo apsilankymo būsenų aibėje A momentas. Kai aibę A sudaro vienintelė būsena, $A = \{j\}$ tai vietoj $\tau_{\{j\}}$ rašysime τ_j.

Kad būtų trumpiau, sąlyginę tykimybę, su sąlyga $\{X_0 = i\}$ žymėsime P_i :

$$P_i(A) = P(A|X_0 = i).$$

6.2 apibrėžimas. *Jei $i, j \in S$ sakysime, kad būsena j pasiekiama iš būsenos i ir rašysime $i \mapsto j$, jei*

$$P_i(\tau_j < \infty) > 0.$$

Paprasčiausias pasiekiamumo kriterijus yra toks: $i \mapsto j$ tada ir tik tada, kai

$$\text{egzistuoja toks} \quad n \geq 0, \quad \text{kad} \quad p_{ij}^{(n)} > 0.$$

Tikrai,

$$(X_n = j) \subset (\tau_j \leq n) \subset (\tau_j < \infty),$$

taigi

$$0 < p_{ij}^{(n)} \leq P_i(\tau_j < \infty).$$

Ir atvirkščiai. Jei su kiekvienu $n \geq 0$, $p_{ij}^{(n)} = 0$, tuomet

$$\begin{aligned} P_i(\tau_j < \infty) &= \lim_{n\to\infty} P_i(\tau_j \leq n) = \lim_{n\to\infty} P_i(\cup_{k=0}^{j}\{X_k = j\}) \\ &\leq \limsup_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} P_i(X_k = j) = \limsup_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} p_{ij}^{(k)} = 0. \end{aligned}$$

6.12 pavyzdys. Deterministiškai monotoninė Markovo grandinė. Kadangi $p_{i,i+1} = 1$ su visais $i \geq 0$, tai $i \to i+1$.Taigi $i \to j$, jei $j \geq i$.

6.13 pavyzdys. Lošimas aibėje $\{1, 2, \ldots, m\}$. Turime $m \to m, 0 \to 0$ ir nėra jokio išėjimo iš šių būsenų. 0 yra pasiekiamas iš bet kurios padėties, išskyrus m.

6.14 pavyzdys. Paprastas besišakojantis procesas: $0 \to 0$ ir kitur iš nulinės b8senos patekti negalima.

Pasiekiamumo sąvoka parodo kurios būsenos gali tikrai būti pasiekiamos iš duotos būsenos i. Kyla natūralus klausimas, jei egzistuoja kelias kuriuo su teigiama tikimybe galima patekti į būseną, ar egzistuoja galimybė sugrįžti į pradinę būseną i?

6.3 apibrėžimas. *Sakysime, kad būsenos i ir j komunikuoja, rašysime $i \leftrightarrow j$, jei $i \mapsto j$ ir $j \mapsto i$.*

Tai ekvivalentumo sąryšis: refleksyvus ($i \leftrightarrow i$), simetrinis ($i \leftrightarrow j$ tada ir tik tada, kai $j \leftrightarrow i$) ir tranzityvus (jei $i \leftrightarrow j$, $j \leftrightarrow k$ tai $i \leftrightarrow k$).

Tik paskutinę savybę reikia paaiškinti.

Jei $i \leftrightarrow j$ ir $j \leftrightarrow k$, tai pirmiausia įsitikinkime, kad $i \to k$. Tikrai, $i \to j$ reiškia, kad egzistuoja toks n, kad $p_{ij}^{(n)} > 0$. Taip pat ir $p_{jk}^{(m)} > 0$ su kuriuo nors m, nes $j \to k$. Remiantis Kolmogorovo-Čepmeno lygybe

$$p_{ik}^{(m+n)} = \sum_{\nu} p_{i\nu}^{(n)} p_{\nu k}^{(m)} \geq p_{ij}^{(n)} p_{jk}^{(m)} > 0,$$

taigi $i \to k$.

Naudodami sąryšį $\leftrightarrow$, būsenų aibę E galime išskaidyti į ekvivalentumo klases, Imame nulinę būseną 0 (arba pirmąją, jei $0 \notin S$, ir į aibę C_0 surenkame visas tas būsenas, kurios komunikuoja su 0. Tuomet likusioje būsenų aibėje $S \setminus C_0$ pasirenkame kurią nors būseną i ir į aibę C_1 surenkame visas tas būsenas, kurios komunikuoja su i. Taip procesą tęsiame, kol būsenų aibėje nelieka neipaskirtų į kurią nors klasę elementų. Taigi

$$C_i \cap C_j = \emptyset, \quad \bigcup C_i = E.$$

Aibės $C_0, C_1, \dots$ vadinamos *ekvivalentumo klasėmis.*

6.15 pavyzdys. Deterministinė monotoninė Markovo grandinė: $C_i = \{i\}, i \geq 0$.

6.16 pavyzdys. Markovo grandinė su būsenų aibe $\{0,1,2,3\}$ ir perėjimo matrica

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

turi tris ekvivalentumo klases: $\{0\}, \{3\}, \{1,2\}$.

6.17 pavyzdys. Nagrinėkime Markovo grandinę su būsenų aibe $\{1,2,3,4\}$ ir perėjimo matrica

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Čia yra dvi ekvivalentumo klasės:

$$C_1 = \{1,2\}, \quad C_2 = \{3,4\}.$$

6.4 apibrėžimas. *Sakysime, kad būsenų aibė $C \subset E$ yra uždara, jei iš to, kad $i \in C$ ir $i \mapsto j$, gauname $j \in C$. Būsena $i \in E$ yra absorbuojanti, jei $\{i\}$ yra uždara klasė.*

Markovo grandinė vadinama *neredukuojama*, jei jos būsenų aibė turi tik vieną ekvivalentumo klasę, tai yra $i \leftrightarrow j$ su visais $i, j \in S$.

6.2 teiginys. *Aibė $C \subset E$ yra uždara tada ir tik tada, kai*

$$p_{ij} = 0 \ \text{ su visais } \ i \in C, j \in C^c. \tag{6.7}$$

6.3 teiginys. *Būsena $j \in E$ yra absorbuojanti tada ir tik tada, kai*

$$p_{jj} = 1. \tag{6.8}$$

Pastebėkime, kad (6.8) yra atskiras (6.7) atvejis. Tikrai, jei (6.7) yra teisinga ir $i \in C$, tai

$$P_i(\tau_{C^c} = 1) = \sum_{j \in C^c} p_{ij} = 0.$$

Panašiai gauname

$$\begin{aligned} P_i(\tau_{C^c} \geq 2) &= P_i(\tau_{C^c} = 1) + P_i(\tau_{C^c} = 2) \\ &= 0 + P_i(X_1 \in C, X_2 \in C^c) = \sum_{j \in C^c} \sum_{k \in C} p_{ik} p_{kj} = 0. \end{aligned}$$

Tęsdami pagal indukciją, gauname $P_i(\tau_{C^c} \leq n) = 0$. Perėję prie ribos, kai $n \to \infty$, įrodome, kad $P_i(\tau_{C^c} < \infty) = 0$, taigi C yra uždara.

Deterministiškai monotoninėje Markovo grandinėje, aibė $\{n, n+1, \dots\}$ yra uždara, bet iš $n-1$ galime patekti į n. Taigi uždarų aibių gali būti ir begalo daug ir nebūtinai jos nesikerta.

6.6 Sustabdymo momentai

Tegu $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ yra tikimybinė erdvė. Aibės Ω poaibių σ algebrų seką $(\mathcal{F}_n, n = 0, 1, \dots)$ vadinsime *srautu*, jei

$$\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 \subset \dots \subset \mathcal{F}.$$

6.5 apibrėžimas. *Neneigiamas sveikareikšmis atsitiktinis dydis $T : \Omega \to \{0, 1, \dots, \infty\}$, apibrėžtas tikimybinėje erdvėje $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ vadinamas sustabdymo momentu atžvilgiu σ algebrų srauto $(\mathcal{F}_n, n = 0, 1, 2, \dots$, jei*

$$\{T \leq n\} \in \mathcal{F}_n$$

su visais $n = 0, 1, 2, \dots$.

Atkreipiame dėmesį, kad T gali įgyti ir reikšmę ∞.

Procesas $(X_n, n = 0, 1, 2, \dots)$ vadinamas *adaptuotu* σ algebrų srauto $(\mathcal{F}_n, n = 0, 1, \dots)$ atžvilgiu, jei X_n yra $\mathcal{F}_n$-matus visiems $n = 0, 1, \dots$.

6.18 pavyzdys. Tegu $(X_n, n = 0, 1, 2, \dots)$ yra adaptuotas σ algebrų srauto $(\mathcal{F}_n, n = 0, 1, 2, \dots)$ atžvilgiu. Jei $B \subset \mathbb{R}$ yra bet kuri Borelio aibė, tuomet

$$T_B = \inf\{n : X_n \in B\} \quad (\inf \emptyset = \infty)$$

yra sustabdymo momentas, nes

$$\{T_B = n\} = \{X_0 \notin B, \dots, X_{n-1} \notin B, X_n \in B\}.$$

Sąlyga $\{T = n\} \in \mathcal{F}_n$ su visais $n \geq 0$ yra ekvivalenti sąlygai $\{T \leq n\} \in \mathcal{F}_n$ su visais $n \geq 0$. Tai galime pamatyti iš sąryšių

$$
\begin{aligned}
\{T \leq n\} &= \bigcup_{j=1}^{n} \{T = j\}, \\
\{T = n\} &= \{T \leq n\} \cap (\{T \leq n-1\})^c.
\end{aligned}
$$

6.4 teiginys. *Tegu S ir T yra sustabdymo momentai.*

(a) *$S \vee T$ ir $S \wedge T$ yra sustabdymo momentai.*

(b) *Apibrėžkime*

$$\mathcal{F}_T = \{A : A \cap \{T \leq n\} \in \mathcal{F}_n, \text{ su visais } n \geq 0\}.$$

Tuomet $\mathcal{F}_T$ yra σ algebra.

(c) *Jei $S \leq T$ tai $\mathcal{F}_S \subset \mathcal{F}_T$.*

(d) *Jei $(X_n, n \geq 0)$ yra adaptuotas procesas, o T yra sustabdymo momentas, tai atsitiktinis dydis*

$$X_T(\omega) = X_{T(\omega)}(\omega), \quad \omega \in \Omega$$

yra $\mathcal{F}_T$-matus.

Įrodysime Markovo proceso vadinamąją griežto Markoviškumo savybę.

6.7 Grįžtamumas ir pereinamumas

Viena iš svarbiausių Markovo grandinės būsenos savybių yra, kaip ji dažnai grįžta į tą būseną.

6.6 apibrėžimas. *Būsena i vadinama* grįžtamąja, *jei grandinė į ją grįžta per baigtinį žingsnių skaičių su tikimybe vienas. Priešingu atveju, būsena vadinama* pereinamąja.

Būsena i yra grįžtamoji, jei

$$P_i(\tau_i < \infty) = 1.$$

Jei

$$P_i(\tau_i = \infty) > 0,$$

tai būsena i yra pereinamoji.

Būsena i yra *teigiamo grįžtamumo*, jei

$$E(\tau_i|X_0 = i) < \infty.$$

Taigi, teigiamai grįžimo būsenai ne tik grįžimo laikas yra beveik visur baigtinis, bet ir vidutinis grįžimo laikas yra baigtinis.

Būsenos k pirmojo aplankymo iš būsenos j tikimybinį skirstinį pažymėkime

$$f_{jk}^{(n)} = P_j(\tau_k = n), \quad n \geq 1.$$

Kadangi $\tau_k(1) \geq 1$, tai $f_{jk}^{(0)} = 0$. Dydis

$$f_{jk} := \sum_{n=0}^{\infty} f_{jk}^{(n)} = P_j(\tau_k < \infty)$$

yra būsenos k aplankymo iš j per baigtinį žingsnių skaičių tikimybė.

6.5 teiginys. *Būsena i yra grįžtamoji tada ir tik tada, kai $f_{ii} = 1$, o tai, savo ruožtu, yra tada ir tik tada, kai $\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \infty$.*

6.6 teiginys. *Būsena i yra tranzitinė tada ir tik tada, kai $f_{ii} < 1$, o tai, savo ruožtu, yra tada ir tik tada, kai $\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} < \infty$.*

Būsenai $j \in S$ apibrėžkime

$$N_j = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{1}_{(X_n = j)}.$$

Tai yra būsenos aplankymų skaičius nuo pirmojo laiko momento (po nulinio laiko momento). Taigi, su visais $i, j \in S$

$$E_i N_j = \sum_{n=1}^{\infty} E_i \mathbf{1}_{X_n = j)} = \sum_{n=1}^{\infty} P_i(X_n = j) = \sum_{n=1}^{\infty} p_{ij}^{(n)}.$$

Paėmę $i = j$ ir pritaikę anksčiau gautus rezultatus matome, kad jei i yra pradinė būsena, tai ji yra grįžtamoji tada ir tik tada, kai vidutinis toje būsenoje apsilankymų skaičius yra begalinis.

6.19 pavyzdys. *Lošimas.* Paprastumo dėlei nagrinėkime lošimą, kai $N = 4$. Atitinkama perėjimo matrica yra

	0	1	2	3	4
0	1	0	0	0	0
1	0.6	0	0.4	0	0
2	0	0.6	0	0.4	0
3	0	0	0.6	0	0.4
4	0	0	0	0	1

Labai lengva įsitikinti, kad nulinė ir ketvirtoji būsenos yra grįžtamosios. Kadangi $p(0,0) = 1$, tai grandinė toje būsenoje išliks po kito žingsnio su tikimybe vienas.

Apskritai, jei būsena j yra *absorbuojanti*, t.y. $p_{jj} = 1$, tai j yra stipriai grįžtamoji būsena, grandinė su vienetine tikimybe lieka toje būsenoje.

Kitos lošimo būsenos, $1, 2, 3$ yra pereinamosios. Tikrai, jei grandinė prasideda būsena 1 ir pereina į nulinę būseną, tai ji niekad iš jos nebeišeina, taigi

$$P_1(\tau_1 = \infty) \geq p(1,0) = 0.6 > 0.$$

Panašiai, jei grandinė startuoja iš būsenos 2, ji gali pereiti į būseną 1, o iš jos į - 0, todėl

$$P_2(\tau_2 = \infty) \geq p(2,1)p(1,0) = 0.36 > 0.$$

Galiausiai, jei lošimas prasideda būsena 3, grandinė gali pereiti į būseną 4 ir niekada iš jos nebeišeiti, todėl

$$P_3(\tau_3 = \infty) \geq p(3,4) = 0.4 > 0.$$

6.20 pavyzdys. *Oro grandinė.* Prisiminkime perėjimo tikimybių matricą

$$p = \begin{array}{cccc} & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0.4 & 0.6 & 0 \\ 2 & 0.2 & 0.5 & 0.3 \\ 3 & 0.1 & 0.7 & 0.2 \end{array}$$

Įsitikinkime, kad visos būsenos yra grįžtamosios. Pirmiausia pastebėkime, kad kokioje būsenoje grandinė bebūtų n' tuoju momentu (kokia bebūtų X_n reikšmė), su ne mažesne nei 0.1 tikimybe ji patenka į būseną 1, t.y. $P_1(\tau_1 > n) \leq 0.9^n$. Iš čia, $P_1(\tau_1 < \infty) = 1$, t.y., pirmoji būsena yra grįžtamoji. Su antrąja būsena panašiai. Mat pereiti kitame žingsnyje į antrąją būseną tikimybė yra ne mažesnė už 0.5. Kiek sudėtingiau su trečiąja būsena. Mat per vieną žingsnį į ją nepatenkama iš pirmosios. Bet prisiminkime perėjimo tikimybes per du žingsnius:

$$p^{(2)} = \begin{pmatrix} 0.28 & 0.54 & 0.18 \\ 0.21 & 0.58 & 0.21 \\ 0.20 & 0.55 & 0.25 \end{pmatrix}$$

Iš jos matome, kad $P(X_{n+2} = 3 | X_n = x) \geq 0.18$ su visais $x = 1, 2, 3$. Nagrinėdami grandinės būsenas laiko momentais $2, 4, \ldots, 2k$, gauname,

$$P_3(\tau_3 > 2k) \leq (0.82)^k \to 0, \quad \text{kai} \quad k \to \infty.$$

Taigi, trečia būsena yra grįžtamoji.

6.8 Stacionarus skirstinys

Jei j yra pereinamoji būsena, tuomet X_n grįš į ją tik baigtinį skaičių kartų. Taigi

$$pij^{(n)} = P_i(X_n = j) \to 0 \quad \text{bet kuriai būsenai} \quad i.$$

Kaip netrukus įsitikinsime, jei j yra grįžtamoji būsena ir būsenų aibė yra baigtinė, tai $p_{ij}^{(n)}$ konverguos prie teigiamos ribos.

Stacionarus skirstinys. Kam jo reikia? Pavyzdžiai.

Lygties

$$\pi p = \pi$$

sprendinys tenkinantis sąlygą

$$\sum_{y} \pi_j = 1$$

vadinamas stacionariuoju skirstiniu.

Stacionarus skirstinys yra grandinės pusiausvyros būsena: jei X_0 turi skirstinį pi, tai tokį patį skirstinį turi ir X_n su kiekvienu $n \geq 1$.

Tai nesunku įrodyti, pasinaudojus jau išvesta .... formule. Tikrai,

$$P(X_n = j) = (\pi p^{(n)})_j = (\pi p^n)_j = (\pi p)p_j^{n-1} = \cdots = \pi.$$

Klausimas, kada stacionarus skirstinys egzistuoja yra labai svarbus. Pirmiausia galima išsiaiškinti, kada jis neegzistuoja. Paskui bandyti spręsti egzistavimo problemą.

6.2 teorema. *Tarkime, p yra neredukuojama neperiodinė matrica ir turi stacionarų sprendinį π. Tuomet*

$$p_{ij}^{(n)} \to \pi_j, \quad \textit{kai} \quad n \to \infty.$$

Pirmiausia pažiūrėkime, ką turime oro grandinės atveju. Lygtis $\pi p = \pi$ yra lygčių sistema

$$\begin{aligned} 0.4\pi_1 + 0.2\pi_2 + 0.1\pi_3 &= \pi_1 \\ 0.6\pi_1 + 0.5\pi_2 + 0.7\pi_3 &= \pi_2 \\ 0.3\pi_2 + 0.2\pi_3 &= \pi_3 \end{aligned}$$

Be to, turime papildomą sąlygą

$$\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1$$

Nesunkiai išsprendžiame rasdami

$$\pi_1 = \frac{19}{85}, \quad \pi_2 = \frac{48}{85}, \quad \pi_3 = \frac{18}{85}.$$

Jei p nesuprastinama, tai stacionarus sprendinys, jei jis egzistuoja, yra vienintelis.

6.3 teorema. *Jei būsenų aibė yra baigtinė, tai egzistuoja bent vienas stacionarus sprendinys.*

6.9 Tolydaus laiko Markovo grandinės

6.10 Gimimo ir mirimo procesai

6.11 Eilių procesai

6.12 Pratimai

6.1 pratimas. Matricai

$$P_1 \begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{pmatrix},$$

čia $0 < \alpha, \beta < 1$, raskite P_1^n.

6.2 pratimas. Matricai

$$P_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

raskite P_2^n.

7 Martingalai

7.1 Diskretaus laiko martingalai

Nagrinėkime diskretaus laiko atsitiktinį procesą $(X_n, n \geq 0)$, apibrėžtą tikimybinėje erdvėje $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ir σ-algebrų seką $\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1, \dots \subset \mathcal{F}$.

7.1 apibrėžimas. *Atsitiktinis procesas $(X_n, n \geq 0)$ vadinamas martingalu atžvilgiu $(\mathcal{F}_n, n = 0, 1, 2, \dots)$, jei su visais $n = 0, 1, \dots$*

1) $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n+1}$;

2) X_n yra $\mathcal{F}_n$ matus;

3) $E|X_n| < \infty$;

4) $E(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) = X_n$ b.t.

Pirmoji sąlyga reiškia, kad gaunamos informacijos kiekis nuolat auga (kai $\mathcal{F}_n$ interpretuojame, kaip prieinamą informaciją iki laiko momento n). Tai atitinka mokymąsi nieko nepamirštant. σ algebrų seka $(\mathcal{F}_n, n \geq 0)$, kuriai teisinga (1) savybė, vadinama σ algebrų *srautu* (arba *filtracija*).

Atskiru atveju, $\mathcal{F}_n = \sigma(X_n, X_{n-1}, \dots, X_0)$, $n \geq 0$. Bet galime nagrinėti ir σ-algebras, generuotas kitais atsitiktiniais dydžiais, pavyzdžiui,

$$\mathcal{F}_n = \sigma(Y_n, Y_{n-1}, \dots, Y_0), \quad n = 0, 1, \dots.$$

Norėdami pažymėti σ algebrų srautą, atžvilgiu kurio seka $(X_n, n \geq 0)$ yra martingalas, sakysime, kad $((X_n, \mathcal{F}_n), n \geq 0)$ yra martingalas. Jei nepasakyta kokio σ algebrų srauto seka $(X_n, n \geq 0)$ yra martingalas, suprasime, kad tai yra $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, \dots, X_n), n \geq 0$.

Pavadinimas „martingalas" kilęs iš vadinamosios dvigubinimo lošimo strategijos, kuri ir vadinasi martingalo strategija. Esmė yra tokia. Statomas vienas litas. Jei išlošiama, tai vėl statomas litas. Jei pralošiama, tai statomi du litai. Kiekvieną kartą pralošus, statymas dvigubinamas. Pavyzdžiui, galimas toks variantas

Rezultatas	P	P	P	P	L
Lošimas	1	2	4	8	16
Pelnas	-1	-3	-7	-15	$+1$

Pažymėkime X_n lošėjo pelną po n-ojo lošimo. Aišku, kad $X_0 = 0$, $|X_n| \leq 1 + 2 + \dots + 2^{n-1} = 2^n - 1$. be to, $X_{n+1} = X_n$, jei lošimas sustoja $n+1$-uoju momentu. Kitu atveju

$$X_{n+1} = \begin{cases} X_n - 2^n & \text{su tikimybe} \quad 1/2; \\ X_n + 2^n & \text{su tikimybe} \quad 1/2. \end{cases}$$

Taigi $E(X_{n+1}|X_0, X_1, \dots, X_n) = X_n$, todėl $(X_n, n \geq 0)$ yra martingalas.

7.2 apibrėžimas. *Atsitiktinis procesas $(X_n, n \geq 0)$ vadinamas submartingalu (supermartingalu) atžvilgiu $(\mathcal{F}_n, n = 0, 1, 2, \dots)$, jei su visais $n = 0, 1, \dots$ yra teisingos* (1)–(3) *savybės ir*

4') $E[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] \geq (\leq) X_n$ *b.t.,*

7.1 pavyzdys. Tegu Y yra bet kuris integruojamas atsitiktinis dydis ir $(\mathcal{F}_n, n = 0, 1, 2, \dots)$ σ algebrų srautas. Apibrėžkime

$$X_n = E[Y|\mathcal{F}_n], \quad n = 0, 1, 2, \dots .$$

Atsitiktinis procesas $((X_n, \mathcal{F}_n), n = 0, 1, 2, \dots)$ yra martingalas.

7.2 pavyzdys. Tegu $Y_1, Y_2, \dots$ yra nepriklausomi a.d..Apibrėžkime

$$X_n = X_0 + Y_1 + \cdots + Y_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots .$$

Čia $X_0 = c$ b.t. Nagrinkime σ algebrų srautą

$$\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega), \quad \mathcal{F}_n = \sigma(Y_1, \dots, Y_n), \ n \in \mathbb{N}.$$

Tuomet

- jei $EY_n = 0$ su visais $n \in \mathbb{N}$, tai $((X_n, \mathcal{F}_n), n \geq 0)$ yra martingalas;
- jei $EY_n \leq 0$ su visais $n \in \mathbb{N}$, tai $((X_n, \mathcal{F}_n), n \geq 0)$ yra supermartingalas;
- jei $EY_n \geq 0$ su visais $n \in \mathbb{N}$, tai $((X_n, \mathcal{F}_n), n \geq 0)$ yra submartingalas.

7.3 pavyzdys. *Paprasčiausias besišakojantis procesas.* Nagrinėkime paprasčiausią besišakojantį procesą $(Z_n, n = 0, 1, 2, \dots)$. Tegu vidutinis kiekvieno individo palikuonių skaičius yra

$$\mu = \sum_k k p_k.$$

Akivaizdu, kad jei n-toje kartoje yra z_n individų, tai vidutinis $n + 1$-os kartos individų skaičius yra μz_n, taigi

$$E(Z_{n+1}|Z_n, Z_{n-1}, \dots, Z_0) = \mu Z_n \begin{cases} < Z_n, & \text{jei } \mu < 1 \\ = Z_n, & \text{jei } \mu = 1 \\ > Z_n & \text{jei } \mu > 1. \end{cases}$$

Dar galime pastebėti, kad su visais $n = 0, 1, \dots$

$$E\Big(\frac{Z_{n+1}}{\mu^{n+1}}|Z_n, \dots, Z_0\Big) = \frac{Z_n}{\mu^n}.$$

Taigi atsitiktinis procesas $(Z_n/\mu^n, \ n \geq 0)$ yra martingalas.

7.4 pavyzdys. *Akcijų kaina.* Tegu $\zeta_1, \zeta_2, \dots$ nepriklausomi teigiami atsitiktiniai dydžiai, $E\zeta_i < \infty$ su visais $i = 1, 2, \dots$. Tegu $X_0 = c$,

$$X_n = X_0 \zeta_1 \cdots \zeta_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Atsitiktinis procesas $(X_n, n \geq 0)$ yra martingalas. Atsitiktiniai dydžiai ζ_i aprašo kainos pasikeitimą. Atskiri atvejai yra šie gerai žinomi kainų modeliai.

- *Diskretus Black–Scholes modelis.* Čia $\zeta_i = \exp\{\eta_i\}$, ir $\eta_i \sim Norm(\mu, \sigma^2)$, $i = 1, 2, \dots$.
- *Binominis (CRR) modelis.* Čia $\zeta_i = (1 + a)e^{-r}$ su tikimybe p ir $\zeta_i = (1 + a)^{-1}e^{-r}$ su tikimybe $1 - p$. Dydis r aprašo palūkanų normą.

Iš apibrėžimo matome, kad

$$E(X_{n+1} | X_n, \dots, X_0) = X_n E\zeta_{n+1}$$

su visais $n = 0, 1, 2, \dots$.

7.2 Martingalų savybės

7.1 teiginys. *Tarkime, $(X_n, n \geq 0)$ yra martingalas atžvilgiu filtracijos $(\mathcal{G}_n)$. Tegu $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, \dots, X_n) \subset \mathcal{G}_n$. Tuomet $(X_n, n \geq 0)$ yra martingalas ir atžvilgiu filtracijos $(\mathcal{F}_n)$.*

Įrodymas. Reminatis dvigubo vidurkinimo taisykle

$$E(X_{n+1} | \mathcal{F}_n) = E(E(X_{n+1} | \mathcal{G}_n)) \mathcal{F}_n) = E(X_{n+1} | \mathcal{F}_n) = X_n. \blacksquare$$

7.2 teiginys. *Jei $(X_n, \mathcal{F}_n)$ yra martingalas, tai $(|X_n|, \mathcal{F}_n)$ – submartingalas.*

7.3 teiginys. *Jei $(X_n, \mathcal{F}_n)$ yra supermartingalas, ir $0 \leq m < n$, tai*

$$EX_m \geq EX_n.$$

7.4 teiginys. *Jei $(X_n, \mathcal{F}_n)$ yra submartingalas, ir $0 \leq m < n$, tai*

$$EX_m \leq EX_n.$$

7.5 teiginys. *Jei $(X_n, \mathcal{F}_n)$ yra martingalas, ir $0 \leq m < n$, tai*

$$EX_m = EX_n.$$

7.6 teiginys. *Jei* (X_n) *yra martingalas ir* ϕ *yra tokia iškila funkcija, kad* $E|\phi(X_n)| < \infty$ *su visais* $n \geq 0$. *Tuomet* $(\phi(X_n))$ *yra submartingalas.*

Įrodymas. Remiantis Jenseno nelygybe

$$E(\phi(X_{n+1})|\mathcal{F}_n) \geq \phi(E(X_{n+1}|\mathcal{F}_n)) = \phi(X_n).$$

■

Atskiru atveju, imdami $\phi(t) = |t|^p, p \geq 1$ matome, kad $(|X_n|^p)$ yra submartingalas, jei (X_n) yra martingalas ir $E|X_n|^p < \infty$ su visais $n \geq 0$.

Tarkime, duota filtracija $(\mathcal{F}_n, n \geq 0)$. Sakysime, kad seka $(H_n, n \geq 0)$ yra numatoma atžvilgiu $(\mathcal{F}_n, n \geq 0)$, jei su kiekvienu $n \geq 1$, atsitiktinis dydis H_n yra $\mathcal{F}_{n-1}$ matus.

7.1 teorema. (Dubo išskaidymas.) *Submaringalą* $(Y, \mathcal{F})$ *galima išskaidyti*

$$Y_n = X_n + S_n,$$

su visais $n \geq 0$. *Be to,* $(M, \mathcal{F})$ *yra martingalas, o* $(S, \mathcal{F})$ *– didėjantis numatomas procesas ir išskaidymas yra vienintelis.*

Atsitiktinis procesas $(S, \mathcal{F})$ yra vadinamas submartingalo $(Y, \mathcal{F})$ kompensatorius.

Įrodymas. Procesai M ir S apibrėžiami išreikštiniu būdu. Imkime $X_0 = Y_0, S_0 = 0$,

$$\begin{aligned} X_{n+1} - X_n &= Y_{n+1} - E(Y_{n+1}|\mathcal{F}_n), \\ S_{n+1} - S_n &= E(Y_{n+1}|\mathcal{F}_n), \end{aligned}$$

kai $n > 0$. Galime įsitikinti, kad $(M, \mathcal{F})$ ir $(S, \mathcal{F})$ tenkina teoremos tvirtinimus. Lieka įrodyti išskaidymo vienatį. Tarkime, yra dar vienas išskaidymas: $Y_n = M'_n + S'_n$. Tuomet

$$\begin{aligned} Y_{n+1} - Y_n &= (M'_{n+1} - M'_n) + (S'_{n+1} - S'_n) \\ &= (X_{n+1} - X_n) + (S_{n+1} - S_n). \end{aligned}$$

Suskaičiavę sąlyginį vidurkį atžvilgiu $\mathcal{F}_n$ gauname, kad $S'_{n+1} - S'_n = S_{n+1} - S_n$ su visais $n \geq 0$. Tačiau $S'_0 = S_0 = 0$, taigi $S'_n = S_n$ ir, kartu, $M'_n = X_n$. ■

Martingalo $(X_n, n \geq 0)$ transformacija numatoma seka $(H_n, n \geq 1)$ vadinsime seką

$$(H \circ M)_n = X_0 + \sum_{j=1}^{\infty} H_j \Delta X_j, \quad n \geq 1.$$

7.7 teiginys. *Jei $(X_n, n \geq 0)$ yra (sub)martingalas, o $(H_n, n \geq 1)$ yra aprėžta (neneigiama) numatoma seka, tuomet transformuota seka $((H \circ M)_n)$ yra (sub)martingalas.*

Jei martingalą interpretuosime kaip lošėjo pelną, tuomet natūralus klausimas yra toks: ar galime maksimizuoti pelną sustabdydami lošimą kuriuo nors laiku. Jei $(X_n, n = 0, 1, 2, \dots)$ yra martingalas ir $EX_0 = 0$, tuomet ir $EX_n = 0$ su kiekvienu $n = 1, 2, \dots$ Taigi, lošimo sustabdymas bet kuriuo fiksuotu laiko momentu nepadeda padidinti vidutinio pelno. Tačiau, tai neįrodo, kad negalima lošimo sustabdyti atsitiktiniu laiko momentu. Pavyzdžiui, prieš gręsiančius didelius nuostolius (jei žinotume, kad jie artėja). Tokį scenarijų galime nagrinėti panaudoję sustabdymo momentus.

7.5 pavyzdys. Jei T yra sustabdymo momentas, tuomet procesas

$$H_n = \mathbf{1}_{T \geq n}, \quad n \geq 0$$

yra numatomas. Tikrai, $\{T \geq n\}^c = \{T \leq n-1\} \in \mathcal{F}_{n-1}$. Atitinkama martingalo (X_n) transformacija yra

$$\begin{aligned}(H \circ M)_n &= \sum_{j=1}^{n} \mathbf{1}_{T \geq j}(X_j - X_{j-1}) \\ &= X_0 + \sum_{j=1}^{T \wedge n}(X_j - X_{j-1}) = X_{T \wedge n}.\end{aligned}$$

Taigi, jei (X_n) yra (sub)martingalas tai ir sustabdytas procesas yra (sub)martingalas.

7.8 teiginys. *T yra sustabdymo momentas tada ir tik tada, kai $\{T = n\} \in \mathcal{F}_n$ su visais $n = 0, 1, 2, \dots$*

Tai kad apsiribojama sustabdymo momentu yra visai natūralu. Jei pasirinkome laiką T ati su kiekvienu $n = 0, 1, 2, \dots$ turime žinoti ar $T = n$ laiko momentu n. Jei srautas (filtracija) yra generuota paio proceso, tai įvykis $\{T = n\}$ turi priklausyti nuo informacijios apie $X_0, X_1, \dots, X_n$, jei T yra sustabdymo momentas. Taigi sprendimas turi būti priimtas atsižvelgiant į proceso istoriją, bet ne į ateitį.

Klausimas ar galime rasti tokį sustabdymo momentą T, kad $EX_T > 0$ dar neatsakytas. Čia atsitiktinis dydis X_T yra apibržtas taip:

$$(X_T)(\omega) = X_{T(\omega)}(\omega), \quad \omega \in \Omega.$$

Jei T gali įgyti begalinę reikšmę, tai reikia apibrėžti X_∞.

Norėdami atsakyti į iškeltą klausimą, pirmiausi apibrėšime procesą $(X_n^T, n = 0, 1, 2, \dots)$:

$$X_n^T(\omega) = X_{T(\omega) \wedge n}(\omega).$$

7.9 teiginys. *Jei X yra martingalas, tai ir X^T yra martingalas.*

Įrodymas. Galime užrašyti

$$X_n^T = X_0 + \sum_{k=1}^{n} \mathbf{1}_{T \le n}(X_k - X_{k-1}).$$

Taigi $X_{n+1}^T - X_n^T = \mathbf{1}_{n+1 \le T}(X_{n+1} - X_n)$. Atsitiktinis dydis $_{n+1 \le T} = 1 - \mathbf{1}_{T \le n}$ yra $\mathcal{F}_n$–matus. Todėl

$$E(X_{n+1}^T - X_n^T | \mathcal{F}_n) = \mathbf{1}_{n+1 \le T} E(X_{n+1} - X_n | \mathcal{F}_n) = 0$$

nes X yra martingalas. Taip pat reikia pastebėti, kad

$$|X_n^T| \le max_{1 \le i \le n} |X_i|.$$

■

Galima įsitikinti, kad submartingališkumas ir supermartingališkumas taip pat išlieka sustabdžius atitinkamą procesą.

7.2 teorema. (Optional stopping.) *Tegu (X_n) yra submartingalas ir $S \le T \le m$ yra du sustabdymo momentai nedidesni už fiksuotą skaičių m. Tuomet*

$$E(X_T | \mathcal{F}_S) \ge X_S.$$

Be to, lygybė bus tada, kai M yra martingalas.

Įrodymas. Įrodysime tik martingalui. ■

7.3 teorema. (Dubo nelygybė) *Tarkime, (X_n) yra submartingalas ir $\lambda > 0$. Tuomet*

$$P(\sup_{0 \le n \le N} X_n \ge \lambda) \le \lambda^{-1} E(X_N \mathbf{1}_{\{\sup_{0 \le n \le N} X_n \ge \lambda\}}).$$

Įrodymas. Nagrinėkime sustabdymo momentą

$$T = \inf\{n \ge 0 : X_n \ge \lambda\} \wedge N.$$

■

Jei $X_1, X_2, \ldots$ martingalas ir ψ tokia iškiloji funkcija, kad $E\psi(X_n) < \infty$ su visais $n \in \mathbb{N}$, tai $\psi(X)_1), \psi(X_2), \ldots$ – submartingalas.

Jei $X_1, X_2, \ldots$ submartingalas ir ψ tokia nemažėjanti iškiloji funkcija, kad $E\psi(X_n) < \infty$ su visais $n \in \mathbb{N}$, tai $\psi(X)_1), \psi(X_2), \ldots$ – submartingalas.

7.4 teorema. (Kolmogorovo nelygybė) *Jei $X_1, X_2, \dots$ submartingalas ir $\lambda > 0$, tai*

$$P(\max_{i\leq n} X_i \geq \lambda) \leq \lambda^{-1} E|X_n|.$$

7.5 teorema. (Martingalų konvergavimo.) *Tegu $X_1, X_2, \dots$ yra submartingalas ir $K = \sup_n E|X_k| < \infty$. Tuomet $X_n \to X$ b.t. Čia X yra toks atsitiktinis dydis, kad $E|X| \leq K$.*

7.6 pavyzdys. Tegu $\{\xi_n, n \geq 1\}$ yra nepriklausomi vienodai pasiskirstę normaliniai atsitiktiniai dydžiai su nuliniu vidurkiu ir dispersija σ^2. Apibrėžkime $X_0 = 1$,

$$X_n = \exp\{\sum_{j=1}^{n} -n\sigma^2/2\}.$$

Seka (X_n) yra neneigiamas martingalas ir $X_n \xrightarrow{b.t.} 0$. Bet $EX_n = 1$ su visais n.

7.3 Kai kurie taikymai ekonomikoje

7.7 pavyzdys. Ateities kainos.

Tarkime, ..., $X_t, X_{t+1}, \dots, X_{t+T}, \dots$ – procesas, aprašantis kainas, pvz. aukso, vilnos, ect., X_t yra kaina dabartiniu momentu, X_{t+T} – ateities kaina, praėjus T laiko momentų (dienų). Tarkime, kad atsitiktiniai dydžiai X_j yra aprėžti ir apibrėžti tikimybinėje erdvėje $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Ekonominis agentas žino šios dienos kainą ir buvusias kainas. Kitais žodžiaia, tariame, kad ekonominis agentas žino visą informaciją, kurią generuoja procesas iki laiko momento t, arba informaciją esančią σ-algebroje $\mathcal{F}_t = \sigma(X_0, X_1, \dots, X_t)$. Joje, beje, yra ir buvusios kainos, tarkime, $x_0, x_1, \dots, x_t$. Jos yra viena iš proceso realizacijų,

$$X_0(\omega) = x_0, \dots, X_t(\omega) = x_t.$$

Tačiau agentas negali žinoti nei rytdienos kainos X_{t+1} nei juo labiau kainos X_{t+T}. Tačiau laikui bėgant, informacijos vis daugėja, todėl galima vis kita kainos prognozė. Tarkime, kad $Y(T,t)$ – ateities kaina, kuri įsivyraus per T laiko periodų pradedant nuo t ir, kuria remiamasi laiko momentu t. Pasibaigus vienam laiko periodui, ateities kaina bus $Y(T-1, t+1)$ ir taip toliau.Tai gauname seką

$$Y(T,t), Y(T-1, t+1), \dots, Y(T-n, t+n), \dots, T(1, t+T-1). \tag{7.1}$$

Racionalių lūkesčių hipotezė skelbia, kad

$$Y(T,t) = E[X_{t+T}|\mathcal{F}_t], \quad T = 1, 2, \dots \tag{7.2}$$

Įsitikinsime, kad jei teisinga racionalių lūkesčių (7.2) hipotezė, tai (7.1) seka yra martingalas atžvilgiu σ-algebrų

$$\mathcal{F}_t, \mathcal{F}_{t+1}, \ldots, \mathcal{F}_{t+T-1}.$$

Iš esmės reikia patikrinti tik martingališkumo sąryšį

$$E[Y(T-1, t+1)|\mathcal{F}_t] = Y(T, t).$$

Tam reikia pasinaudoti dvigubo vidurkinimo taisykle:

$$\begin{aligned} E[Y(T-1, t+1)|\mathcal{F}_t] &= E[E[X_{t+T}|\mathcal{F}_{t+1}]|\mathcal{F}_t] \\ &= E[X_{t+T}|\mathcal{F}_t] \\ &= Y(T, t). \end{aligned}$$

Martingalinė ateities kainų savybė gali būti panaudota tiriant ir akcijų rinkos efektyvumą.

Kapitalo rinka yra efektyvi, jei vertybinių popierių kaina atspindi visą prieinamą informaciją.

7.8 pavyzdys. Pirmojo apibendrinimas įvedant diskonto faktorių. Pažymėkime $\alpha = (1+r)^{-1}$, čia r a la palūkanų norma ir tarkime,

$$Y(T, t) = \alpha^T E[X_{t+T}|\mathcal{F}_t], \quad T = 1, 2, \ldots \tag{7.3}$$

Taip sukonstruota seka yra submartingalas. σ-algebros aprašo bent silpną informaciją (silpna, pusiau stipri, stipri infoprmacijos).

Moralė: martingalinė ateities kainų savybė reiškia, kad bet kurie bandymai praeities kainose įžvelgti kokią nors naudą prognozuojant yra pamerkti žlugti.

$$\begin{aligned} E[Y(T-1, t+1)|\mathcal{F}_t] &= E[\alpha^{T-1} E[X_{t+T}|\mathcal{F}_{t+1}]|\mathcal{F}_t] \\ &= \alpha^{T-1} E[E[X_{t+T}|\mathcal{F}_{t+1}]|\mathcal{F}_t] \\ &= \alpha^{T-1} E[X_{t+T}|\mathcal{F}_t] = \alpha^{T-1}\alpha^{-T} Y(T, t) = (1+r)Y(T, t) \\ &\geq Y(T, t). \end{aligned}$$

7.9 pavyzdys. Akcijų kapitalizacija.

Tarkime, $x_t, \ldots, x_{t+T}$ – duotos akcijos dividendų, išmokamų atitinkamai laikotarpiais $t, t+1, \ldots, t+T$ seka. Tarkime, kad diskontavimas yra pastovus ir lygus r. Pradžioje tariame, kad dividendai yra nestochastiniai dydžiai. Tuomet akcijos kaina yra

$$V_t = \sum_{T=1}^{\infty} \frac{x_{t+T}}{(1+r)^T}. \tag{7.4}$$

Iš (7.4) nesunku išvesti

$$V_{t+1} = \sum_{T=2}^{\infty} \frac{x_{t+T}}{(1+r)^{T-1}}.$$

Todėl

$$V_t - \frac{V_{t+1}}{1+r} = \frac{x_{t+1}}{1+r}$$

arba

$$V_{t+1} = (1+r)V_t - x_{t+1}.$$

Toliau įveskime stochastiką. Tarkime, kad $x_t, \ldots, x_{t+T}$ yra atsitiktiniai dydžiai, apibrėžti vienoje tikimybinėje erdvėje $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. σ-algebrų seka $\mathcal{F}_{t+T}$ turi bent silpną informaciją, t.y. $\sigma(x_t, \ldots, x_{t+T}) \subset \mathcal{F}_{t+T}$. Tai reiškia, kad investuotojui žinoma bent dividendų istorija. Racionali (fundamentali) akcijos kaina

$$v_t = E[V_t|\mathcal{F}_t] \tag{7.5}$$
$$= \tag{7.6}$$

7.4 Pratimai

7.1 pratimas. Tegu X, Y yra du nepriklausomi Bernulio atsitiktiniai dydžiai. Apibrėžkime $Z = \mathbf{1}_{\{X+Y=0\}}$. Raskite $E(X|Z)$ ir $E(Y|Z)$. Ar tie atsitiktiniai dydžiai yra nepriklausomi?

7.2 pratimas. Tegu $(Y_n, n \geq 1)$ yra nepriklausomų atsitiktinių dydžių tolygiai pasiskirsčousių intervale $[-1, 1]$ seka. Tegu $S_0 = 0$, $S_n = Y +_1 + \cdots + Y_n, n \geq 1$. Patikrinkite ar duotos sekos yra martingalai:

a) $X_n = \sum_{k=1}^n S_{k-1}^2 Y_k, \quad X_0 = 0;$

b) $X_n = S_n^2 - \frac{n}{3}, \quad X_0 = 0.$

7.3 pratimas. Tarkime, $(Y, \mathcal{F})$ yra martingalas. Įrodykite, kad

$$E(Y_{n+m}|\mathcal{F}_n) = Y_n$$

su visais $n, m \geq 0$.

7.4 pratimas. Tegu $(X_n, n \geq 1)$ yra nepriklausomi $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ a.d. Tegu $Y_0 = 1$,

$$Y_n = \exp\{a \sum_{k=1}^n X_k - n\sigma^2\}, \quad n \geq 1.$$

Su kuria parametro a reikšme, (Y_n) yra martingalas?

7.5 pratimas. Tarkime, S_n yra draudimo kompanijos kapitalas n-tųjų metų gale. n-taiss metais gautas pelnas yra $c > 0$ ir išmokėta ξ_n išmokų. Tegu ξ_n yra $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ ir $\mu < c$. Kompanija bankrutuoja, kai jos kapitalas pasidaro mažesnis ar lygus nuliui. Įrodykite, kad

$$P(bankrotas) \leq \exp\{-2(c-\mu)S_0?\sigma^2).$$

8 Brauno judesio procesas

8.1 Apibrėžimas ir paprasčiausios savybės

Matematinis Brauno judesio proceso apibrėžimas yra toks.

8.1 apibrėžimas. *Atsitiktinis procesas* $(B_t, t \geq 0)$ *vadinnamas Brauno judesiu, jei jis turi šias savybes:*

1) $B_0 = 0$

2) *proceso priaugliai yra nepriklausomi: su visais* $0 \leq t_1 < \cdots < t_n$ *atsitiktiniai dydžiai* $B_{t_n} - B_{t_{n-1}}, \ldots, B_{t_2} - B_{t_1}$ *yra nepriklausomi;*

3) *jei* $0 \leq s < t$*, tai atsitiktinis dydis* $B_t - B_s$ *turi normalųjį skirstinį* $\mathcal{N}(0, t-s)$*;*

4) *proceso* $(B_t, t \geq 0)$ *trajektorijos yra tolydžios.*

Brauno judesys yra Gauso procesas. Atsitiktinio vektoriaus $(B_{t_1}, \ldots, B_{t_n})$ skirstinys yra normalinis su visais $0 \leq t_1 < \cdots < t_n$.

Brauno judesio vidurkis yra

$$m_B(t) = EB_t = 0, \quad t \geq 0,$$

o kovariacija

$$\Gamma_B(s,t) = EB_sB_t = \min\{s,t\}.$$

Be to, jei atsitiktinis Gauso procesas turi nulin5 vidurk5 ir kovariacija $\min\{s,t\}$, tai jis tenkina 1) – (4) savybes.

Kovariacinė funkcija $\Gamma(s,t) = \min\{s,t\}$ yra neneigiamai apibrėžta, nes

$$\begin{aligned}\sum_{i,j=1}^{n} a_i a_j \min\{t_i, t_j\} &= \sum_{i,j=1}^{n} \int_0^\infty \mathbf{1}_{[0,t_i]}(u)\mathbf{1}_{[0,t_j]}(u)du \\ &= \int_0^\infty \Big[\sum_{i=1}^{n} a_i \mathbf{1}_{[0,t_i]}(u)\Big]^2 du \geq 0.\end{aligned}$$

Taigi remiantis Kolmogorovo teorema egzistuoja Gauso procesas, kurio kovariacija yra $\Gamma(t,s) = \min\{t,s\}$. Kta vertus, $B_t - B_s$ turi normalųjį skirstinį, todėl

$$E[(B_t - B_s)^{2k}] = \frac{(2k)!}{2^k k!}(t-s)^k.$$

Taigi egzistuoja proceso versija, kurios trajektorijos yra tolydžios.

Trajektorijų reguliarumas.

Iš Kolmogorovo teoremos apie procesų tolydumą gauname, kad kiekvieną $\varepsilon > 0$ atitinka toks atsitiktinis dydis $G_{\varepsilon,T}$ su kuriuo

$$|B_t - B_s| \le G_{\varepsilon,T}|t-s|^{1/2-\varepsilon}$$

visiems $s, t \in [0,T]$. Taigi Brauno judesio trajektrijos yra tenkina Hipolderio sąlygą su rodikliu $1/2-\varepsilon$. Intuityviai tai reiškia, kad

$$\Delta B_t = B_{t+\Delta t} - B_t \simeq (\Delta t)^{1/2}.$$

Taip yra kvadratinio vidurkio prasme, nes $E[\Delta B_t]^2 = \Delta t$.

Kvadratinė variacija.

Imkime intervalo $[0,t]$ skaidinį $\pi = (t_0, t_1, \ldots, t_n$:

$$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = t.$$

Apibrėžkime $|\pi| = \max_{1\le k\le n}(t_k - t_{k-1})$. Imdami $t_j = j^t/n$ gauname

$$\sum_{k=1}^n |\Delta B_k| \simeq n(t/n)^{1/2} \to \infty \quad \text{kai} \quad n \to \infty.$$

Kita vertus

$$\sum_{k=1}^n (\Delta B_k)^2 \simeq n\frac{t}{n} = t.$$

Formaliai tai galime pagrįsti tokiu būdu. Suskaičiuokime

$$E\Big(\sum_{k=1}^n (\Delta B_k)^2 - t\Big)^2 = E\Big(\sum_{k=1}^n [(\Delta B_k)^2 - \Delta t_k]\Big)^2$$

kadangi Brauno judesio priaugliai yra nepriklausomi

$$= \sum_{k=1}^n E[(\Delta B_k)^2 - \Delta t_k]^2$$

$$= \sum_{k=1}^n [3(\Delta t_k)^2 - 2('\Delta t_k)^2 + (\Delta t_k)^2]$$

$$= 2\sum_{k=1}^n (\Delta t_k)^2 \le 2t|\pi| \to 0,$$

kai $|\pi| \to 0$.

Brauno judesio pilnoji variacija

$$V = \sup_\pi \sum_{k=1}^n |\Delta t_k|$$

yra begalinė su tikimybe vienas. Tikrai, jei V būtų bvaigtinis dydis, tai

$$\sum_{k=1}^n (\Delta B_k)^2 \le \sup_k |\Delta B_t| \sum_{k=1}^n |\Delta B_k| \le V \max_k |\Delta B_k| \to 0,$$

kai $|\pi| \to 0$, nes Brauno judesio trajektorijos yra tolydžios. Bet tas prieštarautų ką tik įrodytam faktui, kad $\sum_{k=1}^{n}(\Delta B_k)^2$ konverguoja kvadratinio vidurkio prasme prie intervalo ilgio t, tai $\pi| \to 0$.

Savipanašumo savybė.

Kokį bepaimtume $a > 0$, atsitiktinis procesas

$$(a^{-1/2}B_{at}, t \geq 0)$$

yra Brauno judesys. Tą nesunkai galime patikrinti.

8.2 Atsitiktiniai procesai susiję su Brauno judesiu

1. Brauno tiltas: taip vadinamas procesas

$$X_t = B_t - tB_1,$$

kai $t \in [0, 1]$. Tai centruotas Gausinis procesas, kurio kovariacinė funkcija yra

$$E(X_t X_s) = \min\{s, t\} - st,$$

$s, t \in [0, 1]$ ir tenkina sąlygas $X_0 = X_1 = 0$.

2. Brauno tiltas su dreifu. Nagrinėkime procesą

$$X_t = \sigma B_t + \mu t,$$

$t \geq 0$. Čia $\sigma > 0, t \in \mathbb{R}$ yra konstantos. Atsitiktinis procesas $(X_t, t \geq 0)$ yra Gauso su vidurkiu

$$\mu_X(t) = E(X_t) = \mu t$$

ir kovariacine funkcija

$$\Gamma_X(s, t) = \sigma^2 \min\{s, t\},$$

$s, t \geq 0$.

3. Geometrinis Brauno judesys apibrėžiamas taip:

$$X_t = \exp\{\sigma B_t + \mu t\},$$

$t \geq 0$, o $\sigma > 0$ it $t \in \mathbb{R}$ yra konstantos. Šį procesasą Black, Scholes ir Merton pasiūlė akscijų kainų modeliavimui. Procesas nėra Gausinis.

8.3 Modeliavimas

Tarkime, $X_1, X_2, \ldots, X_n$ yra nepriklausomi vienodai pasiskirstę atsitiktiniai dydžiai, $EX_1 = 0$. Apibrėžkime $S_0 = 0$ ir

$$S_k = X_1 + X_2 + \cdots + X_k, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Nagrinėkime atsitiktinį procesą

$$\xi_n(t) = n^{-1/2}\Big(S_{[nt]} + (nt - [nt])X_{[nt]+1}\Big), \quad t \in [0,1].$$

Akivaizdu, kad to proceso visos trajektorijos yra tolydžios. Taip vadinamas Donskerio invariantiškumo principas įrodo, kad procesas $(\xi_n(t), t \in [0,1]$ konverguoja (tam tikra prasme) prie Brauno tilto intervale $[0,1]$, t.y. prie proceso $(B_t, t \in [0,1])$.

Brauno judesį galime modeliuoti taikydami taip vadinamą Paley-Wiener skaidinį:

$$B_t = \gamma_0 \frac{t}{\sqrt{2\pi}} + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(nt/2)}{n} \gamma_k,$$

$t \in [0, 2\pi]$. Čia $\gamma_0, \gamma_1, \ldots$ yra nepriklausomi standartiniai normaliniai atsitiktiniai dydžiai. Naudojant šį dėstinį, reikia pasirinkti svaikuosius skaičius M ir N ir modeliuoti

$$\gamma_0 \frac{t_j}{\sqrt{2\pi}} + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=1}^{M} \frac{\sin(nt_j/2)}{n} \gamma_k,$$

$t_j = (2\pi j)/N$, $j = 0, 1, \ldots, N$.

8.4 Martingalai susiję su Brauno judesiu

Pirmiausia apibrėžkime σ algebrų srautą. Nagrinėkiome Brauno judesį $(B_t, t \geq 0)$, apibrėžtą tikimybinėje erdvėje $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Kiekvienam laiko momentui t, tegu $\mathcal{F}_t$ yra σ algebra generuota atsitiktinių dydžių $\sigma\{B_s, s \leq t\}$ ir $\mathcal{F}$ aibių, kurių tikimybės yra nulinės. Kitaip tariant, $\mathcal{F}_t$ yra mažiausia σ algebra, kuriai priklauso aibės pavidalo

$$\{B_s \in A\} \cup N;$$

čia $0 \leq s \leq t$, $A \subset \mathbb{R}$ yra Borelio aibė, $N \in \mathcal{F}$ tokia aibė, kad $P(N) = 0$. Galime pastebėti, kad $\mathcal{F}_u \subset cf_t$, jei $u \leq t$. Kitaip tariant, šeima $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ yra tikimybinės erdvės $(\Omega, , \mathsf{P})$ filtracija.

Sakysime, kad atsitiktinis procesas $(u_t, t \geq 0)$ yra adaptuotas (prie filtracijos $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$), jei su kiekvienu $t \geq 0$ atsitiktinis dydis u_t yra $\mathcal{F}_t$ matus.

8.1 teiginys. *Adaptuoto proceso bet kuri versija yra adaptuotas procesas.*

8.2 teiginys. *Šeima $\{cf_t, t \geq 0\}$ yra tolydi iš dešinės, t.y., su visais $t \geq 0$,*

$$\bigcap_{s>t} \mathcal{F}_s = \mathcal{F}_t.$$

8.3 teiginys. *Procesai*

- $(B_t, t \geq 0)$;
- $(B_t^2 - t, t \geq 0)$;
- $(\exp\{aB_t - a^2 t/2\}, t \geq 0)$

yra martingalai filtracijos $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ atžvilgiu.

Įrodymas. Brauno judesio procesas yra martingalas, nes $E(B_s|\mathcal{F}_s) = B_s$, o

$$E(B_t - B_s|\mathcal{F}_s) = E(B_t - B_s) = 0.$$

Imdami $s < t$ bei taikydami sąlyginio vidurkio savybes suskaičiuojame

$$\begin{aligned}
E(B_t^2|\mathcal{F}_s) &= E((B_t - B_s + B_s)^2|\mathcal{F}_s) \\
&= E((B_t - B_s)^2|\mathcal{F}_s) + 2E((B_t - B_s)B_s)|\mathcal{F}_s) + E(B_s^2|\mathcal{F}_s) \\
&= E(B_t - B_s)^2 + 2B_s E((B_t - B_s)|\mathcal{F}_s) + B_s^2 \\
&= t - s + B_s^2.
\end{aligned}$$

Panašiai įsitikiname, kad ir trečiasis procesas yra martingalas:

$$\begin{aligned}
E(\exp\{aB_t - a^2 t/2\}|\mathcal{F}_s) &= e^{aB_s} E(\exp\{a(B_t - B_s) - a^2 t/2\}|\mathcal{F}_s) \\
&= e^{aB_s} E \exp\{a(B_t - B_s) - a^2 t/2\} \\
&= \exp\{aB_s\} \exp\{a^2(t-s)/2 - a^2 t/2\} = \exp\{aB_s - a^2 s/2\}.
\end{aligned}$$

Teiginį įrodėme. ■

taikydami šias martingališkumo savybes nustatystime Brauno judesio atvykimo į fiksuotą poziciją laiko momento skirstinį. Pažymėkime

$$\tau_a = \inf\{t \geq 0 : B_t = a\},$$

čia skaičius $a > 0$ yra fiksuotas. Atsitiktinis procesas $M_t = \exp\{\lambda B_t - \lambda^2 t/2\}, t \geq 0$ yra martingalas, kuriam

$$EM_t = EM_0 = 1.$$

Remiantis sustabdymo teorema

$$EM_{\tau_a \wedge N} = 1$$

su visais $N \geq 1$.

8.5 Stochastinis integralas

8.6 Pratimai

8.1 pratimas. Vynerio procesui W, kuris prasideda nulyje $W(0) = 0$ įrodykite, kad

$$P(W_s > 0, W_t > 0) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2\pi} \sin^{-1} \sqrt{s/t},$$

kai $s < t$. Raskite $P(W_s > 0, W_t > 0, W_u > 0)$, kai $s < t < u$.

8.2 pratimas. Tegu W yra standartinis Vynerio procesas, $a > 0$. Įrodykite, kad šie procesai taip pat yra standartiniai Vynerio procesai:

(a) $V_t = aW_{t/a^2}$,

(b) $W_{t+a} - W_t$,

(c) $V_t = wW_{1/t}$, kai $t \neq 0$, $V_0 = 0$,

(d) $W_1 - W_{1-t}, t \in [0, 1]$.

8.3 pratimas. Kokios turi būti parametrų λ_1, λ_2 reikšmės, kad procesas $\lambda_1 W^{(1)} + \lambda_2 W^{(2)}$ būtų standartinis Vynerio procesas, kai $W^{(1)}$ ir $W^{(2)}$ yra nepriklausomi standartiniai Vynerio procesai.

8.4 pratimas. Tegu W yra standartinis Vynerio procesas. Raskite šių procesų vidurkius ir kovariacines funkcijas:

(a) ${}_t = |W_t|$,

(b) $Y_t = e^{W_t}$,

(c) $Z_t = \int_0^t W_s ds$.

Literatūros sąrašas

[1] Marc A. Berger (1992). *An Introduction to Probability and Stochastic Processes*, Springer-Verlag, New York.

[2] Rick Durrett (1997). *Essentials of Stochastic Processes*, Springer, New York.

[3] Sidney Resnick (1992). *Adventures in Stochastic Processes*, Birkhäuser, Boston-Basel-Berlin.

[4] Hsu Hwei P. (1997) *Probability, Random Variables and Random Processes*, Schaum's Outlines Series, McGraw-Hill, New-York.