7 paskaita

7.1 Normuotosios erdvės

Erdvės, kurios yra kartu ir tiesinės ir metrinės sudaro labai svarbią šeimą. Joje išsiskiria normuotosios – tos, kurių metrika aprašoma normos pagalba, savotišku skaičiaus modulio apibendrinimu.

Pilnos normuotosios erdvės vadinamos Banacho erdvėmis. Tokį pavadinimą S. Banacho garbei, daug prisidėjusiam kuriant šiuolaikinę abstrakčių normuotųjų erdvių teoriją, pasiūlė M. R. Frešė. Namažai šios teorijos rezultatų atrado F. Rysas.

Šioje paskaitoje, be apibrėžimo ir parasčiausių normuotųjų erdvių savybių bei pavyzdžių, susipažinsime su Šauderio bazėmis. Jos, tam tikra prasme, vaidina erdvės „koordinačių sistemos" vaidmenį. Jei ji egzistuoja (deja, tai yra ne visada), tai erdvės elemetus galime pakeisti atitinkamomis jų „koordinatėmis". Haaro sistema bei Šauderio kepuraičių sistema yra labai svarbūs atitinkamai Lebego bei tolydinių funkcių erdvių Šauderio bazių pavyzdžiai.

7.1.1 Apibrėžimas, pavyzdžiai

Tarkime, $\mathbb{E}$ – tiesinė erdvė virš skaliarų kūno $\mathbb{K}$.

7.1 apibrėžimas. *Atvaizdis* $||\cdot|| : \mathbb{E} \to [0, \infty)$ *vadinamas erdvės* $\mathbb{E}$ *norma, jei išpildytos šios aksiomos:*

$(N1)$ $\quad ||x|| = 0$ *tada ir tik tada, kai* $x = 0$ *(vienaties);*

$(N2)$ $\quad ||\alpha x|| = |\alpha| \cdot ||x||$ *su visais* $x \in \mathbb{E}$ *ir* $\alpha \in \mathbb{K}$ *(homogeniškumo);*

$(N3)$ $\quad ||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$ *su visais* $x, y \in \mathbb{E}$ *(trikampio nelygybės).*

7.2 apibrėžimas. *Pora* $(\mathbb{E}, ||\cdot||)$, *kai* $\mathbb{E}$ *– tiesinė erdvė virš skaliarų kūno* $\mathbb{K}$, *o* $||\cdot||$ *– erdvės* $\mathbb{E}$ *norma, vadinama tiesine erdve virš skaliarų kūno* $\mathbb{K}$.

Skaičius $||x||$ *vadinamas elemento* $x \in \mathbb{E}$ *norma.*

Tais atvejais, kai norma fiksuota arba iš konteksto suprantama, vietoj poros $(\mathbb{E}, ||\cdot||)$ rašysime tik $\mathbb{E}$. O norėdami pažymėti erdvės normą, kartais prirašysime indeksą – $||x||_{\mathbb{E}}, ||x||_{\mathbb{F}}$ ir t.t.

Kiekviena normuotoji erdvė kartu yra ir metrinė su atstumo funkcija

$$d(x,y) = ||x-y||, \quad x, y \in \mathbb{E}. \tag{7.1}$$

Nesunku įsitikinti, kad taip apibrėžtai funkcijai $d : \mathbb{E} \times \mathbb{E} \to \mathbb{R}$ teisingos visos metrikos aksiomos. Tikrai, $d(x,y) = 0$ reiškia, kad $||x-y|| = 0$, o taip gali būti tada ir tik tada, kai $x = y$. Simetriškumo aksioma teisinga, nes $x - y = (-1)(y-x)$, todėl $d(x,y) = ||(-1)(y-x)|| = |-1| \cdot ||y-x|| = d(y,x)$. Pagaliau trikampio nelygybės aksioma išplaukia iš trikampio nelygybės normai:

$$\begin{aligned} d(x,y) =& ||x-y|| = ||(x-z) + (z-y)|| \leq \\ & ||x-z|| + ||z-y|| = d(x,z) + d(z,y). \end{aligned}$$

Pastebėsime, jog iš atstumo funkcijos apibrėžimo (7.1) formule gauname, kad

$$||x|| = d(x,0).$$

Tai yra, elemento x norma reiškia jo atstumą iki nulinio elemento. Ta prasme, norma apibendrina skaičiaus modulį.

Tokiu būdu, normuotosios erdvės yra metrinių erdvių šeimos pošeimė ir visos sąvokos, teoremos bei teiginiai iš metrinių erdvių konteksto persikelia normuotoms erdvėms. Kai kurias iš jų performuluosime normos terminais.

1) Seka $(x_n) \subset \mathbb{E}$ konverguoja į elementą $x \in \mathbb{E}$ tada ir tik tada, kai

$$||x_n - x|| \to 0, \quad \text{kai} \quad n \to \infty. \tag{7.2}$$

2) Su visais $x, y \in \mathbb{E}$,

$$\big|\, ||x|| - ||y|| \,\big| \leq ||x-y||. \tag{7.3}$$

Ši nelygybė lengvai išvedama iš trikampio nelygybės aksiomos. Tikrai, užrašę $x = (x-y) + y$ ir, pritaikę trikampio nelygybės aksiomą, turime

$$||x|| = ||(x-y) + y|| \leq ||x-y|| + ||y||.$$

Taigi $||x|| - ||y|| \leq ||x-y||$. Sukeitę vaidmenimis x ir y, išvedame $||y|| - ||x|| \leq ||y-x|| = ||x-y||$ ir taip įrodome (7.3).

3) Norma yra tolydi funkcija, t.y., jei $x_n \to x$, tai $||x_n|| \to ||x||$. Įrodymui reikia pritaikyti (7.3) nelygybę.

4) Aibė $A \subset \mathbb{E}$ yra aprėžta tada ir tik tada, kai egzistuoja toks baigtinis skaičius M, su kuriuo $||x|| \leq M$, kai $x \in A$.

5) Tiesinės normuotosios erdvės algebrinės operacijos yra tolydžios. Tai yra,

- jei $x_n \to x$, $y_n \to y$, tai $x_n + y_n \to x + y$;
- jei $x_n \to x$, $\lambda_n \to \lambda$, tai $\lambda_n x_n \to \lambda x$.

Šių savybių įrodymą paliekame skaitytojui vietoj pratimo.

Prieš pateikdami normuotųjų erdvių pavyzdžius, pastebėsime, kad dauguma tų erdvių kaip aibės yra apibrėžtos metrinių ir tiesinių erdvių skyreliuose, todėl naudosime tuos pačius žymenis ir nekartosime aibių aprašymo. Pavyzdžiui, pirmame skyriuje apibrėžta tolydžiųjų funkcijų metrinė erdvė $\mathcal{C}[a,b]$, trečiame – toje erdvėje įvestos tiesinės operacijos, o šiame – erdvėje $\mathcal{C}[a,b]$ apibrėšime normą, kuri yra suderinta su metrika, t.y. teisingas (7.1) sąryšis. Taip gaunamus pavyzdžius surašysime į lentelę.

1 lentelė. Normuotosios erdvės

Tiesinė erdvė	Norma
$\mathbb{R}$	$\|\|x\|\| = \|x\|$
$\mathbb{C}$	$\|\|x\|\| = \|x\|$
c_0	$\|\|\boldsymbol{x}\|\| = \sup_{k\geq 1} \|x_k\|$
$\ell_p, \quad p \geq 1$	$\|\|\boldsymbol{x}\|\| = \Big(\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|^p \Big)^{1/p}$
ℓ_∞	$\|\|\boldsymbol{x}\|\| = \sup_{n\geq 1} \|x_k\|$
$\mathcal{C}[a,b]$	$\|\|f\|\| = \sup_{a\leq t\leq b} \|f(t)\|$
$\mathcal{C}^{(k)}[a,b]$	$\|\|f\|\| = \sum_{j=0}^{k} \sup_{a\leq t\leq b} \|f^{(j)}(t)\|$

$L_p(a,b), p \geq 1$	$\lvert\lvert f\rvert\rvert = \left(\int_a^b \lvert f(t)\rvert^p dt\right)^{1/p}$
$L_\infty(a,b)$	$\lvert\lvert f\rvert\rvert = \inf\{M > 0 : m\{t : \lvert f(t)\rvert > M\} = 0\}$
$L_p(\Omega, \mathcal{F}, P), p \geq 1$	$\lvert\lvert \xi\rvert\rvert = \left(E\lvert\xi\rvert^p\right)^{1/p}$
$L_\infty(\Omega, \mathcal{F}, P)$	$\lvert\lvert \xi\rvert\rvert = \inf\{M : P\{\omega : \lvert\xi(\omega)\rvert > M\} = 0$
$H_\alpha[a,b],\ 0 < \alpha \leq 1$	$\lvert\lvert f\rvert\rvert = \lvert f(a)\rvert + \omega_\alpha(f,1)$
$H_\alpha^o[a,b],\ 0 \leq \alpha < 1$	$\lvert\lvert f\rvert\rvert = \lvert f(a)\rvert + \omega_\alpha(f,1)$
$\mathrm{BV}_p(a,b),\ p \geq 1$	$\lvert\lvert f\rvert\rvert = \sup_{a \leq t \leq b} \lvert f(t)\rvert + \mathrm{V}_p^{1/p}(f)$

Iš pateiktųjų pavyzdžių matyti, kad ne visos anksčiau apibrėžtos metrinės erdvės surado vietą lentelėje. Tai nėra atsitiktinumas ar klaida. Išties, ne kiekvienoje metrinėje erdvėje galime apibrėžti normą, net ir tuo atveju, kai nereikalaujame (7.1) sąryšio, o tik siekiame išlaikyti konvergavimą. Kaip pavyzdį panagrinėkime erdvę $\mathbb{R}^\mathbb{N}$. Priminsime, kad tos erdvės elementų sekos konvergavimas reiškia pakoordinatį konvergavimą. Tarkime, kad egzistuoja tokia erdvės $\mathbb{R}^\mathbb{N}$ norma $||\cdot||$, kad sekos konvergavimas tos normos prasme taip pat reiškia pakoordinatį konvergavimą. Nagrinėkime standartines vienetines sekas $\boldsymbol{e}_n = (\delta_{nk}), n \in \mathbb{N}$. Kadangi $\boldsymbol{e}_n \neq 0$, tai $||\boldsymbol{e}_n|| > 0$. Apibrėžkime

$$\boldsymbol{x}_n = \frac{1}{||\boldsymbol{e}_n||}\boldsymbol{e}_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Sekos $(\boldsymbol{x}_n)$ narių k-tųjų koordinačių seka yra $(x_{n,k})$:

$$x_{n,k} = \begin{cases} 0, & \text{kai } \ k \neq n; \\ ||\boldsymbol{e}_n||^{-1}, & \text{kai } \ k = n. \end{cases}.$$

Akivaizdu, kad su kiekvienu k, $\lim_{n\to\infty} x_{n,k} = 0$. Tokiu būdu, seka $(\boldsymbol{x}_n)$ konverguoja į nulį pakoordinačiui (t.y. erdvės $\mathbb{R}^\mathbb{N}$ metrikos prasme). Kita vertus, $||\boldsymbol{x}_n|| = 1 \not\to 0$. Gauta prieštara įrodo, kad erdvės $\mathbb{R}^\mathbb{N}$ normuoti taip, kad išlaikytume pakoordinatį konvergavimą, negalime.

7.1.2 Normų ekvivalentumas. Izomorfinės erdvės

Vienoje ir toje pačioje tiesinėje erdvėje gali būti apibrėžtos kelios normos. Labai svarbus uždavinys – normų palyginimas.

7.3 apibrėžimas. *Tarkime, $||\cdot||_1$ ir $||\cdot||_2$ – dvi skirtingos erdvės $\mathbb{E}$ normos. Sakoma, kad jos yra ekvivalenčios, jei egzistuoja tokios dvi baigtinės konstantos $c > 0, C > 0$, kad*

$$c||x||_1 \leq ||x||_2 \leq C||x||_1 \quad \textit{su visais} \quad x \in \mathbb{E}.$$

7.1 pavyzdys. Tiesinės erdvės $\mathcal{C}[0,1]$ normos $||x||_1 = \int_0^1 |x(t)|dt$ ir $||x||_2 = \int_0^1 (1+t)|x(t)|dt$ – ekvivalenčios, nes $||x||_1 \leq ||x||_2 \leq 2||x||_1$. Tuo tarpu normos $||x||_1$ ir $||x||_3 = \max_{t\in[0,1]} |x(t)|$ nėra ekvivalenčios. Paėmę funkcijų šeimą

$$x_a(t) = \begin{cases} a - a^2 t, & \text{kai } t \in [0, 1/a], \\ 0, & \text{kai } t \in (1/a, 1], \end{cases}$$

priklausančią nuo parametro $a > 1$, matome, kad $||x_a||_1 = 1/2$, o $||x_a||_3 = a$.

7.1 teorema. *Baigtiniamatės tiesinės erdvės visos normos ekvivalenčios.*

Įrodymas. Tarkime, $\mathbb{E}$ – baigtinės dimensijos tiesinė erdvė, $\dim(\mathbb{E}) = m$. Pakanka įrodyti, kad visos erdvės $\mathbb{K}^m$ normos yra ekvivalenčios. Mat bet kuri erdvės $\mathbb{E}$ norma $||\cdot||$ apibrėžia erdvės $\mathbb{K}^m$ normą $||\cdot||_0$:

$$||(x_1, \dots, x_m)||_0 = ||x_1 e_1 + \dots + x_m e_m||,$$

kai $(e_1, \dots, e_m)$ – erdvės $\mathbb{E}$ bazė. Ir atvirkščiai. Bet kuri erdvės $\mathbb{K}^m$ norma $||\cdot||_0$ apibrėžia erdvės $\mathbb{E}$ normą $||\cdot||$:

$$||x|| = ||(x_1, \dots, x_m)||_0,$$

kai $x = \sum_{k=1}^m x_k e_k$.

Fiksuokime erdvės $\mathbb{K}^m$ normą

$$||\boldsymbol{x}||_1 = \sum_{k=1}^m |x_k|,$$

kai $x = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{K}^m$. Paliekame pačiam skaitytojui įsitikinti, kad taip apibrėžta funkcija yra erdvės $\mathbb{K}^m$ norma. Įrodysime, kad bet kuri kita erdvės $\mathbb{K}^m$ norma ekvivalenti šiai.

Tegu $\boldsymbol{e}_k, k = 1, \dots, m$, žymi erdcvės $\mathbb{K}^m$ standartinių vienetinių vektorių bazę. Tarkime, $||\cdot||$ – erdvės $\mathbb{K}^m$ norma. Pagal trikampio nelygybės aksiomą,

$$||\boldsymbol{x}|| = \Big\| \sum_{k=1}^{m} x_k \boldsymbol{e}_k \Big\| \leq \sum_{k=1}^{m} |x_k| \cdot ||\boldsymbol{e}_k|| \leq C||x||_1, \tag{7.4}$$

kai $C = \max\{||\boldsymbol{e}_1||, \dots, ||\boldsymbol{e}_m||\}$.

Priešingos nelygybės įrodymui pažymėkime $S_1 = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{K}^m : ||\boldsymbol{x}||_1 = 1\}$ ir nagrinėkime funkciją $f : S_1 \to \mathbb{R}$, $f(\boldsymbol{x}) = ||\boldsymbol{x}||$, kai $\boldsymbol{x} \in S_1$. Nesunku įsitikinti, kad funkcija f yra tolydi erdvės $\mathbb{K}^m$ normos $||\cdot||_1$ atžvilgiu. Iš tikrųjų, pasinaudoję (7.3) ir (7.4) nelygybėmis, turime

$$\begin{aligned} &|f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{y})| = |\ ||\boldsymbol{x}|| - ||\boldsymbol{y}||\ | \leq ||\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|| \leq \\ &C||\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}||_1. \end{aligned}$$

Taigi funkcija f yra tolygiai tolydi. Tegu $\alpha = \inf_{\boldsymbol{x} \in S_1} f(\boldsymbol{x})$. Įsitikinkime, kad $\alpha > 0$. Tikrai, aibė S_1, kaip uždara ir aprėžta erdvės $\mathbb{K}^m$ aibė, yra kompaktiška. Todėl tolydžioji funkcija f aibėje S_1 įgyja mažiausią reikšmę (žr. **??** teoremą), t.y. $\alpha = f(\boldsymbol{x}_0)$ kažkuriam $\boldsymbol{x}_0 \in S_1$. Pastebėję, kad $||\boldsymbol{x}|| = 0$ tada ir tik tada, kai $\boldsymbol{x} = 0$ ir, savo ruožtu, $\boldsymbol{x} \neq 0$, kai $\boldsymbol{x} \in S_1$, matome, kad $\alpha > 0$. Kadangi $f(\boldsymbol{x}) \geq \alpha > 0$, kai $\boldsymbol{x} \in S_1$ ir bet kuriam nenuliniam $\boldsymbol{x} \in \mathbb{K}^m$ turime, kad $\boldsymbol{x}/||\boldsymbol{x}||_1 \in S_1$, tai

$$||\boldsymbol{x}|| = \Big\| \frac{\boldsymbol{x}}{||\boldsymbol{x}||_1} \Big\| \cdot ||\boldsymbol{x}||_1 = f(\boldsymbol{x}/||\boldsymbol{x}||_1)||\boldsymbol{x}||_1 \geq \alpha||x||_1. \tag{7.5}$$

Akivaizdu, kad ši nelygybė teisinga ir nuliniam elementui. Taigi (7.4) ir (7.5) nelygybės įrodo normų $||\cdot||$ ir $||\cdot||_1$ ekvivalentumą. ∎

Nežiūrint į ką tik įrodytą teiginį, erdvėje $\mathbb{R}^m$ dažnai reikia nagrinėti kitokias nei euklidinė normas. Tiesinė erdvė $\mathbb{R}^m$ su norma

$$||\boldsymbol{x}|| = \Big(\sum_{k=1}^{m} |x_k|^p \Big)^{1/p}, \quad p \geq 1, \quad \text{kai} \quad \boldsymbol{x} = (x_1 \dots, x_k) \in \mathbb{R}^m,$$

žymima ℓ_p^m. Analogiškai ℓ_∞^m yra erdvė $\mathbb{R}^m$ su norma

$$||\boldsymbol{x}|| = \max_{1 \leq k \leq m} |x_k|, \quad \text{kai} \quad \boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^m.$$

Priminsime, kad izomorfiniu atvaizdžiu tarp tiesinių erdvių vadiname bet kurią tiesinę bijekciją (žr. **??** apibrėžimą). Normuotoms erdvėms papildomai reikalaujama, kad ši bijekcija būtų abipus tolydi, t. y., tiek tiesioginis, tiek atvirkštinis atvaizdžiai būtų tolydūs.

7.4 apibrėžimas. *Normuotosios erdvės* $(\mathbb{E}, ||\cdot||_{\mathbb{E}})$ *ir* $(\mathbb{F}, ||\cdot||_{\mathbb{F}})$ *vadinamos izomorfinėmis, jei egzistuoja tiesinė abipus tolydi bijekcija* $J : \mathbb{E} \to \mathbb{F}$*. Atvaizdis* J *vadinamas izomorfiniu atvaizdžiu.*

Iš 7.1 teoremos, kaip išvadą, gauname šį teiginį.

7.2 teorema. *Visos* n*-matės tiesinės normuotosios erdvės virš skaliarų kūno* $\mathbb{K}$ *izomorfinės erdvei* $\mathbb{K}^n$*, tuo pačiu, jos izomorfinės viena kitai.*

Įrodymas. Tarkime, $\dim(\mathbb{E}) = n$ ir $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ – erdvės $\mathbb{E}$ bazė. Kiekvieną $x \in \mathbb{E}$ vienareikšmiškai galime išreikšti

$$x = \sum_{k=1}^{n} x_k \boldsymbol{e}_k, \quad x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{K}.$$

Apibrėžkime atvaizdį $J : \mathbb{E} \to \mathbb{K}$:

$$Jx = (x_1, \ldots, x_n).$$

Nesunku įsitikinti, kad atvaizdis J yra izomorfinis.

■

7.5 apibrėžimas. *Normuotosios erdvės* $(\mathbb{E}, ||\cdot||_{\mathbb{E}})$ *ir* $(\mathbb{F}, ||\cdot||_{\mathbb{F}})$ *vadinamos izometriškai izomorfinėmis, jei egzistuoja toks izomorfinis atvaizdis* $J : \mathbb{E} \to \mathbb{F}$*, kad*

$$||Jx||_{\mathbb{F}} = ||x||_{\mathbb{E}} \quad \text{su visais} \quad x \in \mathbb{E}.$$

Šiuo atveju atvaizdis J *vadinamas izometriniu izomorfizmu.*

Paprastai izometriškai izomorfinės normuotosios erdvės sutapatinamos, nes jų tiek tiesinės, tiek metrinės savybės identiškos. Pavyzdžiui, normuotosios erdvės $\mathbb{R}^{2n}$ ir $\mathbb{C}^n$ izometriškai izomorfinės, o $J(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{y}$, kai $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{2n}) \in \mathbb{R}^{2n}$ ir $\boldsymbol{y} = (x_1 + ix_{n+1}, \ldots, x_n + ix_{2n}) \in \mathbb{C}^n$ yra izometrija.

7.1.3 Ryso lema apie beveik statmenį

Įrodysime gana svarbų teiginį, dažnai vadinamą Ryso lema „apie beveik statmenį".

7.1 lema. *Tegu $\mathbb{E}$ – tiesinė normuotoji erdvė, $E_0 \subset \mathbb{E}$ – uždaras tiesinis poaibis, nesutampantis su $\mathbb{E}$. Kiekvienam $\varepsilon > 0$ erdvėje $\mathbb{E}$ egzistuoja toks elementas $y_\varepsilon \in \mathbb{E}$, kad $||y_\varepsilon|| = 1$ ir $||x - y_\varepsilon|| > 1 - \varepsilon$ su visais $x \in E_0$.*

Įrodymas. Paimkime bet kurį elementą $y_0 \in \mathbb{E} \setminus E_0$ ir pažymėkime

$$d = \inf_{x \in E_0} ||y_0 - x||.$$

Jei būtų $d = 0$, tai y_0 būtų ribinis E_0 taškas, todėl priklausytų E_0. Taigi $d > 0$. Remiantis d apibrėžimu, kiekvienam $\varepsilon > 0$ rasime tokį elementą $x_0 \in E_0$, kad

$$d \le ||y_0 - x_0|| \le d(1 + \varepsilon). \tag{7.6}$$

Pažymėkime

$$y_\varepsilon = \frac{y_0 - x_0}{||y_0 - x_0||}.$$

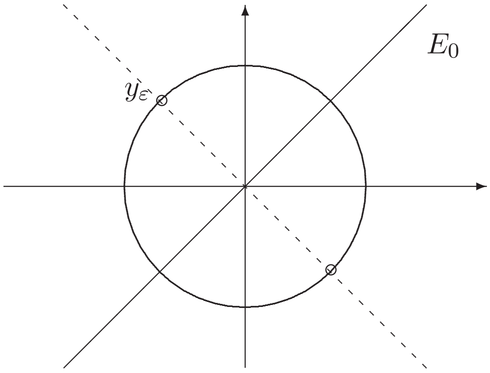
Įrodysime, kad y_ε ir yra ieškomasis elementas. Akivaizdu, kad $y_\varepsilon \notin E_0$ ir $||y_\varepsilon|| = 1$. Imkime bet kurį $x \in E_0$. Pažymėkime $z = x_0 + ||y_0 - x_0||x$. Aišku, kad $z \in E_0$. Pasinaudodami dydžiui $||y_0 - x_0||$ aukščiau užrašytomis (7.6) nelygybėmis, gauname

$$\begin{aligned} ||y_\varepsilon - x|| = & \left\| \frac{y_0 - x_0}{||y_0 - x_0||} - x \right\| = ||y_0 - x_0||^{-1} ||y_0 - z|| > \\ & (d + d\varepsilon)^{-1} ||y_0 - z|| \ge d(d + d\varepsilon)^{-1} = \\ & 1 - \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon} > 1 - \varepsilon. \end{aligned}$$

■

Lemos pavadinimas kilęs iš tokio pastebėjimo. Jei erdvėje $\mathbb{R}^2$ paimsime bet kurią tiesę, einančią per koordinačių pradžią, tai visuomet vienetiniame apskritime $\{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 = 1\}$ galėsime nurodyti du taškus (juos gautumėme išvedę per koordinačių pradžią tiesę, statmeną nagrinėjamai tiesei), kurie bus nutolę nuo plokštumos lygiai per 1 (žr. 9 brėžinį).

Iliustruodami Ryso lemos apie beveik statmenį pritaikymą, įrodysime šią teoremą.



9 brėžinys: lemos apie beveik statmenį iliustracija

7.3 teorema. *Tiesinės normuotosios erdvės kiekviena aprėžta aibė yra reliatyviai kompaktiška tada ir tik tada, kai erdvė yra baigtiniamatė.*

Įrodymas. *Būtinumas.* Tarkime, kad kiekviena aprėžta ir uždara erdvės $\mathbb{E}$ aibė yra kompaktiška. Laisvai parinkime erdvės elementą x_1, kuriam $||x_1|| = 1$, ir tegu L_1 – tiesinis poerdvis, kurį generuoja x_1, t.y., $L_1 = \{z = tx_1,\ t \in \mathbb{K}\}$. Nesunku matyti, kad aibė L yra ir uždara. Jei $\mathbb{E} = L_1$, tai būtinumas įrodytas. Jei L_1 nesutampa su $\mathbb{E}$, tai, pasinaudoję 7.1 lema, rasime tokį elementą x_2, kad $||x_2|| = 1$ ir $||x_2 - x_1|| > 1/2$. Tiesinį poerdvį, kurį generuoja x_1 ir x_2 pažymėkime L_2. Aibė L_2 yra taip pat ir uždara. Jei $\mathbb{E} = L_2$, tai būtinumas įrodytas. Jei L_2 nesutampa su $\mathbb{E}$, tai vėl, pasinaudoję ta pačia Ryso lema, rasime tokį x_3, kad $||x_3|| = 1,\ ||x_3 - x_1|| > 1/2,\ ||x_3 - x_2|| > 1/2$. Tęsdami tą procesą, turėsime dvi galimybes: arba po n-tojo žingsnio tiesinis poerdvis L_n sutampa su $\mathbb{E}$ ir būtinumas įrodytas, arba galėsime sukonstruoti tokią begalinę seką $\{x_n\}$, kad $||x_n|| = 1$, ir $||x_n - x_m|| > 1/2$ su visais $n \neq m$. Kaip aibė, seka (x_n) yra aprėžta (nes $(x_k) \subset B_1(0)$). Kita vertus, aibė (x_n) nėra reliatyviai kompaktiška, nes $||x_n - x_m|| > 1/2$ su visais $n \neq m \geq 1$, o tai prieštarauja teoremos prielaidai. Būtinumas įrodytas.

Pakankamumas. Tegu $\mathbb{E}$ – n-matė normuotoji erdvė. Iš 7.2 teoremos žinome, kad $\mathbb{E}$ izomorfiška erdvei $\mathbb{K}^n$. Tegu $I : \mathbb{E} \to \mathbb{K}^n$ – atitinkamas izomorfizmas. Jei $A \subset \mathbb{E}$ aprėžta aibė, tai aprėžta ir aibė $I(A) \subset \mathbb{K}^n$. Kadangi $I(A)$ kompaktiška erdvės $\mathbb{K}^n$ aibė, o atvaizdis $I^{-1} : \mathbb{K}^n \to \mathbb{E}$ tolydus, tai $A = I^{-1}(I(A))$ – kompaktiška erdvės $\mathbb{E}$ aibė (žr. **??** teoremą). Teorema įrodyta. ∎

7.1.4 Banacho erdvės

Šiame skyrelyje $\mathbb{E}$ – tiesinė normuotoji erdvė, $||x||$ – elemento $x \in \mathbb{E}$ norma.

7.6 apibrėžimas. *Erdvės $\mathbb{E}$ elementų seka (x_n) vadinama Koši seka, jei kiekvieną $\varepsilon > 0$ atitinka toks $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$, kad*

$$||x_n - x_m|| < \varepsilon \quad \text{su visais} \quad n, m \geq N_\varepsilon.$$

7.7 apibrėžimas. *Normuotoji erdvė $\mathbb{E}$ vadinama pilnaja, jei kiekviena erdvės $\mathbb{E}$ Koši seka konverguoja. Pilnoji tiesinė normuota erdvė vadinama Banacho erdve.*

Apie 1922 metus nepriklausomai vienas nuo kito pilnosios normuotosios erdvės sąvoką apibrėžė S. Banachas ir N. Vyneris.

Akivaizdu, kad normuotoji erdvė $\mathbb{E}$ yra pilna tada ir tik tada, kai $\mathbb{E}$ kaip metrinė erdvė yra pilna. Taigi teisingas šis teiginys.

7.1 teiginys. *Tiesinės normuotosios erdvės ℓ_p, $1 \leq p \leq \infty$, c_0, $\mathcal{C}[a,b]$, $L_p(a,b)$, $1 \leq p \leq \infty$, $L_p(\Omega, \mathcal{F}, P)$, $1 \leq p \leq \infty$ yra Banacho.*

Kaip ir metrines, tiesines normuotas erdves galime papildyti iki Banacho erdvių. Tai yra, kiekvienai tiesinei normuotai erdvei $\mathbb{E}$ egzistuoja tokia Banacho erdvė $\mathbb{F}$ ir toks visur tirštas ($[\mathbb{F}_0] = \mathbb{F}$) jos tiesinis poaibis $\mathbb{F}_0$, kuris su indukuota norma (erdvės $\mathbb{F}$ normos siaurinys aibėje $\mathbb{F}_0$) yra izometriškai izomorfiškas erdvei $\mathbb{E}$. Šį teiginį įrodysime vėliau.