6 paskaita

6.1 Tiesinės erdvės

Šiuolaikinė abstrakčiosios tiesinės erdvės samprata formavosi gana ilgai. Vektoriaus sąvoką galime aptikti jau B. P. J. N. Bolcano 1804 metų darbuose. Taškus, tieses ir plokštumas jis nagrinėjo kaip abstrakčius objektus ir apibrėžė operacijas su jais. Tai buvo labai svarbus žingsnis tiek aksiomatizuojant geometriją, tiek formuojant abstrakčios tiesinės erdvės sampratą. Tačiau ryškiausią postūmį kuriant abstrakčią tiesinių erdvių teoriją suteikė Džiuzepė PeanoSavo 1888 metais pasirodžiusioje knygoje, skirtoje geometriniams skaičiavimams, jis suformulavo aksiomas, kurių pagalba apibrėžė tiesines sistemas, įvedė tiesinio priklausomumo sąvoką ir apibrėžė erdvės dimensiją. Įdomu tai, kad G. Peano apibrėžė ir pagrindinius modernios aibių teorijos žymenis $\cup$, $\cap$, $\in$, kurie buvo nugramzdinti užmarštin daugeliui metų, bet kuriais dabar sėkmingai naudojamės.

Dirbdamas su baigtinės dimensijos erdvėmis, D. Peano apibrėžė tiesinius operatorius veikiančius tose erdvėse, parodė, kaip koordinačių sistemos pagalba gaunamos matricos, apibrėžė tiesinių operatorių sumą ir sandaugą. Apie 1904 metus O. L. Hilbertas su savo mokiniais nagrinėjo begalinės dimensijos funkcijų erdves, tačiau D. Peano abstrakcijos lygio nepasiekė. Šiuolaikinę tiesinės erdvės aksiomų sistemą išvystė S. Banachas.

Šiame skyriuje aksiomų pagalba apibrėšime tiesines erdves, įvesime dimensijos sąvoką. Tradiciškai baigtinės dimensijos tiesinės erdvės priskiriamos tiesinei algebrai, funkcinei analizei paliekant begalinės dimensijos erdves. Nepaisant to, siekdami kuo aiškiau pateikti abstrakčias sąvokas, kai kuriems pavyzdžiams pasitelksime baigtinės dimensijos erdves.

Trečiajame skyrelyje aprašysime tiesinių erdvių aibes ir funkcijas, kurių apibrėžimui pakanka vien tiesinės erdvės struktūros. Be to, įrodysime labai svarbią Hano–Banacho teoremą apie tiesinio funkcionalo tęsinį. Taip pat aptarsime veiksmus su tiesinėmis erdvėmis ir aprašysime sąryšius tarp realiųjų ir kompleksinių tiesinių erdvių.

6.1.1 Tiesinės erdvės apibrėžimas, pavyzdžiai

Tegu $\mathbb{K}$ – skaliarų kūnas. Tiesinė erdvė apibrėžiama aksiomų pagalba.

6.1 apibrėžimas. *Aibė $\mathbb{E}$ vadinama tiesine arba vektorine erdve virš skaliarų kūno $\mathbb{K}$, jei bet kuriems dviems elementams $x, y \in \mathbb{E}$ taip apibrėžta jų suma $x + y \in \mathbb{E}$ ir bet kuriems $x \in \mathbb{E}$ ir $\alpha \in \mathbb{K}$ taip apibrėžta sandauga $\alpha \cdot x \in \mathbb{E}$, kad teisingos šios aksiomos:*

(T1) su visais $x, y \in \mathbb{E}$, $x + y = y + x$ (sumos komutatyvumo);

(T2) su visais $x, y, z \in \mathbb{E}$, $x + (y + z) = (x + z) + y$ (sumos asociatyvumo);

(T3) egzistuoja nulinis elementas, t.y. toks elementas $0 \in \mathbb{E}$, kad $x + 0 = x$ su kiekvienu $x \in \mathbb{E}$;

(T4) kiekvieną $x \in \mathbb{E}$ atitinka priešingasis elementas, t.y. toks elementas $-x \in \mathbb{E}$, kad $x + (-x) = 0$;

(T5) su visais $x \in \mathbb{E}$ ir $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $(\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$;

(T6) su visais $x, y \in \mathbb{E}$ ir $\alpha \in \mathbb{K}$, $\alpha(x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$;

(T7) su visais $x \in \mathbb{E}$ ir $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $\alpha(\beta \cdot x) = (\alpha\beta) \cdot x$ (sandaugos asociatyvumo);

(T8) su kiekvienu $x \in \mathbb{E}$, $1 \cdot x = x$; čia 1 yra kūno $\mathbb{K}$ vienetinis elementas.

(T5) ir (T6) aksiomos vadinamos sandaugos distributyvumu sumos atžvilgiu.

Priminsime, kad aibė, kurios elementams taip apibrėžta sumos operacija, kad teisingos (T1)- (T4) aksiomos, vadinama *adicine abelio grupe*.

Visada reikia turėti omeny, kad tiesinės erdvės operacijos $\{+, \cdot\}$ skiriasi nuo skaliarų kūno operacijų $\{+, \cdot\}$ nors ir naudojami tie patys ženklai. Sandaugos operacijos ženklą $\cdot$ dažniausiai praleisime ir vietoj $\alpha \cdot x$ rašysime tiesiog αx.

Šioje knygoje naudosime tik du skaliarų kūnus – realiųjų skaičių $\mathbb{R}$ ir kompleksinių skaičių $\mathbb{C}$. Tiesinę erdvę virš realiųjų skaičių kūno $\mathbb{R}$ vadinsime *realiąja tiesine erdve*, o virš kompleksinių skaičių kūno $\mathbb{C}$ – *kompleksine*.

Išvardinsime keletą svarbių išvadų, kurias galime padaryti remdamiesi (T1) – (T8) aksiomomis.

1) *Nulinis elementas yra vienintelis.*

Tikrai, jei 0_1 ir 0_2 būtų du erdvės $\mathbb{E}$ nuliniai elementai, tai, pritaikę (T1) ir (T3) aksiomas, turėtume

$$0_1 = 0_1 + 0_2 = 0_2 + 0_1 = 0_2.$$

2) *Kiekvienam elementui egzistuoja vienintelis priešingasis elementas.*

Jei tarsime, kad x' ir x'' yra du priešingieji elementui x, tai, panaudoję (T1), (T2), (T3) ir (T4) aksiomas, turėtume

$$x' = x' + 0 = x' + (x + x'') = (x' + x) + x'' = (x + x') + x'' =$$
$$0 + x'' = x'' + 0 = x''.$$

3) *Jei $x + y = x$, tai $y = 0$.*

Tikrai, remdamiesi nulinio ir priešingojo elementų apibrėžimais ir komutatyvumo bei asociatyvumo aksiomomis, išvedame

$$y = y + 0 = y + (x + (-x)) = (y + x) + (-x) =$$
$$(x + y) + (-x) = x + (-x) = 0.$$

4) $0x = 0$ *su kiekvienu* x.

Tai išplaukia iš ką tik įrodytos (3) savybės ir (T5), (T8) aksiomų:

$$x + 0x = 1x + 0x = (1 + 0)x = 1x = x.$$

5) *Elemento x priešingasis elementas $-x$ tenkina sąryšį $-x = (-1)x$.*

Tikrai, $(-1)x$ yra priešingasis elementui x, nes

$$x + (-1)x = 1x + (-1)x = (1 - 1)x = 0x = 0.$$

Lieka pasiremti (2) savybe – priešingojo elemento vienatimi.

6) $-(\alpha x) = (-\alpha)x = \alpha(-x)$.

Pagal (5) savybę ir (T7) aksiomą,

$$-(\alpha x) = (-1)(\alpha x) = \alpha((-1)x)x = \alpha(-x).$$

7) *Bet kuriuos $x, y \in \mathbb{E}$ atitinka toks elementas $z \in \mathbb{E}$, kad $z + y = x$. Tas elementas vadinamas x ir y skirtumu ir žymimas $x - y$.*

Pakanka apibrėžti $z = x + (-1)y$. Tikrai,

$$z + y = (x + (-1)y) + y = x + (y + (-1)y) = x + 0 = x.$$

8) $x = y$ *ekvivalentu* $x - y = 0$.

Jei $x = y$ tai $x - y = x + (-y) = y + (-y) = 0$. Jei $x - y = 0$, tai $y = y + (x - y) = [y + (-y)] + x = x + 0 = x$.

9) $\alpha(x - y) = \alpha x - \alpha y$; $(\alpha - \beta)x = \alpha x - \beta x$.

Pritaikę distributyvumo aksiomą ir jau įrodytas savybes, turime

$$\alpha(x - y) = \alpha[x + (-y)] = \alpha x + \alpha(-y) = \alpha x + (-\alpha y) = \alpha x - \alpha y.$$

Antroji savybė patikrinama analogiškai.

10) $\alpha 0 = 0$.

Išvedame pasinaudoję (T7) aksioma ir (4) savybe:

$$\alpha 0 = \alpha(0x) = (\alpha 0)x = 0x = 0.$$

11) *Jei* $\alpha x = 0$ *ir* $\alpha \neq 0$ *tai* $x = 0$.

Tikrai,

$$x = 1x = \Big(\frac{1}{\alpha}\alpha\Big)x = \frac{1}{\alpha}(\alpha x) = \frac{1}{\alpha}0 = 0.$$

12) *Jei* $\alpha x = \alpha y$ *ir* $\alpha \neq 0$ *tai* $x = y$.

Tai yra (11) ir (7) savybių išvada.

13) *Jei* $\alpha x = 0$ *ir* $x \neq 0$ *tai* $\alpha = 0$.

Jei $\alpha \neq 0$, tai pagal (11) savybę išeitų, kad $x = 0$.

14) *Jei* $\alpha x = \beta x$ *ir* $x \neq 0$ *tai* $\alpha = \beta$.

Akivaizdu.

Sumos asociatyvumas leidžia bet kurio baigtinio skaičiaus narių sumą užrašyti nekreipiant dėmesio į sumavimo tvarką. Pavyzdžiui, vietoj $x+(y+(z+v))$ galime rašyti $x+y+z+v$. Todėl sumuodami tiesinės erdvės $\mathbb{E}$ elementus galime naudotis analizėje įprastais sumavimo simboliais. Pavyzdžiui,

$$\sum_{k=1}^{n} x_k = x_1 + \cdots + x_n.$$

6.1 pavyzdys. Skaliarų kūnas $\mathbb{K}$ yra tiesinė erdvė virš skaliarų kūno $\mathbb{K}$, kai tiesinės operacijos $\{+, \cdot\}$ sutampa su skaliarų kūno operacijomis $\{+, \cdot\}$. Taip realiųjų skaičių aibė $\mathbb{R}$ yra realioji, o kompleksinių skaičių aibė $\mathbb{C}$ – kompleksinė tiesinės erdvės.

Jei nepasakyta kitaip, $\mathbb{R}$ ir $\mathbb{C}$, kaip tiesinės erdvės nagrinėjamos būtent su natūraliosiomis sumos ir sandaugos operacijomis. Bet tiek realiųjų skaičių aibėje, tiek kompleksinių skaičių aibėje sumos ir sandaugos iš skaliaro operacijas galime apibrėžti ir kitaip. Pavyzdžiui, nagrinėkime realiųjų skaičių aibę $\mathbb{R}$ ir kokią nors bijekciją $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bei jos atvirkštinę funkciją $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

(pvz. $f(x) = x^3$ ir $g(x) = x^{1/3}$). Dabar tegu $x = \alpha \cdot y + \beta \cdot z$ reiškia, kad $x = g(\alpha f(y) + \beta f(z))$. Nesunku patikrinti, kad taip apibrėždami sumos ir sandaugos iš skaliaro operacijas gauname realią tiesinę erdvę, kuri skiriasi nuo $\mathbb{R}$ su natūraliosiomis operacijomis.

6.2 pavyzdys. Plokštumos vektorių aibė sudaro realiąją tiesinę erdvę. Dviejų vektorių suma apibrėžiama naudojant lygiagretainio taisyklę. Vektoriaus x ir skaičiaus λ sandauga λx yra vektorius, kurio ilgis lygus skaičiaus $|\lambda|$ ir vektoriaus x ilgio sandaugai, o kryptis sutampa su x kryptimi, kai $\lambda > 0$, ir yra priešinga x krypčiai, kai $\lambda < 0$.

6.3 pavyzdys. Tarkime, $\mathcal{P}_k$ – polinomų su realiaisiais koeficientais, o $\overline{\mathcal{P}}_k$ – polinomų su kompleksiniais koeficientais, kurių laipsnis neviršija k, aibės. Du polinomus sudėsime sudėdami atitinkamus koeficientus. Polinomą dauginsime iš skaliaro daugindami iš jo kiekvieną to polinomo keficientą. Nesunku įsitikinti, kad $\mathcal{P}_k$ – realioji, o $\overline{\mathcal{P}}_k$– kompleksinė tiesinės erdvės.

6.4 pavyzdys. Aibės $\mathbb{R}^n$ elementams apibrėžkime

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} &= (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n), \\ \lambda \boldsymbol{x} &= (\lambda x_1, \dots \lambda x_n), \end{aligned}$$

kai $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_n)$, $\boldsymbol{y} = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Akivaizdu, kad šitaip apibrėžtų sudėties ir daugybos iš skaliaro operacijų atžvilgiu $\mathbb{R}^n$ yra realioji tiesinė erdvė. Jos elementai vadinami *n-mačiais vektoriais*. Jeigu $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_n)$, tai skaičiai x_k, $k = 1, \dots, n$, vadinami vektoriaus $\boldsymbol{x}$ koordinatėmis. Analogiškai apibrėžiama tiesinė erdvė $\mathbb{C}^n$.

6.5 pavyzdys. Jeigu D ir T – bet kurios aibės, tai visų funkcijų $f : T \to D$ aibę žymėsime D^T. Jei D – tiesinė erdvė virš kūno $\mathbb{K}$, tai dviejų funkcijų $f, g \in D^T$ sumą $f + g$ apibrėžkime formule

$$(f + g)(t) = f(t) + g(t), \quad t \in T,$$

o skaliaro $\lambda \in \mathbb{K}$ ir funkcijos $f \in D^T$ sandaugą λf – formule

$$(\lambda f)(t) = \lambda f(t), \quad t \in T.$$

Šitaip apibrėžtas operacijas vadinsime *natūraliosiomis* funkcijų sumos ir sandaugos iš skaliaro operacijomis. Nesunku įsitikinti, kad jų atžvilgiu D^T

– tiesinė erdvė virš skaliarų kūno $\mathbb{K}$. Jos nulinis elementas yra funkcija $0 : T \to D$, įgyjanti vienintelę reikšmę – erdvės D nulinį elementą: $0(t) = 0$ su kiekvienu $t \in T$. Atskiru atveju $\mathbb{R}^T$ – realioji, o $\mathbb{C}^T$ – kompleksinė tiesinės erdvės. Akivaizdu, kad $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ – anksčiau apibrėžtoji visų skaitinių sekų erdvė, kurios elementus susitarėme žymėti $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \ldots$. Natūraliosios sekų sumos ir sandaugos iš skaliaro operacijos atliekamos pakoordinačiui: jei $\boldsymbol{x} = (x_k, k \in \mathbb{N}), \boldsymbol{y} = (y_k, k \in \mathbb{N})$ ir $\lambda \in \mathbb{R}$, tai

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = (x_k + y_k, k \in \mathbb{N}), \quad \lambda \boldsymbol{x} = (\lambda x_k, k \in \mathbb{N}).$$

Toliau, jei nepasakyta kitaip, funkcijų bei sekų aibėse nagrinėsime tik natūraliasias sumos ir sandaugos iš skaliaro operacijas.

Skaitytojui rekomenduojame visuose pateiktuose pavyzdžiuose įsitikinti, kad įvestos sudėties ir daugybos iš skaliaro operacijos tenkina 6.1 apibrėžime suformuluotus reikalavimus.

6.2 apibrėžimas. *Tarkime,* $\mathbb{E}$ *– tiesinė erdvė. Aibė* $\mathbb{F} \subset \mathbb{E}$ *vadinama erdvės* $\mathbb{E}$ *poerdviu(kartais daugdara), jei* $\alpha x + \beta y \in \mathbb{F}$ *su visais* $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ *ir visais* $x, y \in \mathbb{F}$.

Jei poerdvis $\mathbb{F}$ *nesutampa nei su visa erdve* $\mathbb{E}$, *nei su aibe* $\{0\}$, *jis vadinamas tikriniu.*

6.3 apibrėžimas. *Jei* $\mathbb{F}$ *yra tikrinis tiesinės erdvės* $\mathbb{E}$ *poerdvis ir* $x \in \mathbb{E} \backslash \mathbb{F}$, *tai aibė* $x + \mathbb{F} = \{x + y : y \in \mathbb{F}\}$ *vadinama erdvės* $\mathbb{E}$ *afininiu poerdviu.*

Šio teiginio įrodymas elementarus ir paliekamas skaitytojui vietoj pratimo.

6.1 teiginys. *Poaibis* $\mathbb{F} \subset \mathbb{E}$ *yra tiesinės erdvės* $\mathbb{E}$ *poerdvis tada ir tik tada, kai* $\mathbb{F}$ *– tiesinė erdvė tų pačių, kaip ir* $\mathbb{E}$, *sudėties ir daugybos iš skaliaro operacijų atžvilgiu.*

Šiuo ekvivalentumu patogu pasinaudoti tikrinant ar duota erdvė yra tiesinė. Pavyzdžiui, norėdami įsitikinti, kad kuri nors realiųjų funkcijų $f : T \to \mathbb{R}$ aibė $\mathbb{F}$ yra tiesinė natūraliųjų sumos ir sandaugos iš realiojo skaičiaus operacijų atžvilgiu, turime patikrinti, kad $f + g \in \mathbb{F}$ ir $\lambda f \in \mathbb{F}$, kai $f, g \in \mathbb{F}$, o $\lambda \in \mathbb{R}$. Tikrai, šios dvi savybės reikštų, kad $\mathbb{F}$ yra tiesinės erdvės $\mathbb{R}^T$ poerdvis, taigi yra tiesinė erdvė natūraliųjų funkcijų sumos ir daugybos iš skaliaro operacijų atžvilgiu.

6.6 pavyzdys. Tolydžiųjų funkcijų, apibrėžtų intervale $[a, b]$, aibė $\mathcal{C}[a, b]$ yra realioji tiesinė erdvė. Kadangi $\mathcal{C}[a, b] \subset \mathbb{R}^{[a,b]}$, pakanka įsitikinti, kad $f + g \in \mathcal{C}[a, b]$ ir $\lambda f \in \mathcal{C}[a, b]$, kai $\lambda \in \mathbb{R}$ ir $f, g \in \mathcal{C}[a, b]$. Bet tai gerai žinomi analizės faktai: dviejų tolydžiųjų funkcijų suma – tolydžioji funkcija; tolydžiosios funkcijos ir skaičiaus sandauga – tolydžioji funkcija.

6.7 pavyzdys. $\mathcal{C}^k[a, b]$ yra realioji tiesinė erdvė.

Akivaizdu, kad $\mathcal{C}^k[a, b] \subset \mathcal{C}[a, b]$. Be to, jei $f, g \in \mathcal{C}^k[a, b], \lambda \in \mathbb{R}$, tai $f + g \in \mathcal{C}^k[a, b]$ ir $\lambda f \in \mathcal{C}^k[a, b]$, t.y. $\mathcal{C}^k[a, b]$ – tiesinės erdvės $\mathcal{C}[a, b]$ poerdvis.

6.8 pavyzdys. Visos anksčiau apibrėžtos sekų aibės, $\ell_p, 0 < p \leq \infty$, $c_0, \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ yra tiesinės erdvės natūraliųjų operacijų atžvilgiu.

6.9 pavyzdys. Aibę $\mathcal{L}_0(a, b)$ sudaro visos mačiosios funkcijos $f : (a, b) \to \mathbb{R}$. Gerai žinoma, kad mačiųjų funkcijų suma yra mati funkcija. Be to, padauginę mačiąją funkciją iš skaičiaus vėl gauname mačią funkciją. Taigi $\mathcal{L}_0(a, b)$ – tiesinė erdvė, kaip tiesinės erdvės $\mathbb{R}^{(a,b)}$ poerdvis.

6.10 pavyzdys. *Erdvės* $\mathcal{L}_p(a, b), 0 < p \leq \infty$.

Priminsime, kad aibę $\mathcal{L}_p(a, b)$, kai $0 < p < \infty$, sudaro tokios mačiosios funkcijos $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, kurioms yra baigtinis Lebego integralas $\int_a^b |f(t)|^p dt$. Norėdami įsitikinti, kad $\mathcal{L}_p(a, b)$ yra tiesinė erdvė, pakanka patikrinti, kad ji yra tiesinės erdvės $\mathcal{L}_0(a, b)$ poerdvis. Tegu $f, g \in \mathcal{L}_p(a, b)$ ir $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Pasinaudoję elementaria nelygybe $|a+b|^p \leq c_p(|a|^p + |b|^p)$, čia $c_p = max\{1, 2^{p-1}\}$, išvedame

$$\int_a^b |\alpha f(t) + \beta g(t)|^p dt \leq c_p \int_a^b \left[|\alpha|^p |f(t)|^p + |\beta|^p |g(t)|^p\right] dt =$$
$$c_p \Big[|\alpha|^p \int_a^b |f(t)|^p + |\beta|^p \int_a^b |g(t)|^p dt\Big].$$

Taigi $\alpha f + \beta g \in \mathcal{L}_p(a, b)$.

Aibę $\mathcal{L}_\infty(a, b)$ sudaro beveik visur aprėžtos mačiosios funkcijos $f : (a, b) \to \mathbb{R}$. Tarkime, $f, g \in \mathcal{L}_\infty(a, b)$. Tuomet egzistuoja tokios konstantos $c_f, c_g \in \mathbb{R}$, kad

$$m\{t \in (a, b) : |f(t)| > c_f\} = 0 \;\text{ ir }\; m\{t \in (a, b) : |g(t)| > c_g\} = 0.$$

Tuomet su bet kuriais $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

$$m\{t \in (a,b) : |\alpha f(t) + \beta g(t)| > |\alpha| c_f + |\beta| c_g\} = 0.$$

Taigi $\alpha f + \beta g \in \mathcal{L}_\infty(a,b)$.

6.11 pavyzdys. Norėdami įsitikinti, jog $\mathcal{D}[a,b]$ yra realioji tiesinė erdvė, turime patikrinti, kad $f + g \in \mathcal{D}[a,b]$ ir $\lambda f \in \mathcal{D}[a,b]$, jei f ir $g \in \mathcal{D}[a,b]$, o $\lambda \in \mathbb{R}$. Paliekame tai padaryti skaitytojui vietoj pratimo.

6.1.2 Hamelio bazė

6.4 apibrėžimas. *Tarkime, $\mathbb{E}$ – tiesinė erdvė virš skaliarų kūno $\mathbb{K}$.*

- *Elementai $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{E}$ vadinami tiesiškai priklausomais, jei egzistuoja tokie skaliarai $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$, kad*

$$\sum_{k=1}^{n} |\alpha_k| \neq 0, \quad \textit{bet} \quad \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k = 0.$$

- *Jei lygybė $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k = 0$ galima tik tuo atveju, kai $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$, tai elementai $x_1, \ldots, x_n$ vadinami tiesiškai nepriklausomais.*

- *Aibė $A \subset \mathbb{E}$ vadinama tiesiškai nepriklausoma, jei bet kuris jos elementų baigtinis rinkinys yra tiesiškai nepriklausomas.*

6.5 apibrėžimas. *Aibės $A \subset \mathbb{E}$ generuotas poerdvis, kurį žymėsime* $\operatorname{tap}(A)$ *ir vadinsime aibės A tiesiniu apvalku, yra toks mažiausias tiesinės erdvės $\mathbb{E}$ poerdvis, kad $A \subset \operatorname{tap}(A)$.*

Aibės A elementų tiesine kombinacija vadiname bet kurią baigtinę sumą $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k$, kai $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$, $x_1, \ldots, x_n \in A$. Nesunku įsitikinti, kad aibės A tiesinį apvalką sudaro visos galimos tos aibės elementų tiesinės kombinacijos, tai yra

$$\operatorname{tap}(A) = \Big\{ \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k : x_1, \ldots, x_n \in A, \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}, n \in \mathbb{N} \Big\}.$$

Pavyzdžiui, vieno elemento, sakykime, $x_0 \in \mathbb{E}$ generuotas poerdvis yra

$$\mathrm{tap}(x_0) = \{\lambda x_0 : \quad \lambda \in \mathbb{K}\}.$$

Šį poerdvį galime interpretuoti tiese, einančią per nulinį elementą ir tašką x_0. Analogiškai, dviejų elemetų $x_0, x_1 \in \mathbb{E}$ generuotą poerdvį

$$\mathrm{tap}(x_0, x_1) = \{\alpha x_0 + \beta x_1 : \quad \alpha, \beta \in \mathbb{K}\}$$

galime interpretuoti plokštuma, einančia per nulinį elementą ir taškus x_0, x_1.

6.6 apibrėžimas. *Tarkime,* $\mathbb{E}$ *– tiesinė erdvė ir* $\mathbb{E} \neq \{0\}$*. Aibė* $H \subset \mathbb{E}$ *vadinama erdvės* $\mathbb{E}$ *Hamelio baze, jei*

1) *aibė* H *tiesiškai nepriklausoma;*

2) *aibė* H *generuoja visą erdvę* $\mathbb{E}$*:* $\mathrm{tap}(H) = \mathbb{E}$.

6.1 teorema. *Kiekvienoje tiesinėje erdvėje egzistuoja Hamelio bazė.*

Įrodymas. Tarkime, $\mathcal{P}$ yra tiesiškai nepriklausomų erdvės $\mathbb{E}$ poaibių klasė. Aibės $\mathcal{P}$ dalinį sutvarkymą apibrėžkime taip: elementams $M, N \in \mathcal{P}$ sąryšis $M \prec N$ teisingas tada ir tik tada, kai $M \subset N$. Klasė $\mathcal{P}$ tenkina Corno lemos sąlygas. Tikrai, jei $x_1 \neq 0$, tai $\{x_1\} \in \mathcal{P}$. Vadinasi, $\mathcal{P} \neq \emptyset$. Tarkime, $\mathcal{Q}$ – bet kuri tiesiškai sutvarkyta $\mathcal{P}$ dalis. Sudarykime $\mathbb{E}$ poaibį

$$F = \bigcup_{M \in \mathcal{Q}} M.$$

Pirmiausia turime įsitikinti, kad $F \in \mathcal{P}$. Tegu $x_1, \ldots, x_n \in F$. Pagal aibės F apibrėžimą, $x_i \in M_i \in \mathcal{Q}, \ \ i = 1, \ldots, n$. Kadangi aibė $\mathcal{Q}$ tiesiškai sutvarkyta, tai jos elementus $M_i, i = 1, \ldots, n$ galime išdėstyti didėjimo tvarka. Tarkime,

$$M_{i_1} \prec M_{i_2} \prec \cdots \prec M_{i_n}.$$

Pagal sutvarkymo apibrėžimą, tai reiškia, kad $M_i \subseteq M_{i_n}$ su visais $i = 1, \ldots, n$. Todėl $x_1, \ldots, x_n \in M_{i_n}$. Kadangi aibė M_{i_n} tiesiškai nepriklausoma, tai ir elementai $x_1, \ldots, x_n$ tiesiškai nepriklausomi. Vadinasi, tikrai $F \in \mathcal{P}$. Be to, pagal konstrukciją, $M \prec F$ su kiekvienu $M \in \mathcal{Q}$. Vadinasi F yra $\mathcal{Q}$ viršutinis rėžis. Taigi Corno lemos sąlygos išpildytos, todėl aibei

$\mathcal{P}$ egzistuoja maksimalus elementas. Jį pažymėkime H. Nesunku įsitikinti, kad $\text{tap}(H) = \mathbb{E}$. Tikrai, jei egzistuotų toks $x \in \mathbb{E}$, kad $x \notin \text{tap}(H)$, tai x ir H būtų tiesiškai nepriklausomi. Kadangi $H \prec \{x\} \cup H$, tai H nebūtų maksimalus elementas. ∎

6.2 teorema. *Šie teiginiai yra ekvivalentūs:*

1) *H yra erdvės $\mathbb{E}$ Hamelio bazė;*

2) *H yra maksimali tiesiškai nepriklausoma aibė, t.y., jei aibė $H_1 \subset \mathbb{E}$ tiesiškai nepriklausoma ir $H_1 \supset H$, tai $H_1 = H$;*

3) *kiekvieną $x \in \mathbb{E}$ vieninteliu būdu galime išreikšti*

$$x = c_1 y_1 + \cdots + c_n y_n; \quad y_1, \ldots, y_n \in H; \ \ c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{K}.$$

Įrodymas. 2) $\Rightarrow$ 3) Jei $x \in H$ tai $x = 1y_1$, $y_1 = x \in H$. Jei $x \notin H$ tai $H \cup \{x\}$ negali būti tiesiškai nepriklausoma aibė, nes H yra maksimali tiesiškai nepriklausoma aibė. Vadinasi, x turi būti tiesinė elementų iš H kombinacija. Jei $x = c_1 y_1 + \cdots + c_n y_n$ ir $x = d_1 y_1 + \cdots + d_n y_n$, tai $0 = x - x = (c_1 - d_1) y_1 + \cdots + (c_n - d_n) y_n$. Iš čia išplaukia, kad $c_1 = d_1, \ldots, c_n = d_n$.

3) $\Rightarrow$ 1) Jei paimsime bet kurį baigtinį rinkinį $y_1, \ldots, y_n \in H$ ir tarsime, jog $c_1 y_1 + \cdots c_n y_n = 0$, tai užrašę $0 = 0y_1 + \cdots 0y_n$, gausime, kad $c_1 = \cdots = c_n = 0$, nes iš (3) savybės, pritaikytos nuliniam erdvės elementui. Vadinasi, aibė H yra tiesiškai nepriklausoma ir $\text{tap}(H) = \mathbb{E}$..

1) $\Rightarrow$ 2) Tarkime, $H_1 \supset H$, H_1 tiesiškai nepriklausoma aibė. Tarkime, $x \notin H$. Iš 1) išplaukia, kad jei $x \in H_1$, tai $x = c_1 y_1 + \cdots c_n y_n$, $y_i \neq x, y_i \in H \subset H_1$. Vadinasi, H_1 nėra tiesiškai nepriklausoma aibė. Gauta prieštara įrodo, kad $H_1 = H$. ∎

6.7 apibrėžimas. *Tiesinė erdvė $\mathbb{E}$ vadinama baigtiniamate arba baigtinės dimensijos (atitinkamai begaliniamate arba begalinės dimensijos), jei joje egzistuoja tik baigtinis (atitinkamai begalinis) tiesiškai nepriklausomų elementų skaičius.*

Jei erdvėje egzistuoja tik baigtinis tiesiškai nepriklausomų elementų skaičius, tai tos erdvės Hamelio bazė taip pat yra baigtinė. Nors bet kuri tokia erdvė gali turėti ne vieną Hamelio bazę, visos jos turi tą patį elementų skaičių.

Tikrai, tarkime, H ir I – baigtinės tiesinės erdvės $\mathbb{E}$ Hamelio bazės. Sakykime, $H = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Jei aibėje I būtų $n+1$ elementas $y_1, \ldots, y_n, y_{n+1}$, tai turėtume

$$y_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k, \quad \text{su visais} \quad i = 1, \ldots, n.$$

Kadangi elementai $y_1, \ldots, y_n$ tiesiškai nepriklausomi, tai matricos (a_{ik}) rangas yra n. Bet

$$y_{n+1} = \sum_{k=1}^{n} a_{n+1,k} x_k,$$

ir vektorius $(a_{n+1,1}, \ldots, a_{n+1,n})$ yra matricos (a_{ij}) eilučių tiesinė kombinacija. Bet tuomet elementai $y_1, \ldots, y_n, y_{n+1}$ nėra tiesiškai nepriklausomi. Taigi I turi elementų $m \le n$. Tais pačiais samprotavimais įrodome, kad $n \le m$.

Baigtiniamatės tiesinės erdvės Hamelio bazės elementų skaičius vadinamas tos *erdvės dimensija* ir žymimas $\dim(\mathbb{E})$. Begaliniamatės erdvės dimensija yra begalinė (norėdami tai pažymėti, rašysime $\dim(\mathbb{E}) = \infty$.)

Akivaizdu, kad $\dim(\mathbb{R}^n) = n$, o $\dim(\mathbb{C}^n) = 2n$. Taip pat nesunku įsitikinti, kad $\dim(\mathcal{P}_k) = k + 1$.

6.2 teiginys. *Tiesinės erdvės $\mathbb{C}[a, b]$, $\ell_p, p > 0$, – begaliniamatės.*

Įrodymas. Erdvės $\mathcal{C}[a, b]$ elementų sistema $\{f_i, i \ge 0\}$, kai $f_i(t) = t^i, t \in [a, b]; i \ge 0$, yra tiesiškai nepriklausoma. Tikrai, tiesinė kombinacija

$$p_n = a_0 f_0 + a_1 f_1 + \cdots + a_n f_n$$

yra n-tos eilės polinomas. Jis tapatus nuliui netuščiame intervale tik jei visi jo koeficientai yra nuliai, t.y. $p_n(t) = 0$ su visais $t \in [a, b]$ tada ir tik tada, kai $a_0 = a_1 = \cdots = a_n = 0$.

Kiekvienos iš erdvių ℓ_p vienetinių sekų šeima $\{\boldsymbol{e}_k, k \in \mathbb{N}\}$ yra tiesiškai nepriklausoma. (Patikrinkite). ∎

6.1.3 Faktor-erdvės

Jei aibėje A apibrėžtas ekvivalentumo sąryšis $\sim$ (refleksyvus tranzytivus simetriškas binarinis sąryšis), tai jos elementus galime suskaidyti į ekvivalentumo klases. Klasei $[x]$ priskiriami visi elementai ekvivalentūs x, t.y.,

$y \in [x]$ tada ir tik tada, kai $x \sim y$. Nesunku įsitikinti, kad dvi ekvivalentumo klasės arba neturi bendrų elementų arba sutampa. Tikrai, jei $[x'], [x'']$ – dvi ekvivalentumo klasės ir $y \in [x'] \cap [x'']$, tai $y \sim y'$ ir $y \sim y''$ su visais $y' \in [x'], y'' \in [x'']$. Remdamiesi ekvivalentumo sąryšio simetriškumo ir tranzityvumo savybėmis gauname, kad $y' \sim y''$. Taigi $[x'] = [x'']$.

Tarkime, $\mathbb{E}$ yra tiesinė erdvė, $\mathbb{E}_0 \subset \mathbb{E}$ – poerdvis. Aibės $\mathbb{E}$ elementams apibrėžkime sąryšį $\sim$ taip:

$$x \sim y \ \text{ tada ir tik tada, kai } \ x - y \in \mathbb{E}_0.$$

Lengva įsitikinti, kad $\sim$ yra ekvivalentumo sąryšis. Tikrai, $x \sim x$, nes $x - x = 0 \in \mathbb{E}_0$; jei $x \sim y$ tai $y - x = -(x - y) \in \mathbb{E}_0$, taigi $y \sim x$; jei $x \sim y$, $y \sim z$ tai $x - y \in \mathbb{E}_0, y - z \in \mathbb{E}_0$ ir $x - z = (x - y) + (y - z) \in \mathbb{E}_0$, taigi $x \sim z$. Ekvivalentumo sąryšio $\sim$ pagalba gautų ekvivalentumo klasių aibę pažymėkime

$$\mathbb{E}/\mathbb{E}_0 = \{[x] : x \in \mathbb{E}\}.$$

Šioje aibėje apibrėšime sumos ir sandaugos iš skaliaro operacijas. Jei $[x], [y] \in \mathbb{E}/\mathbb{E}_0$, o $\alpha \in \mathbb{K}$, tai

$$[x] + [y] = [x + y], \quad \alpha[x] = [\alpha x].$$

Nesunku įsitikinti, kad su taip apibrėžtomis sumos ir sandaugos iš skaliaro operacijomis $\mathbb{E}/\mathbb{E}_0$ yra tiesinė erdvė. Ji vadinama erdvės $\mathbb{E}$ *faktor-erdve poerdvio* $\mathbb{E}_0$ *atžvilgiu.* Pastebėsime, kad tiesinės faktor-erdvės $\mathbb{E}/\mathbb{E}_0$ nulinis elementas yra aibė $\mathbb{E}_0$, nes $x \sim 0$ tada ir tik tada, kai $x - 0 = x \in \mathbb{E}_0$. Taigi $[0] = \mathbb{E}_0$.

6.12 pavyzdys. Nagrinėkime erdves $\mathcal{L}_p(a, b), 0 < p \leq \infty$. Tegu aibė $\mathcal{L}$ yra sudaryta iš beveik visur lygių nuliui mačių funkcijų $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, t.y. mati funkcija $f \in \mathcal{L}$ tada ir tik tada, kai $m\{t \in (a, b) : f(t) \neq 0\} = 0$. Akivaizdu, kad $\mathcal{L}$ yra kiekvienos erdvės $\mathcal{L}_p(a, b), 0 < p \leq \infty$ poerdvis. Su kiekvienu $0 < p \leq \infty$, faktor erdvė $\mathcal{L}_p(a, b)/\mathcal{L}$ ir yra ta Lebego erdvės $L_p(a, b)$ interpretacija, apie kurią kalbėjome **??** pastaboje.

Taigi Lebego erdvės $L_p(a, b), 0 < p \leq \infty$, yra tiesinės.

6.2 Tiesinių erdvių aibės ir funkcijos

Šiame skyrelyje susipažinsime su tomis tiesinių erdvių aibėmis ir tomis funkcijomis, kurių apibrėžimui pakanka tik elementų sumos ir sandaugos iš skaliaro operacijų.

6.2.1 Iškilosios aibės

Tarkime, $\mathbb{E}$ - tiesinė erdvė. Aibių $A \subset \mathbb{E}$ ir $B \subset \mathbb{E}$ Minkovskio suma yra aibė

$$A + B = \{x + y : x \in A, y \in B\},$$

o aibės $A \subset \mathbb{E}$ homotetija αA, kai $\alpha \in \mathbb{K}$, –

$$\alpha A = \{\alpha x : x \in A\}.$$

Vietoj $\{x\} + A$ rašysime $x + A$.

6.8 apibrėžimas. *Aibė $A \subset \mathbb{E}$ vadinama:*

- *subalansuota, jei $\alpha A \subset A$ su visais $|\alpha| \leq 1$;*
- *absorbuojančia, jei kiekvieną $x \in \mathbb{E}$ atitinka toks $\alpha > 0$, kad $x \in \beta A$ su kiekvienu $|\beta| \geq \alpha$;*
- *iškila, jei $\alpha A + (1 - \alpha)A \subset A$ su visais $\alpha \in [0, 1]$;*
- *absoliučiai iškila, jei ji yra iškila ir subalansuota.*

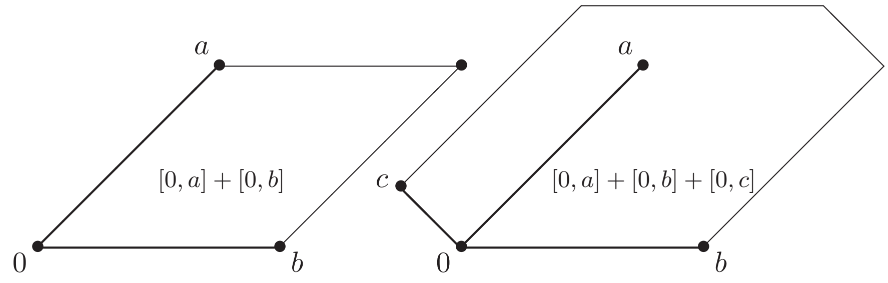
Bene pačios paprasčiausios tiesinės erdvės aibės yra atkarpos. Atkarpa, jungiančia taškus $x, y \in \mathbb{E}$, vadinama aibė

$$[x, y] := \{(1 - t)x + ty : t \in [0, 1]\}.$$

Akivaizdu, kad bet kuri atkarpa yra iškila aibė. Be to, aibė $A \subset \mathbb{E}$ yra iškila tada ir tik tada, kai jai priklauso atkarpa jungianti bet kuriuos du tos aibės taškus, t.y.

$$[x, y] \subset A \quad \text{su visais} \quad x, y \in A.$$

Atkarpa $[-a, a]$, kai $a \in \mathbb{E}$ yra subalansuota. Baigtinio skaičiaus tiesinės erdvės atkarpų, kurių pradžia yra nulyje, Minkovskio suma vadinama *zonotopu*. Pavyzdžiui, $Z = \sum_{i=1}^{d} [0, a_i]$, kai $a_1, \dots, a_d \in \mathbb{E}$, yra zonotopas (žr. 7 brėžinį). Bet kuris zonotopas yra iškila aibė, bet nebūtinai subalansuota ar absorbuojanti.



7 brėžinys: zonotopai

6.9 apibrėžimas. *Aibės $A \subset \mathbb{E}$ branduoliu $I(A)$ vadiname aibę tų taškų $x \in A$, kurie pasižymi savybe: kiekvieną $y \in \mathbb{E}$ atitinka toks skaičius $\varepsilon = \varepsilon(y) > 0$, kad $x + ty \in A$, su visais $|t| < \varepsilon$. Iškila aibė A, kurios branduolys netuščias ($I(A) \neq \emptyset$), vadinama iškilu kūnu.*

Skaitytojas gali nesunkiai įrodyti, kad iškilos aibės branduolys taip pat iškila aibė. Akivaizdu, kad ne visos iškilos aibės yra iškili kūnai. Paprasčiausias iškilos aibės su tuščiu branduoliu pavyzdys – bet kuri plokštumos atkarpa. Kiek sudėtingesnis – taip vadinama „Hilberto plyta“: aibė $\Pi \subset \ell_2$,

$$\Pi = \{\boldsymbol{x} \in \ell_2 : |x_i| \leq 2^{-i+1}, \quad i = 1, 2, \dots\}.$$

6.3 teiginys. *Aibė Π yra iškila, bet nėra iškilas kūnas.*

Įrodymas. Akivaizdu, kad Π iškila aibė. Įsitikinkime, kad $I(\Pi) = \emptyset$. Imkime $\boldsymbol{y}_0 = (1, 1/2, 1/3, \dots) \in \ell_2$. Tarkime, $\boldsymbol{x} \in \Pi$ ir $\boldsymbol{x} + t\boldsymbol{y}_0 \in \Pi$. Tai reiškia, kad $|x_n| \leq 2^{-n+1}$ ir $|x_n + tn^{-1}| \leq 2^{-n+1}$. Bet šiuo atveju, su kiekvienu $n \in \mathbb{N}$,

$$|t|/n = |x_n + (t/n) - x_n| \leq |x_n| + |x_n + (t/n)| \leq 2^{-n+2},$$

o taip gali būti tik tuo atveju, kai $t = 0$. ∎

Nesunku įsitikinti, kad aibė A yra absoliučiai iškila tada ir tik tada, kai $\lambda A + \mu A \subset A$ su visais tokiais $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, kad $|\lambda| + |\mu| \leq 1$. Tikrai, tarkime, A yra absoliučiai iškila, $x, y \in A$ ir $|\lambda| + |\mu| \leq 1$. Jei arba $\lambda = 0$, arba $\mu = 0$, tai $\lambda x + \mu y \in A$, nes aibė A subalansuota. Tarkime, $\lambda \neq 0$ ir $\mu \neq 0$. Tuomet

$$\frac{\lambda}{|\lambda|}x \in A, \ \frac{\mu}{|\mu|}y \in A \ \text{ ir } \ \frac{|\lambda|}{|\lambda| + |\mu|} + \frac{|\mu|}{|\lambda| + |\mu|} = 1.$$

Todėl

$$\lambda x + \mu y = (|\lambda| + |\mu|)\Big(\frac{|\lambda|}{|\lambda| + |\mu|}\frac{\lambda x}{|\lambda|} + \frac{|\mu|}{|\lambda| + |\mu|}\frac{\mu y}{|\mu|}\Big) \in A.$$

Atvirkščiai, jei $\lambda A + \mu A \subset A$ su visais tokiais $\lambda, \mu \in K$, kad $|\lambda| + |\mu| \leq 1$, tai akivaizdu, kad aibė A yra absoliučiai iškila.

Absorbuojanti aibė geometriškai reiškia, kad kiekviename prasidedančiame nulyje spindulyje (tiesinės erdvės spindulys, prasidedantis nulyje ir einantis per tašką x yra aibė $\{tx : t \geq 0\}$) atsiras aibei priklausantis intervalas, kurio vienas galas yra nulyje.

6.4 teiginys. *Teisingos šios aibių savybės.*

- *Absoliučiai iškila aibė A yra absorbuojanti tada ir tik tada, kai*

$$\mathbb{E} = \bigcup_{n=1}^{\infty} nA.$$

- *Jei aibės $A_1, A_2 \subset \mathbb{E}$ iškilos ir $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, tai ir aibė $\lambda A_1 + \mu A_2$ iškila.*
- *Bet kurio skaičiaus iškilų aibių sankirta yra iškila aibė.*

Įrodymą paliekame skaitytojui vietoje pratimo.

6.2.2 Tiesinės funkcijos

6.10 apibrėžimas. *Tarkime, $\mathbb{E}, \mathbb{F}$ – tiesinės erdvės virš skaliarų kūno $\mathbb{K}$. Atvaizdis $T : \mathbb{E} \to \mathbb{F}$ vadinamas*

- *adityviu, jei*

$$T(x + y) = Tx + Ty \ \text{ su visais } \ x, y \in \mathbb{E}.$$

- *homogenišku, jei*

$$T(\alpha x) = \alpha T(x) \ \ \textit{su visais} \ \ x \in \mathbb{E}, \alpha \in \mathbb{K}.$$

- *tiesiniu, jei jis yra adityvus ir homogeniškas.*

Tiesinius atvaizdžius priimta taip pat vadinti *tiesiniais operatoriais*, o tiesinius atvaizdžius su reikšmėmis skaliarų kūne – *tiesiniais funkcionalais*.

Kai $\mathbb{E}$ yra kompleksinė tiesinė erdvė, tai atvaizdis $f : \mathbb{E} \to \mathbb{C}$ vadinamas *jungtiniai homogenišku*, jei

$$f(\alpha x) = \overline{\alpha} f(x) \ \ \text{su visais} \ \ \alpha \in \mathbb{C} \ \ \text{ir} \ \ x \in \mathbb{E}.$$

Smulkiau tiesinius funkcionalus ir tiesinius operatorius nagrinėsime atitinkamai septintajame ir aštuntajame skyriuose.

6.11 apibrėžimas. *Tiesinės erdvės $\mathbb{E}$ ir $\mathbb{F}$ vadinamos izomorfinėmis, jei egzistuoja tiesinė bijekcija $J : \mathbb{E} \to \mathbb{F}$.*

Tiesinę bijekciją vadiname *izomorfiniu atvaizdžiu*, arba *izomorfizmu*. Paprastai izomorfinės tiesinės erdvės sutapatinamos, nes jų tiesinės struktūros vienodos, o skiriasi tik elementų prigimtis. Pavyzdžiui, erdvės $\mathbb{R}^{n+1}$ ir $\mathcal{P}_n$ izomorfinės, o formule

$$J(\boldsymbol{x}) = \sum_{k=0}^{n} a_k t^k, \quad \boldsymbol{x} = (a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1},$$

apibrėžtas atvaizdis $J : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathcal{P}_n$ yra atitinkamas izomorfizmas.

6.2.3 Iškilos funkcijos

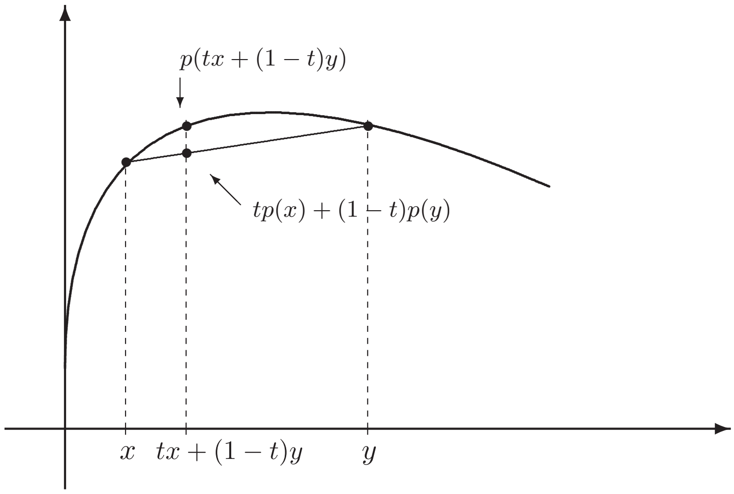
6.12 apibrėžimas. *Funkcija $p : \mathbb{E} \to \mathbb{R}$ vadinama iškila žemyn, jei su bet kuriais $x, y \in \mathbb{E}$ ir $t \in [0, 1]$, teisinga nelygybė*

$$p(tx + (1-t)y) \le tp(x) + (1-t)p(y).$$

Funkcija $p : \mathbb{E} \to \mathbb{R}$ vadinama iškila aukštyn, jei su bet kuriais $x, y \in \mathbb{E}$ ir $t \in [0, 1]$, teisinga nelygybė

$$p(tx + (1-t)y) \ge tp(x) + (1-t)p(y).$$

Iškila vadinama funkciją, kuri yra arba iškila aukštyn arba iškila žemyn.



8 brėžinys: iškila aukštyn funkcija

Iškilosios funkcijos pagalba galime konstruoti iškiląsias aibes. Tarkime, funkcija $p : \mathbb{E} \to \mathbb{R}$ iškila žemyn, $q : \mathbb{E} \to \mathbb{R}$ – iškila aukštyn, $x_0 \in \mathbb{R}$. Nesunku įsitikinti, kad aibės

$$Q_1 = \{x \in \mathbb{E} : p(x - x_0) \leq r\},$$
$$Q_2 = \{x \in \mathbb{E} : q(x - x_0) \geq r\}$$

yra iškilos. Tam tikra prasme egzistuoja ir atvirkščias sąryšis. Norėdami jį nustatyti, apibrėšime aibės Minkovskio funkcionalą.

6.13 apibrėžimas. *Absorbuojančios aibės $K \subset \mathbb{E}$ Minkovskio funkcionalas $p_K : \mathbb{E} \to \mathbb{R}$ apibrėžiamas lygybe*

$$p_K(x) = \inf\{\varepsilon > 0 : x \in \varepsilon K\}, \quad x \in \mathbb{E}.$$

6.13 pavyzdys. Nagrinėkime erdvės $\mathbb{R}^2$ aibę $K = \{x = (x_1, x_2) : |x_1|^p + |x_2|^p \leq 1\}$, kai $p > 0$. Akivaizdu, kad $x \in \varepsilon K$ tada ir tik tada, kai $\varepsilon \geq (|x_1|^p + |x_2|^p)^{1/p}$. Todėl

$$p_K(x) = (|x_1|^p + |x_2|^p)^{1/p}, \quad x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

6.14 apibrėžimas. *Subtiesiniu funkcionalu, apibrėžtu tiesinėje erdvėje* $\mathbb{E}$, *vadinamas toks atvaizdis* $p : \mathbb{E} \to \mathbb{R}$, *kuriam teisingos šios savybės:*

a) $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$, *kai* $x, y \in \mathbb{E}$;

b) $p(\alpha x) = \alpha p(x)$, *kai* $x \in \mathbb{E}$, *o* $\alpha \in \mathbb{R}$ *ir* $\alpha \geq 0$.

6.14 pavyzdys. Tegu $0 < \theta < 1$. Funkcija $p_\theta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $p_\theta(x) = \theta x \chi\{x \geq 0\} - (1 - \theta) x \chi\{x \leq 0\}$ yra subtiesinė. Tai patikrinti paliekame skaitytojui vietoj pratimo.

Jei funkcionalas $p : \mathbb{E} \to \mathbb{R}$ yra subtiesinis, tai abi aibės $K_1 = \{x \in \mathbb{E} : p(x) \leq 1\}$ ir $K_2 = \{x \in \mathbb{E} : p(x) < 1\}$ yra iškilos ir absorbuojančios, o jų Minkovskio funkcionalai yra lygūs ir sutampa su p. Įrodysime tam tikra prasme atvirkščią sąryšį tarp iškilų aibių ir Minkovskio funkcionalų.

6.5 teiginys. *Jei* $K \subset \mathbb{E}$ *– netuščia iškila ir absorbuojanti aibė, tai jos Minkovskio funkcionalas* p_K *pasižymi šiomis savybėmis:*

1) $\{x : p_K(x) < 1\} \subset K \subset \{x : p_K(x) \leq 1\}$;

2) funkcionalas p_K *yra subtiesinis.*

Įrodymas. Kadangi aibė K absorbuojanti, tai kiekvieną $x \in \mathbb{E}$ atitinka toks $\alpha > 0$, kad $x \in \beta K$, kai $|\beta| \geq \alpha$. Vadinasi, $p_K(x) < \infty$ su kiekvienu $x \in \mathbb{E}$. Akivaizdu, kad $p_K(0) = 0$.

Irodysime, kad $p_K(\alpha x) = \alpha p_K(x)$, jei $\alpha > 0$. Kadangi $\alpha x \in \beta K$ tada ir tik tada, kai $x \in (\beta/\alpha)K$, tai

$$\begin{aligned} &p_K(\alpha x) = \inf\{\mu > 0 : \alpha x \in \mu K\} = \\ &\alpha \inf\{(\mu/\alpha) : \mu > 0, x \in (\mu/\alpha)K\} = \alpha p_K(x). \end{aligned}$$

Toliau įrodysime, kad $p_K(x+y) \leq p_K(x)+p_K(y)$. Tarkime, $x, y \in \mathbb{E}$, $\varepsilon > 0$. Egzistuoja tokie $\alpha, \beta > 0$, kad $x/\alpha \in K$, $y/\beta \in K$ ir

$$p_K(x) < \alpha < p_K(x) + \varepsilon, \quad p_K(y) < \beta < p_K(y) + \varepsilon.$$

Kadangi aibė K iškila, tai

$$\frac{x + y}{\alpha + \beta} = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \cdot \frac{x}{\alpha} + \frac{\beta}{\alpha + \beta} \cdot \frac{y}{\beta} \in K.$$

Todėl

$$p_K(x+y) \leq \alpha + \beta < p_K(x) + p_K(y) + 2\varepsilon.$$

Lieka pasinaudoti laisvu $\varepsilon > 0$ pasirinkimu. ■