5 paskaita

5.1 Kompaktiškosios aibės

5.1.1 Sąvokos

Iš matematinės analizės kurso žinome dvi svarbias aprėžtų realiųjų skaičių aibių savybes. Pirmoji – Bolcano-Vejerštraso teorema: bet kuri begalinė aprėžta realiųjų skaičių aibė turi bent vieną sankaupos tašką. Antroji savybė – Borelio-Heinėslema apie dangas. Ją galime suformuluoti taip. Jei $A \subset \mathbb{R}$ aprėžta ir uždara aibė, o $\{G_\alpha, \alpha \in I\}$ – jos atviroji danga (tai reiškia, kad visos aibės G_α yra atviros ir $A \subset \cup_{\alpha \in I} G_\alpha$), tai iš jos galima išrinkti baigtinį podangį (egzistuoja tokie $G_{\alpha_1}, \ldots, G_{\alpha_n}$, kad $A \subset \cup_{k=1}^{n} G_{\alpha_k}$).

Nuo realiųjų skaičių aibės perėjus prie abstraktesnių metrinių erdvių tos savybės bendru atveju nebegalioja – aibės aprėžtumas ir uždarumas negarantuoja nei vienos iš jų. Štai paprastas pavyzdys. Imkime metrinės erdvės ℓ_2 aibę $(\boldsymbol{e}_n, n \in \mathbb{N})$, sudarytą iš vadinamųjų vienetinių sekų: $\boldsymbol{e}_n = (\delta_{ni}, i \in \mathbb{N})$,

$$\delta_{ni} = \begin{cases} 1, & \text{kai } \ i = n; \\ 0, & \text{kai } \ i \neq n. \end{cases}$$

Seka $(\boldsymbol{e}_n)$ yra aprėžta, bet

$$d(\boldsymbol{e}_n, \boldsymbol{e}_m) = \Big(\sum_{i=1}^{\infty} (\delta_{ni} - \delta_{mi})^2 \Big)^{1/2} = 1, \quad \text{kai} \quad n \neq m,$$

todėl neturi jokio sankaupos taško. Kita vertus, klausimas, kada iš aprėžtos kokios nors erdvės elementų sekos (tarkim, aprėžtos funkcijų sekos) galime išrinkti konverguojantį posekį, svarbus daugelyje matematikos disciplinų. Pavyzdžiui, diferencialinių lygčių teorijoje įrodinėjant sprendinių egzistavimą, tikimybių teorijoje ir matematinėje statistikoje tiriant skirstinių sekos konvergavimą. Apibendrinant Bolcano–Vejerštraso ir Heinės–Borelio savybes metrinėms erdvėms, gimė kompaktiškos aibės savoka.

5.1 apibrėžimas. *Tarkime, $(\mathbb{X}, d)$ - metrinė erdvė.*

- *Aibė $K \subset \mathbb{X}$ vadinama reliatyviai kompaktiška, jei iš kiekvienos tos aibės elementų sekos galima išrinkti (erdvėje $\mathbb{X}$) konverguojantį posekį.*
- *Jei aibė K yra reliatyviai kompaktiška ir uždara, tai ji vadinama kompaktiška arba kompaktu.*
- *Metrinė erdvė $(\mathbb{X}, d)$ vadinama kompaktiška, jei aibė $\mathbb{X}$ yra kompaktas.*

Bolcano-Vejerštraso teorema reiškia, kad bet kuri aprėžta realiųjų skaičių erdvės $\mathbb{R}$ aibė yra reliatyviai kompaktiška. Beje, aprėžtumas yra būtina sąlyga realiatyviam kompaktiškumui ir bendruoju atveju.

5.1 teiginys. *Reliatyviai kompaktiška aibė yra aprėžta.*

Įrodymas. Jei aibė $K \subset \mathbb{X}$ nėra aprėžta (jos diametras $\mathrm{diam}(K) = \infty$), tai kokius $x_0 \in \mathbb{X}$ ir $n \in \mathbb{N}$ bepaimtume, atsiras toks $x_n \in K$, kad $n + 1 \geq d(x_0, x_n) > n$. Seka $(x_n) \subset K$ neturi jokio konverguojančio posekio, nes su visais $m \in \mathbb{N}$,

$$d(x_{m+2}, x_m) \geq d(x_0, x_{m+2}) - d(x_0, x_m) > 1.$$

Taigi aibė K negali būti kompaktiška. ∎

5.2 teiginys. *Kompaktiška metrinė erdvė yra pilna.*

Įrodymas. Tarkime, $(\mathbb{X}, d)$ – kompaktiška metrinė erdvė ir (x_n) – jos Koši seka. Kadangi Koši seka yra aprėžta, pagal kompaktiškumo apibrėžimą, seka (x_n) turi konverguojantį posekį. Bet tada ir pati seka konverguoja (žr. **??** teiginį). ∎

Labai svarbus uždavinys – nustatyti, kokios metrinės erdvės aibės yra reliatyviai kompaktiškos.

5.1.2 Hausdorfo teorema

5.2 apibrėžimas. *Tarkime, $(\mathbb{X}, d)$ – metrinė erdvė, $M \subset \mathbb{X}$. Tarkime, $\varepsilon > 0$. Aibė $M_\varepsilon \subset \mathbb{X}$ vadinama aibės M ε-tinklu, jei kiekvieną $x \in M$ atitinka toks*

$x_\varepsilon \in M_\varepsilon$, kad

$$d(x, x_\varepsilon) < \varepsilon.$$

Sakysime, kad ε-tinklas yra baigtinis, jei jis sudarytas iš baigtinio skaičiaus elementų.

5.1 teorema. (Hausdorfo.) *Tarkime $\mathbb{X}$ – pilna metrinė erdvė. Aibė $M \subset \mathbb{X}$ reliatyviai kompaktiška tada ir tik tada, kai su kiekvienu $\varepsilon > 0$ aibė M turi baigtinį ε-tinklą.*

Įrodymas. *Būtinumas.* Tarkime, tvirtinimas klaidingas: M – reliatyviai kompaktiška aibė, tačiau egzistuoja toks $\varepsilon > 0$, kad aibė M baigtinio ε-tinklo neturi. Imkime bet kurį elementą $x_1 \in M$. Egzistuoja toks elementas $x_2 \in M$, kad $d(x_1, x_2) \geq \varepsilon$ (jei tokio elemento nebūtų, tai $M_\varepsilon = \{x_1\}$ būtų aibės M ε-tinklas). Kitu žingsniu rasime tokį $x_3 \in M$, kad $d(x_i, x_3) \geq \varepsilon$, kai $i = 1, 2$. Priešingu atveju aibė $M_\varepsilon = \{x_1, x_2\}$ būtų aibės M baigtinis ε-tinklas. Tęsdami šį procesą, gauname seką $(x_n) \subset M$, kuriai

$$d(x_k, x_j) \geq \varepsilon, \quad \text{kai} \quad k \neq j.$$

Akivaizdu, kad tokia seka neturi nė vieno konverguojančio posekio. Taigi aibė M negali būti reliatyviai kompaktiška. Gauta prieštara įrodo būtinumą.

Pakankamumas. Tarkime, kad su kiekvienu $\varepsilon > 0$ aibė M turi baigtinį ε-tinklą. Reikia parodyti, kad bet kuri seka $(x_n) \subset M$ turi sankaupos tašką (konverguojantį posekį). Imkime seką $\varepsilon_k = 2^{-k+1}$, $k = 1, 2, \ldots$ Su kiekvienu k randame aibės M baigtinį ε_k-tinklą, sakykime,

$$M_k = \{y_1^k, y_2^k, ..., y_{n_k}^k\}.$$

Akivaizdu, kad

$$M \subset \bigcup_{i=1}^{n_1} S_{\varepsilon_1}(y_i^1).$$

Kadangi seka (x_n) begalinė, o rutulių padengiančių aibę M, tik baigtinis skaičius, tai bent į vieną iš jų pateka be galo daug sekos (x_n) elementų. Tą rutulį pažymėkime S_1. Toliau, paėmę ε_2, turime

$$S_1 \cap M \subset M \subset \bigcup_{i=1}^{n_2} S_{\varepsilon_2}(y_i^2).$$

Samprotaudami kaip ir anksčiau, gausime, kad į vieną iš rutulių $B_{\varepsilon_2}(y_i^2) = S_2$ pateka be galo daug sekos (x_n) narių. Taigi ir sankirtoje $S_1 \cap S_2$ yra be galo daug sekos (x_n) narių. Tęsdami šį procesą, gausime tokią rutulių seką $S_1, S_2, \dots,$ kad su kiekvienu $k \geq 1$ sankirtoje $\cap_{j=1}^k S_j$ yra be galo daug sekos (x_n) narių. Parinkime $x_{n_1} \in S_1$, $x_{n_2} \in S_1 \cap S_2, n_2 > n_1$ ir

$$x_{n_k} \in \cap_{j=1}^k S_j, \quad n_k > n_{k-1} > \cdots > n_1.$$

Taip gauname sekos (x_n) posekį (x_{n_k}). Kai $k \leq j$, tai abu elementai $x_{n_k}, x_{n_j} \in S_k$. Jei z_k – rutulio S_k centras, tai

$$d(x_{n_k}, x_{n_j}) \leq d(x_{n_k}, z_k) + d(z_k, x_{n_j}) \leq 2\varepsilon_k = 2^{-k+2}.$$

Taigi posekis (x_{n_k}) yra Koši seka. Kadangi metrinė erdvė $\mathbb{X}$ pilna, (x_{n_k}) konverguoja (žr. **??** lemą). ■

5.1 pastaba. Jei aibė $K \subset \mathbb{X}$ kompaktiška, tai su kiekvienu $\varepsilon > 0$ aibei K egzistuoja baigtinis ε-tinklas, sudarytas iš aibės K elementų.

Tikrai, tegu $K_\varepsilon \subset \mathbb{X}$ yra aibės K minimalus baigtinis $\varepsilon/2$-tinklas sudarytas iš m elementų. Tarkime, $K_\varepsilon = \{x_1, \dots, x_m\}$. Tuomet

$$K \subset \cup_{j=1}^m S(x_j; \varepsilon/2) \ \text{ ir } \ K \cap S(x_j; \varepsilon/2) \neq \emptyset$$

su visais $j = 1, \dots, m$. Tegu $x_j' \in K \cap S(x_j; \varepsilon/2)$, $j = 1, \dots, m$. Tuomet aibė $\{x_1', \dots, x_m'\} \subset K$ yra aibės K ε-tinklas. Tikrai, jei $x \in K$, egzistuoja toks x_j, kad $d(x, x_j) < \varepsilon/2$. Taigi $d(x, x_j') \leq d(x, x_j) + d(x_j, x_j') < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$.

5.1 išvada. *Tam, kad pilnos metrinės erdvės $\mathbb{X}$ aibė $K \subset \mathbb{X}$ būtų reliatyviai kompaktiška pakanka, kad su kiekvienu $\varepsilon > 0$ egzistuotų aibės K reliatyviai kompaktiškas ε-tinklas.*

Įrodymas. Tarkime, N_ε yra aibės K reliatyviai kompaktiškas $\varepsilon/2$-tinklas. Aibei N_ε pritaikę Hausdorfo teoremą, gauname baigtinį jos $\varepsilon/2$ tinklą K_ε. Aibė K_ε kartu yra ir aibės K ε-tinklas. Tikrai, jei $x \in K$, tai egzistuoja toks $y \in N_\varepsilon$ su kuriuo $d(x, y) < \varepsilon/2$. Savo ruožtu, tašką y atitinka toks $x_\varepsilon \in K_\varepsilon$, kad $d(y, x_\varepsilon) < \varepsilon/2$. Tokiu būdu, kiekvieną $x \in K$ atitinka toks $x_\varepsilon \in K_\varepsilon$, kad

$$d(x, x_\varepsilon) \leq d(x, y) + d(y, x_\varepsilon) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Vadinasi, aibė K_ε yra aibės K ε-tinklas. Kadangi erdvė $\mathbb{X}$ pilna, iš Hausdorfo teoremos išplaukia, kad aibė K reliatyviai kompaktiška. ■

5.2 išvada. *Kompaktiška metrinė erdvė yra separabili.*

Įrodymas. Tarkime, $(\mathbb{X}, d)$ – kompaktiška metrinė erdvė. Su kiekvienu $n \in \mathbb{N}$ nagrinėkime baigtinį aibės $\mathbb{X}$ $1/n$-tinklą $K_n = \{y_1^{(n)}, \ldots, y_{k_n}^{(n)}\}$. Aibė

$$K = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n$$

yra skaiti ir visur tiršta. Tikrai, laisvai parinkime $\varepsilon > 0$ ir $x \in \mathbb{X}$. Paimkime tokį $n \in \mathbb{N}$, kad $1/n < \varepsilon$. Kadangi aibė K_n yra aibės $\mathbb{X}$ $1/n$-tinklas, atsiras toks $y_j^{(n)} \in K_n \subset K$, su kuriuo $d(x, y_j^{(n)}) < 1/n < \varepsilon$. Taigi aibė K yra visur tiršta. Kadangi K yra skaiti sąjunga baigtinių aibių, tai ji yra skaiti. ∎

5.1.3 Arcelo-Askoli teorema

Šiame skyrelyje įrodysime Arcelo-Askolio teoremą apie erdvės $\mathcal{C}[a, b]$ kompaktiškąsias aibes.

5.3 apibrėžimas. *Aibė $A \subset \mathcal{C}[a, b]$ vadinama lygialaipsniškai tolydžiąja, jei kiekvieną $\varepsilon > 0$ atitinka toks $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, kad bet kuriai funkcijai $f \in A$ yra teisinga nelygybė*

$$|f(t) - f(s)| < \varepsilon, \quad \textit{kai} \ \ |s - t| < \delta.$$

Priminsime, kad funkcijos f tolydumo modulis yra argumento $\delta > 0$ funkcija

$$\omega(f; \delta) = \sup_{t,s \in [a,b]: |t-s| < \delta} |f(t) - f(s)|. \tag{5.1}$$

Bet kurios tolygiai tolydžios funkcijos tolydumo modulis artėja į nulį, kai δ artėja į nulį. Aibės $A \subset \mathcal{C}[a, b]$ lygialaipsnis tolydumas reiškia, kad

$$\lim_{\delta \to 0} \sup_{f \in A} \omega(f, \delta) = 0. \tag{5.2}$$

Aibė $A \subset \mathcal{C}[a, b]$ yra aprėžta tada ir tik tada, kai egzistuoja toks $M > 0$, kad kiekvienai funkcijai $f \in A$

$$|f(t)| \leq M, \quad \text{su visais} \quad t \in [a, b].$$

5.2 teorema. (Arcelo-Askolio.) *Aibė $M \subset \mathcal{C}[a,b]$ yra reliatyviai kompaktiška tada ir tik tada, kai ji aprėžta ir lygialaipsniškai tolydi.*

Įrodymas. *Būtinumas.* Sakykime, aibė $M \subset \mathcal{C}[a,b]$ reliatyviai kompaktiška. Aibės M aprėžtumas įrodytas 5.1 teiginiu. Įrodysime, kad aibė M yra lygialaipsniškai tolydi. Fiksuokime $\varepsilon > 0$. Remiantis Hausdorfo teorema, aibė M turi baigtinį ε-tinklą, sakykime, $M_\varepsilon = \{f_1, f_2, ..., f_n\} \subset \mathcal{C}[a,b]$. Kiekviena funkcija $f_k, k = 1, ..., n$ yra tolygiai tolydi (tolydžioji funkcija uždarame intervale yra tolygiai tolydi (žr. [?])), todėl kiekvieną $k = 1, ..., n$ atitinka toks $\delta_k = \delta_k(\varepsilon) > 0$, kad

$$|f_k(t) - f_k(s)| < \varepsilon, \quad \text{kai} \ \ |s - t| < \delta_k. \tag{5.3}$$

Apibrėžkime $\delta = \min_{1 \le k \le n} \delta_k$. Jei $|s-t| < \delta$, tai (5.3) tenkina visos funkcijos $f_k, k = 1, ..., n$.

Kadangi M_ε yra aibės M ε-tinklas, tai kiekvieną $f \in M$ atitinka toks $j \in \{1, ..., n\}$, kad

$$d(f, f_j) = \sup_{a \le t \le b} |f(t) - f_j(t)| < \varepsilon.$$

Jei imsime tokius $s, t \in [a,b]$, kad $|s-t| < \delta$, tai kiekvienam elementui $f \in M$ turėsime

$$\begin{aligned} |f(t) - f(s)| \ &\le |f(t) - f_k(t)| + |f_k(t) - f_k(s)| + |f_k(s) - f(s)| \\ &\le 2d(f, f_k) + |f_k(t) - f_k(s)| \le 3\varepsilon. \end{aligned}$$

Tai įrodo, kad aibė M yra lygialaipsniškai tolydi.

Pakankamumas. Tarkime, kad aibė M aprėžta ir lygialaipsniškai tolydi. Kadangi erdvė $\mathcal{C}[a,b]$ yra pilna, remiantis Hausdorfo teorema, pakanka įrodyti, kad su kiekvienu $\varepsilon > 0$ aibei M egzistuoja baigtinis ε-tinklas. Tarkime, $|f(t)| \le K$, kai $t \in [0,1], f \in M$. Toliau tegu $\delta > 0$ parinktas taip, kad kiekvienam elementui $f \in M$,

$$|f(t) - f(s)| < \varepsilon/5, \quad \text{kai} \quad |t - s| < \delta.$$

Tarkime, intervalo $[a,b]$ taškai $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ yra parinkti taip, kad $|t_j - t_{j-1}| < \delta$ su visais $j = 1, \ldots, n$. Intervalą $[-K, K]$ taip suskaidykime taškais $-K = y_0 < y_1 < \cdots < y_{m-1} < y_m = K$, kad $|y_j - y_{j-1}| < \varepsilon/5$ su visais $j = 1, \ldots, m$. Nagrinėkime aibę M_ε, sudarytą iš laužčių su viršūnėmis taškuose $(t_j, y_k), j = 0, 1, \ldots, n; k = 0, 1, \ldots, m$. Kitaip sakant, funkcija g priklauso aibei M_ε, jei su kiekvienu $j = 1, \ldots, n$, $g(t_j) = y_{m_j}$ su kuriuo nors

$0 \leq m_j \leq m$ ir g yra tiesinė funkcija kiekviename intervale $[t_{j-1}, t_j]$, $j = 1, \ldots, m$. Akivaizdu, kad aibė M_ε baigtinė. Įrodysime, kad ji yra aibės M ε-tinklas. Tegu $f \in M$. Imkime laužtę f_ε einančią per taškus $(t_j, y_{m_j}), j = 0, 1, \ldots, n$ su taip parinktu m_j, kad $|f(t_j) - y_{m_j}| < \varepsilon/5$. Pagal konstrukciją

$$|f(t_j) - f_\varepsilon(t_j)| = |f(t_j) - y_{m_j})| < \varepsilon/5,$$
$$|f(t_{j+1}) - f_e(t_{j+1})| < \varepsilon/5, |f(t_j) - f(t_{j+1})| < \varepsilon/5.$$

Taigi

$$|f_\varepsilon(t_j) - f_\varepsilon(t_{j+1})| < 3\varepsilon/5.$$

Kadangi intervale $[t_j, t_{j+1}]$ funkcija f_ε tiesinė, tai

$$|f_\varepsilon(t_j) - f_\varepsilon(t)| < 3\varepsilon/5, \quad \text{kai} \quad t \in [t_j, t_{j+1}].$$

Bet kuriam $t \in [a, b]$ paimkime tą j, su kuriuo $t_j < t \leq t_{j+1}$. Tuomet

$$|f(t) - f_\varepsilon(t)| \leq |f(t) - f(t_j)| + |f(t_j) - f_\varepsilon(t_j)| +$$
$$|f_\varepsilon(t_j) - f_\varepsilon(t)| \leq \varepsilon/5 + \varepsilon/5 + 3\varepsilon/5 = \varepsilon.$$

Taigi

$$d(f, f_\varepsilon) = \sup_{a \leq t \leq b} |f(t) - f_\varepsilon(t)| < \varepsilon$$

ir tai įrodo, kad baigtinė aibė M_ε yra aibės M ε-tinklas.

5.1.4 Kompaktiškosios $L_p(a, b)$ erdvių aibės

Šiame skyrelyje įrodysime Rysoteoremą, kuri aprašo erdvių $L_p(a, b)$ kompaktiškasias aibes. Siekdami supaprastinti technines detales, funkcijos $f \in L_p(a, b)$ apibrėžimo sritį pratęsime į visą realiųjų skaičių tiesę, laikydami $f(t) = 0$, jei $t \notin (a, b)$. Be to, jei nepasakyta kitaip, $p \geq 1$.

5.4 apibrėžimas. *Aibė $A \subset L_p(a, b)$ vadinama lygialaipsniškai p-integruojama, jei kiekvieną $\varepsilon > 0$ atitinka toks $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, kad bet kuriai funkcijai $f \in A$,*

$$\int_a^b |f(t + h) - f(t)|^p dt < \varepsilon, \quad \text{kai} \quad 0 \leq h < \delta.$$

Funkcijos $f \in L_p(a,b)$ integralinis tolydumo modulis yra argumento $\delta > 0$ funkcija

$$\omega_p(f;\delta) = \sup_{0\le h\le\delta} \int_a^b |f(t+h) - f(t)|^p dt.$$

5.3 teiginys. *Jei funkcija $f \in L_p(a,b)$, tai*

$$\lim_{\delta\to 0} \omega_p(f,\delta) = 0.$$

Įrodymas. Remiantis **??** išvada, kiekvieną $f \in L_p(a,b)$ ir bet kurį $\varepsilon > 0$ atitinka toks polinomas $p \in \mathcal{P}$, su kuriuo

$$\int_a^b |f(t) - p(t)|^p dt < \varepsilon^p.$$

Dabar nesunku užbaigti įrodymą. Taikydami Minkovskio nelygybę, turime

$$\Big(\int_0^1 |f(t+h) - f(t)|^p dt\Big)^{1/p} \le \Big(\int_0^1 |f(t+h) - p(t+h)|^p dt\Big)^{1/p} +$$
$$\Big(\int_0^1 |p(t+h) - p(t)|^p dt\Big)^{1/p} + \Big(\int_0^1 |f(t) - p(t)|^p dt\Big)^{1/p} \le$$
$$\varepsilon/4 + \Big(\int_0^1 |p(t+h) - p(t)|^p dt\Big)^{1/p} + \varepsilon/4 \le$$
$$\varepsilon/2 + 2^{1/p} \sup_{t\in[0,1]} |p(t+h) - p(t)|.$$

Kadangi $\lim_{h\to 0} \sup_{0\le t\le 1} |p(t+h) - p(t)| = 0$, tai

$$\limsup_{h\to 0} \Big(\int_0^1 |f(t+h) - f(t)|^p dt\Big)^{1/p} \le \varepsilon/2.$$

Tai įrodo teoremą, nes $\varepsilon > 0$ laisvai pasirinktas skaičius. ■

Aibės $A \subset L_p(a,b)$ vienodas tolydumas reiškia, kad (palyginkite su (5.2))

$$\lim_{\delta\to 0} \sup_{f\in A} \omega_p(f,\delta) = 0. \qquad (5.4)$$

Aibė $A \subset L_p(a,b)$ yra aprėžta, jei egzistuoja toks $M > 0$, kad visoms funkcijoms $f \in A$ teisinga

$$\int_a^b |f(t)|^p dt \le M.$$

5.3 teorema. *Aibė $K \subset L_p(a,b)$ $(a,b \in \mathbb{R}, b > a, \quad p \geq 1)$ yra reliatyviai kompaktiška tada ir tik tada, kai ji yra aprėžta ir lygialaipsniškai p-integruojama.*

Įrodymas. *Pakankamumas.* Pasinaudosime tuo, kad erdvė $\mathcal{C}[a,b]$ įdedama į erdvę $L_p(a,b)$. Tai yra, jei $f \in \mathcal{C}[a,b]$, tai $f \in L_p(a,b)$. Be to, teisinga nelygybė

$$\int_a^b |f(t)|^p dt \leq \max_{t\in[a,b]} |f(t)|^p (b-a). \tag{5.5}$$

Pasinaudodami ja, nesunkiai gauname, kad bet kuri erdvės $\mathcal{C}[a,b]$ kompaktiška aibė yra kompaktiška ir erdvėje $L_p(a,b)$. Pirmiausia su bet kuriuo $\tau > 0$, duotai aibei $K \subset L_p(a,b)$ sukonstruosime kompaktišką aibę $K_\tau \subset \mathcal{C}[a,b]$. Po to įrodysime, kad kiekvieną $\varepsilon > 0$ atitinka toks τ kad K_τ yra aibės K ε-tinklas. Kadangi K_τ kompaktiška ir erdvėje $L_p(a,b)$, galėsime pasinaudoti Hausdorfo teoremos 5.1 išvada.

Imdami $\tau > 0$, funkcijai $f \in L_p(a,b)$ apibrėžkime

$$f_\tau(t) = \frac{1}{2\tau}\int_{t-\tau}^{t+\tau} f(s)ds, \quad t \in [a,b].$$

Akivaizdu, kad kiekviena funkcija f_τ yra tolydi. Nagrinėkime erdvės $\mathcal{C}[a,b]$ aibę $K_\tau = \{f_\tau : f \in K\}$. Įsitikinsime, kad ta aibė yra aprėžta ir vienodai tolydi. Tikrai, pritaikę Minkovskio nelygybę, su kiekvienu $t \in [a,b]$ turime

$$|f_\tau(t)| = \frac{1}{2\tau}\Big|\int_{t-\tau}^{t+\tau} f(s)ds\Big| \leq \frac{1}{2\tau}\Big(\int_{t-\tau}^{t+\tau} 1ds\Big)^{1/q}\Big(\int_{t-\tau}^{t+\tau} |f(s)|^p ds\Big)^{1/p} \leq$$
$$(2\tau)^{-1/p}\Big(\int_a^b |f(s)|^p ds\Big)^{1/p} \tag{5.6}$$

ir

$$|f_\tau(t+u) - f_\tau(t)| = \frac{1}{2\tau}\Big|\int_{t+u-\tau}^{t+u+\tau} f(s)ds - \int_{t-\tau}^{t+\tau} f(s)ds\Big| =$$
$$\frac{1}{2\tau}\Big|\int_{t-\tau}^{t+\tau} f(s+u)ds - \int_{t-\tau}^{t+\tau} f(s)ds\Big| \leq$$
$$\frac{1}{2\tau}\int_{t-\tau}^{t+\tau} |f(s+u) - f(s)|ds \leq$$
$$(2\tau)^{-1/p}\Big(\int_{t-\tau}^{t+\tau} |f(s+u) - f(s)|^p ds\Big)^{1/p} \leq$$
$$(2\tau)^{-1/p}\Big(\int_a^b |f(s+u) - f(s)|^p ds\Big)^{1/p}. \tag{5.7}$$

Taigi aibės $K_\tau \subset \mathcal{C}[a,b]$ aprėžtumas ir vienodas tolydumas išplaukia iš teoremos sąlygų ir (5.6), (5.7) įverčių. Remiantis Arcelo-Askolio teorema, su kiekvienu τ aibė K_τ yra reliatyviai kompaktiška erdvėje $\mathcal{C}[a,b]$, ir, kaip pastebėjome aukščiau, taip pat reliatyviai kompaktiška erdvėje $L_p(a,b)$.

Įrodysime, kad kiekvieną $\varepsilon > 0$ atitinka toks $\tau = \tau(\varepsilon)$ su kuriuo aibė K_τ yra aibės K ε-tinklas. Fiksuokime $\varepsilon > 0$. Remiantis aibės K vienodu p-integruojamumu, egzistuoja toks $\tau = \tau(\varepsilon)$, kad

$$\int_0^1 |f(s) - f(s+u)|^p ds \leq \varepsilon^p, \quad \text{kai} \ \ |u| < \tau.$$

Pasiremdami šia savybe ir įverčiu

$$\begin{aligned}
&|f(t) - f_\tau(t)| \leq \frac{1}{2\tau}\int_{t-\tau}^{t+\tau} |f(t) - f(s)|ds = \\
&\frac{1}{2\tau}\int_{-\tau}^{\tau} |f(t) - f(t+s)|ds \leq \\
&(2\tau)^{-1/p}\Big(\int_{-\tau}^{\tau} |f(t) - f(t+s)|^p ds\Big)^{1/p},
\end{aligned}$$

gauname

$$d^p(f, f_\tau) = \int_0^1 |f(t) - f_\tau(t)|^p dt \leq \frac{1}{2\tau}\int_0^1 \Big\{\int_{-\tau}^{\tau} |f(t) - f(t+s)|^p ds\Big\} dt =$$
$$\frac{1}{2\tau}\int_{-\tau}^{\tau} \Big\{\int_a^b |f(t) - f(t+s)|^p dt\Big\} ds < \frac{1}{2\tau}\varepsilon^p \int_{-\tau}^{\tau} ds = \varepsilon^p.$$

Taigi aibė K_τ yra aibės K ε-tinklas. Lieka pasinaudoti Hausdorfo teoremos 5.1 išvada.

Būtinumas. Jau žinome, kad aibės aprėžtumas visados yra būtina kompaktiškumo sąlyga. Todėl lieka įrodyti aibės K vienodą p-integruojamumą. Tegu $\varepsilon > 0$ ir $f_1, \ldots, f_n$ yra aibės K ε-tinklas. Remiantis 5.3 teiginiu, kiekvieną i atitinka toks $\delta_i > 0$, su kuriuo

$$\int_a^b |f_i(t+h) - f_i(t)|^p dt < (\varepsilon/3)^p,$$

kai $0 < h < \delta_i$. Tegu $\delta = \min_{1 \leq i \leq n} \delta_i$. Tuomet su visais $i = 1, \ldots, n$

$$\int_a^b |f_i(t+h) - f_i(t)|^p dt < (\varepsilon/3)^p, \tag{5.8}$$

kai $0 < h < \delta$.

Laisvai pasirinkime funkciją $f \in K$. Pagal ε-tinklo apibrėžimą, rasime funkciją f_i, su kuria

$$\int_a^b |f(t) - f_i(t)|^p \leq (\varepsilon/3)^p. \tag{5.9}$$

Jei $0 < h < \delta$, pasinaudoję Minkovskio nelygybe ir (5.8), (5.9) savybėmis, įvertiname

$$\begin{aligned}&\Big(\int_a^b |f(t+h) - f(t)|^p dt\Big)^{1/p} \leq \Big(\int_a^b |f(t+h) - f_i(t+h)|^p dt\Big)^{1/p} + \\ &\Big(\int_a^b |f_i(t+h) - f_i(t)|^p dt\Big)^{1/p} + \Big(\int_a^b |f_i(t) - f(t)|^p dt\Big)^{1/p} \leq \\ &\Big(\int_a^b |f(t+h) - f_i(t+h)|^p dt\Big)^{1/p} + \frac{2\varepsilon}{3}.\end{aligned} \tag{5.10}$$

Prisiminę, kad funkcijos f ir f_i lygios nuliui už intervalo (a, b) ir, pritaikę (5.9), turime

$$\begin{aligned}&\int_a^b |f(t+h) - f_i(t+h)|^p dt = \int_{a+h}^b |f(t) - f_i(t)|^p dt \leq \\ &\int_a^b |f(t) - f_i(t)|^p dt \leq (\varepsilon/3)^p.\end{aligned} \tag{5.11}$$

Iš (5.10), (5.11) nelygybių išvedame

$$\int_a^b |f(t+h) - f(t)|^p \leq \varepsilon^p,$$

kai $0 < h < \delta$. Kadangi funkcija f buvo pasirinkta laisvai, antrosios sąlygos būtinumas įrodytas. ■