16 paskaita

16.1 Tiesinės lygtys

Šiame skyriuje spręsime lygtį $x - Tx = a$, kai x ir a yra atitinkamai ieškomas (nežinomas) ir duotas (žinomas) Banacho erdvės $\mathbb{E}$ elementai, o T – kompaktiškasis operatorius, veikiantis toje erdvėje. Daugelis matematikoje ir jos taikymuose nagrinėjamų lygčių gali būti užrašomos šiuo pavidalu, tinkamai parinkus erdvę $\mathbb{E}$ ir operatorių T. Žinomos tiesinių algebrinių lygčių sistemos gaunamos kai $\mathbb{E} = \mathbb{R}^n$ ir T – tiesinis operatorius, nusakomas $n \times n$ matrica. Jei $\mathbb{E}$ – funkcijų erdvė (pvz., $\mathcal{C}[a,b], L_p[a,b]$) o T – diferencialinis operatorius, gauname diferencialinę lygtį, o jei T – integralinis operatorius, turime integralinę lygtį. Atskiros integralinės lygtys buvo nagrinėjamos jau 19 šimtmetyje, tačiau bendrąją teoriją sukūrė ?. Volteras, ?. Fredholmas ir ?. Hilbertas tik 19 ir 20 amžių sandūroje. Visos šios lygtys svarbios matematikos taikymams, pvz., matematinei fizikai, mechanikai.

Pirmame skyrelyje pateiksime bendrą Banacho erdvių tiesinių lygčių teoriją ir suformuluosime Fredholmo alternatyvą. Antrame skyrelyje nagrinėsime Fredholmo lygtis, apibrėžtas Hilberto erdvėje $L_2[a,b]$ ir atskirą jų atvejį – Voltero lygtis. Paskutiniame skyrelyje trumpai paaiškinsime kaip sprendžiamos integralinės Fredholmo lygtys.

16.2 Fredholmo-Ryso-Šauderio teorija

Tarkime T – Banacho erdvės $\mathbb{E}$ kompaktiškasis operatorius (t.y. $T \in L_c(\mathbb{E})$). Tirsime lygtį

$$x - Tx = a, \tag{16.1}$$

kai $a \in \mathbb{E}$ – žinomas elementas, o $x \in \mathbb{E}$ – ieškomasis.

Kartu tirsime (16.1) lygtį atitinkančią homogeninę lygtį

$$z - Tz = 0 \tag{16.2}$$

bei atitinkamas jungtines lygtis

$$x^* - T^*x^* = a^* \tag{16.3}$$

ir

$$z^* - T^*z^* = 0; \tag{16.4}$$

čia T^* – operatoriaus T jungtinis operatorius, $a^* \in \mathbb{E}^*$ - duotasis elementas, $x^*, z^* \in \mathbb{E}^*$ –ieškomieji elementai. Priminsime, kad operatoriaus T reikšmių sritį žymime $R(T)$, $R(T) = \{Tx, x \in \mathbb{E}\}$. Toliau žymėsime $U = I - T$ ir $U^* = I^* - T^*$. Pirmiausia įrodysime tokį pagalbinį teiginį.

16.1 teorema. *Jei T – kompaktiškasis operatorius, tai $R(I - T)$ ir $R(I^* - T^*)$ – uždarosios tiesinės aibės.*

Įrodymas. Tarkime, $(y_n) \subset R(U)$ ir $y_n \to y_0$, kai $n \to \infty$. Irodysime, kad $y_o \in R(U)$. Sakykime, $(x_n) \subset \mathbb{E}$ – tokia seka, kad $x_n - Tx_n = y_n$ su visais $n \in \mathbb{N}$. Tirsime kelis atvejus.

Pirmiausia tarkime, kad seka (x_n) – aprėžta. Kadangi operatorius T kompaktiškas, tai seka (Tx_n) turi konverguojantį posekį. Bet šiuo atveju ir seka (x_n) turi konverguojantį posekį, nes $x_n = y_n + Tx_n$. Tarkime, kad posekis (x'_n) konverguoja į elementą x_0. Kadangi operatorius T yra tolydus, tai $Tx'_n \to Tx_0$, kai $n \to \infty$. Vadinasi, $x_0 = Tx_0 + y_0$, t.y. $y_0 \in R(U)$.

Dabar tarkime, kad seka (x_n) nėra aprėžta. Kad būtų trumpiau, pažymėkime $N = N(U)$ ir $d_n = d(x_n, N)$. Pagal atstumo nuo taško iki aibės apibrėžimą egzistuoja toks elementas $z_n \in N$, kad

$$d_n \leq ||x_n - z_n|| \leq (1 + \frac{1}{n})d_n. \tag{16.5}$$

Be to, $U(x_n - z_n) = y_n$. Jei seka (d_n) aprėžta, tai, samprotaudami kaip pirmuoju atveju, tik pakeitę x_n į $x_n - z_n$, įrodome, kad $y_0 \in R(U)$. Lieka ištirti atvejį, kai seka (d_n) neaprėžta. Bet, pasirodo, šito negali būti. Tikrai, tarkime, (d_n) – neaprėžtoji seka. Imdami, jei reikia, posekį, galime laikyti, kad $d_n \to \infty$, kai $n \to \infty$. Pažymėkime

$$u_n = \frac{x_n - z_n}{||x_n - z_n||}.$$

Kadangi $y_n \to y_0$, todėl $||y_n||$ – aprėžta seka, taigi,

$$||y_n/||x_n - z_n|||| \leq \sup_n ||y_n||/d_n \to 0,$$

kai $n \to \infty$. Todėl $U(u_n) \to 0$, kai $n \to \infty$, o iš jau įrodytos dalies (u_n – aprėžta seka , o $y_n = U(u_n) \to y_0 = 0$) išplaukia, kad egzistuoja sekos (u_n) konverguojantis posekis. Kad būtų papraščiau, sakykime, kad pati seka konverguoja: $u_n \to u_0$, kai $n \to \infty$. Akivaizdu, kad $u_0 \in N$. Bet $x_n - z_n - ||x_n - z_n||u_0 = (u_n - u_0)||x_n - z_n||$. Be to, $z_n + ||x_n - z_n||u_0 \in N$, todėl

$$\begin{aligned}&||u_n - u_0||(1 + 1/n)d_n \geq ||(u_n - u_0)||x_n - z_n|||| = \\ &||x_n - (z_n + ||x_n - z_n||u_0)|| \geq d_n.\end{aligned}$$

Iš čia išplaukia, kad $||u_n - u_0|| \geq n/(n+1)$, o tai prieštarauja sąryšiui $u_n \to u_0$, kai $n \to \infty$. Vadinasi, seka (d_n) yra aprėžta, o tuo pačiu aibė $R(U)$ yra uždara. Kad aibė $R(U^*)$ yra uždara, išplaukia iš ką tik įrodytojo teiginio, nes, remiantis Šauderio teorema iš 9 skyriaus , T^* – kompaktiškasis operatorius. ■

Dabar įrodysime pagrindinį Fredholmo-Ryso-Šauderio teorijos teiginį.

16.2 teorema. *Tarkime, T – Banacho erdvės $\mathbb{E}$ kompaktiškasis operatorius. Šie teiginiai ekvivalentūs:*

a) *(16.1) lygtis turi sprendinį su kiekvienu $y \in \mathbb{E}$;*

b) *(16.2) lygtis turi tik nulinį sprendinį;*

c) *(16.3) lygtis turi sprendinį su kiekvienu $y^* \in \mathbb{E}^*$;*

d) *(16.4) lygtis turi tik nulinį sprendinį.*

Be to, jei išpildyta bent viena iš a) – d) sąlygų, tai operatoriai $I - T$ ir $I - T^*$ yra reguliarūs.

Pastaba. Teoremos tvirtinimą galima performuluoti taip: keturi tvirtinimai $R(U) = \mathbb{E}, R(U^*) = \mathbb{E}^*, N(U) = \{0\}, N(U^*) = \{0\}$ yra ekvivalentūs.

Įrodymas. *a)* $\Rightarrow$ *b)*. Duota, kad $R(U) = \mathbb{E}$. Tarkime, b) tvirtinimas neteisingas, t.y.

$$N_1 = \{x \in \mathbb{E} : Ux = 0\} \neq \{0\}.$$

Tarkime, $x_1 \in N_1$ ir $x_1 \neq 0$. Tirkime lygtį $Ux = x_1$. Remiantis duotąja sąlyga, ši lygtis turi sprendinį. Tarkime, x_2 – tos lygties sprendinys. Tuomet

$$U^2 x_2 = Ux_1 = 0, \quad \text{t.y.} \;\; x_2 \in N_2 = \{x \in \mathbb{E} : U^2 x = 0\}.$$

Akivaizdu, kad $N_1 \subset N_2$ ir, be to, ši įdėtis yra griežta (priešingu atveju $x_1 = 0$). Tęsdami šiuos samprotavimus, gauname poerdvių seką

$$N_1 \subset N_2 \subset \cdots \subset N_n \subset \cdots .$$

Be to, visos įdėtys griežtos. Remiantis Ryso lema apie "beveik" statmenį, kiekvienoje aibėje N_n egzistuoja toks elementas z_n, kad $||z_n|| = 1$ ir $||x - z_n|| \geq 1/2$ su visais $x \in N_{n-1}$. Tirkime seką (Tz_n). Ši seka turi konverguojantįjį posekį, nes operatorius T kompaktiškas, o seka (z_n) aprėžta. Kita vertus, jei $m > n$, tai

$$U^{m-1}((z_m - Uz_n + Uz_m) = U^{m-1}z_n -$$
$$U^m z_n + U^m z_m = 0,$$

nes $U^k z_l = 0$, kai $k \geq l$. Vadinasi,

$$z_n - Uz_n + Uz_m \in N_{m-1}$$

ir

$$||Tz_m - Tz_n|| = ||(z_m - Uz_n + Uz_m) - z_m|| \geq 1/2.$$

Iš čia išplaukia, kad seka (Tx_n) neturi nė vieno konverguojančio posekio. Gautoji prieštara įrodo, kad prielaida buvo klaidinga.

$b) \Rightarrow c)$. Duota, kad $N(U) = \{0\}$. Reikia įrodyti, kad $R(U^*) = \mathbb{E}^*$. Tarkime, $x^* \in \mathbb{E}^*$. Funkcionalą $y^* : R(U) \to \mathbb{K}$ apibrėžkime taip: $y^*(u) = x^*(x)$, kai $u = Ux$. Akivaizdu, kad kiekvieną $u \in R(U)$ atitinka vienintelis $x \in \mathbb{E}$, su kuriuo $u = Ux$. Tikrai, jei x' yra kitas toks elementas, tai $x - x' \in N(U)$. Bet iš prielaidos $b)$ išplaukia $N(U) = \{0\}$. Vadinasi, $x = x'$. Taip pat nesunku įsitikinti, kad funkcionalas y^* - tiesinis. Norėdami įrodyti, kad jis aprėžtas, įsitikinsime, kad skaičių aibė $\{||x||/||Ux||, x \in \mathbb{E}\}$ aprėžta. Tarkime, kad yra priešingai, t. y. egzistuoja tokia seka (x_n), kad

$$\lim_{n\to\infty} \frac{||x_n||}{||Ux_n||} = \infty.$$

Kad būtų paprasčiau, galime tarti, jog $||x_n|| = 1$ ir $\lim_{n\to\infty} ||Ux_n|| = 0$. Kadangi T kompaktiškasis operatorius, tai seka (Tx_n) turi konverguojantįjį posekį. Sakykime, (Tx_{n_k}) ir yra tas posekis bei

$$\lim_{k\to\infty} Tx_{n_k} = x_0.$$

Iš čia ir iš nelygybės

$$||x_{n_k} - x_0|| \leq ||x_{n_k} - Tx_{n_k}|| + ||Tx_{n_k} - x_0|| = ||Ux_{n_k}|| + ||Tx_{n_k} - x_0||$$

gauname, kad $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x_0$. Bet šiuo atveju $x_0 - Tx_0 = \lim_{k\to\infty} x_{n_k} - Tx_{n_k} = 0$, todėl $x_0 = 0$. Tai prieštarauja sąlygai $||x_{n_k}|| = 1$. Ši prieštara įrodo, kad egzistuoja konstanta α, kad $||x|| \leq \alpha||(U)x||$ su visais $x \in \mathbb{E}$. Iš šio įverčio išplaukia, kad funkcionalas y^* aprėžtas. Remiantis Hano–Banacho teorema, egzistuoja funkcionalo y^* tęsinys $\tilde{y}^* \in \mathbb{E}^*$ į visą erdvę $\mathbb{E}$. Be to, $||\tilde{y}^*|| = ||y^*||$. Kadangi $\tilde{y}^*(u) = y^*(u)$, kai $u \in R(U)$, tai $\tilde{y}^*(x - Tx) = x^*(x)$ su kiekvienu $x \in \mathbb{E}$. Iš čia $x^*(x) = (U^*)\tilde{y}^*(x)$ su visais $x \in \mathbb{E}$. Vadinasi, $x^* = (U^*)\tilde{y}^* \in R(U^*)$.

c) $\Rightarrow$ *d*). Įrodome kaip ir implikaciją *a*) $\Rightarrow$ *b*), tereikia operatorių T pakeisti operatoriumi T^*.

d) $\Rightarrow$ *a*). Duota, kad $N((U)^*) = \{0\}$. Reikia įrodyti, kad $R(U) = \mathbb{E}$. Tarkime, $R(U) \neq \mathbb{E}$. Remiantis 1.1 teorema, $R(U)$ – uždaroji tiesinė aibė. Tarkime, $y_0 \in \mathbb{E}$, bet $y_0 \notin R(U)$. Remiantis 7.3.2 (??) išvada, egzistuoja toks funkcionalas $x^* \in \mathbb{E}^*$, kad $x^*(y_0) = 1$ ir $x^*(y) = 0$ su visais $y \in R(U)$. Bet šiuo atveju $x^*(Ux) = 0$ su visais $x \in \mathbb{E}$, todėl ir $U^*x^*(x) = 0$ su visais $x \in \mathbb{E}$. Iš čia išplaukia, kad $U^*x^* = 0$, t.y. $x^* \in N(U^*)$ ir $x^* \neq 0$. Gavome prieštarą. ∎

16.3 teorema. *Jei T – Banacho erdvės $\mathbb{E}$ kompaktiškasis operatorius, tai* (16.1) *ir* (16.3) *lygtys turi vienodą baigtinį tiesiškai nepriklausomų sprendinių skaičių.*

Įrodymas. Remiantis 16.2 teorema, homogeninės (16.2) ir (16.4) lygtys abi kartu turi arba tik trivialiuosius sprendinius, arba egzistuoja abiejų lygčių netrivialieji sprendiniai. Antruoju atveju 1 yra operatorių T ir T^* tikrinė reikšmė, todėl remiantis 10.1.5 (??) teorema, šių operatorių tikriniai poerdviai $N(U)$ ir $N(U^*)$, atitinkantys tikrinę reikšmę 1, yra baigtiniamačiai. Sakykime, $\{z_1, \ldots, z_n\}$ ir $\{\psi_1^*, \ldots, \psi_m^*\}$ yra atitinkamai poerdvių $N(U)$ ir $N(U^*)$ bazės. Įrodysime, kad $n = m$.

Tarkime, $n < m$. Remiantis 7.3.4 (??) išvada, egzistuoja jungtinės erdvės $\mathbb{E}^*$ elementų sistema $\{z_1^*, \ldots, z_n^*\}$, kuri yra biortogonali bazei $\{z_1, \ldots, z_n\}$, ir erdvės $\mathbb{E}$ elementų sistema $\{\psi_1, \ldots, \psi_m\}$ – biortogonali bazei $\{\psi_1^*, \ldots, \psi_m^*\}$. Kadangi atitiktis

$$x \to \sum_{i=1}^{n} z_i^*(x)\psi_i$$

apibrėžia kompaktiškąjį baigtiniamatį operatorių, tai operatorius $V : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$,

$$Vx = Tx + \sum_{i=1}^{n} z_i^*(x)\psi_i$$

yra kompaktiškas, nes jis lygus dviejų kompaktiškųjų operatorių sumai. Įrodysime, kad lygtis $Vz - z = 0$ turi tik trivialųjį sprendinį. Jei z_0 – bet kuris šios lygties sprendinys, tai $\psi_k^*(Uz_0 - z_0) = \psi_k^*(0) = 0$ su visais $k = 1, \ldots, n$. Vadinasi,

$$\begin{aligned} 0 = \psi_k^*(Vz_0 - z_0) &= \psi_k^*\Big(Tz_0 - z_0 + \sum_{i=1}^{n} z_i^*(z_0)\psi_i\Big) \\ &= ((T^* - I^*)\psi_k^*)(z_0) + \sum_{i=1}^{n} z_i^*(z_0)\psi_k^*(\psi_i) = z_k^*(z_0), \end{aligned}$$

su visais $k = 1, \ldots, n$, nes $\psi_k^*(\psi_i) = \delta_{kj}$ ir $(T^* - I^*)\psi_k^* = 0$. Kadangi $z_k^*(z_0) = 0$ su visais $k = 1, \ldots, n$, tai $Vz_0 = Tz_0$. Iš čia išplaukia, kad $z_0 \in \mathbb{E}$ yra lygties $Tx - x = 0$ sprendinys: $Tz_0 - z_0 = 0$, t.y. $z_0 \in N(U)$. Vadinasi, $z_0 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i z_i$. Tada

$$0 = z_k^*(z_0) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i z_k^*(z_i) = \alpha_k$$

su visais $k = 1, \ldots, n$. Tokiu būdu, įrodėme, kad lygtį $Vz - z = 0$ tenkina tik trivialusis sprendinys $z_0 = 0$. Remiantis 16.2 teorema, su kiekvienu $y \in \mathbb{E}$ lygtis $Vx - x = y$ turi vienintelį sprendinį. Sakykime, x' yra lygties $Vx - x = \psi_{n+1}$ sprendinys, t.y. $Vx' - x' = \psi_{n+1}$. Šiuo atveju

$$\begin{aligned} \psi_{n+1}^*(\psi_{n+1}) &= \psi_{n+1}^*(Vx' - x') \\ &= \psi_{n+1}^*(Tx' - x') + \sum_{i=1}^{n} z_i^*(x')\psi_{n+1}^*(\psi_i) \\ &= (T^* - I)\psi_{n+1}^*(x') = 0, \end{aligned}$$

nes $(T^* - I)\psi_{n+1}^* = 0$ ir $\psi_{n+1}^*(\psi_i) = \delta_{n+1,i} = 0$, jei $i = 1, \ldots, n$. Kita vertus, turi būti $\psi_{n+1}^*(\psi_{n+1}) = 1$. Gavome prieštarą. Taigi prielaida $n < m$ klaidinga.

Panašiai samprotaudami, tik pakeitę operatorių T operatoriumi T^*, gauname prieštarą nelygybei $m < n$. Vadinasi, $n = m$. ■

16.4 teorema. *Tarkime, T – kompaktiškasis operatorius, veikiantis Banacho erdvėje $\mathbb{E}$. Tam, kad* (16.1) *lygtis turėtų bent vieną sprendinį, būtina ir pakankama, kad su kiekvienu* (16.4) *lygties sprendiniu z^* būtų $z^*(a) = 0$.*

Įrodymas. *Būtinumas.* Jei (16.1) lygtis turi sprendinį x_0, tai, imdami $z^* \in N(U^*)$, t.y., (16.4) lygties bet kurį sprendinį, gauname

$$z^*(a) = z^*(Ux_0) = (U^*z^*)(x_0) = 0.$$

Pakankamumas. Tegu $z^*(a) = 0$ su kiekvienu $z^* \in N(U^*)$, bet tarkime, kad (1.1) lygtis su šiuo a sprendinių neturi, t.y. $a \notin R(U)$. Remiantis 16.1 teorema, aibė $R(U)$ uždara. Vadinasi, galime pritaikyti Hano–Banacho teoremos 7.3.2 (??) išvadą: egzistuoja toks $x^* \in \mathbb{E}^*$, kad $x^*(a) = 1$ ir $x^*(Ux) = 0$ su visais $x \in \mathbb{E}$. Tada $(U^*x^* = 0$, t.y. $x^* \in N(U^*)$. Bet pagal mūsų teoremos sąlygą $x^*(a) = 0$. Gavome prieštarą, ir pakankamumas įrodytas. ∎

16.5 teorema. *Tarkime, T – Banacho erdvės $\mathbb{E}$ kompaktiškasis operatorius. Tam, kad* (16.3) *lygtis turėtų bent vieną sprendinį, būtina ir pakankama, kad su kiekvienu* (16.2) *lygties sprendiniu x būtų $a^*(x) = 0$.*

Įrodymas. Būtinumas įrodomas lygiai taip pat kaip ir 16.4 teoremoje, todėl įrodysime tik pakankamumą. Tegu $a^*(x) = 0$ su kiekvienu $x \in N(U)$, reikia parodyti, kad $a^* \in R(U^*)$. Iš 16.1 teoremos išplaukia, kad $L = R(U)$ yra poerdvis. Šiame poerdvyje apibrėšime funkcionalą $g_0 : L \to \mathbb{R}$ lygybe $g_0(y) = a^*(x)$, čia x yra kuris nors elemento y pirmvaizdis atvaizdžio U atžvilgiu, t.y., $Ux = y$. Toks funkcionalo g_0 apibrėžimas korektiškas. Tikrai, jei v yra kitas elementas, tenkinantis $Uv = y$, tai $U(x - v) = 0$. Todėl $y^*(x - v) = 0$ ir $y^*(x) = y^*(v)$. Akivaizdu, kad g_0 – tiesinis funkcionalas. Įsitikinsime, kad jis ir aprėžtas. Kadangi aprėžtas operatorius U atvaizduoja Banacho erdvę $\mathbb{E}$ į Banacho erdvę L, taikydami Banacho atvirojo atvaizdžio teoremą (žr. **??** teoremą), galime tvirtinti, kad operatorius U vienetinį erdvės $\mathbb{E}$ rutulį S_1 atvaizduoja į aibę erdvėje L, apimančią rutulį su centru 0, t.y., egzistuoja toks $\delta > 0$ kad

$$\{y : y \in L, ||y|| < \delta\} \subset U(S_1).$$

Tegu $y \in L$, tada $\delta y/2||y|| \in U(S_1)$, o tai reiškia, kad $Uz = \delta y/2||y||$ su kuriuo nors $z \in \mathbb{E}, ||z|| < 1$. Paėmę $x = 2||y||z/\delta$, turime $Ux = y$ ir $||x|| < (2/\delta)||y||$. Dabar jau lengvai išvedame g_0 aprėžtumą:

$$|g_0(y)| = |y^*(x)| \leq ||y^*||||x|| < ||y^*||(2/\delta)||y||.$$

Pasinaudoję Hano-Banacho teorema apie funkcionalo pratęsimą normuotose erdvėse ir pratesę g_0 į visą erdvę $\mathbb{E}$, gauname funkcionalą $g \in \mathbb{E}^*$, su visais $x \in \mathbb{E}$ tenkinantį lygybes

$$g(Ux) = g(y) = g_0(y) = y^*(x), \quad \text{arba} \quad U^*g(x) = y^*(x).$$

Bet tai ir reiškia, kad g yra lygties $U^*g = y^*$ sprendinys. ■

Įrodytų teoremų rezultatus galime suformuluoti kaip teoremą, žinomą Fredholmo alternatyvos vardu.

16.6 teorema. (Fredholmo alternatyva.) *Teisinga tokia alternatyva: arba*

1) (16.2) *ir* (16.4) *lygtys turi tik nulinius sprendinius; šiuo atveju* (16.1) *ir* (16.3) *lygtys turi vienintelius sprendinius su bet kuriais $a \in \mathbb{E}$ ir atitinkamai $a^* \in \mathbb{E}^*$;*

arba

2) egzistuoja nenuliniai (16.2) *ir* (16.4) *lygčių sprendiniai; šiuo atveju* (16.1) *lygtis turi sprendinį tada ir tik tada, kai $z^*(a) = 0$ su kiekvienu* (16.4) *lygties sprendiniu z^*; savo ruožtu* (16.3) *lygtis turi sprendinį tada ir tik tada, kai $a^*(z) = 0$ su kiekvienu* (16.2) *lygties sprendiniu z; be to, homogeninių lygčių sprendinių generuoti poerdviai turi tą pačią baigtinę dimensiją.*

16.3 Integralinės Fredholmo lygtys

Šiame skyrelyje nagrinėsime Hilberto erdvės $L_2[a, b]$ Fredholmo integralines lygtis. Aišku, Hilberto erdvė yra atskiras Banacho erdvės atvejis, ir visi pirmojo skyrelio teiginiai galioja. Tačiau Hilberto erdvėje skaliarinės daugybos ir ortogonalumo sąvokų dėka atsiranda naujų efektų bei faktų.

Nagrinėsime lygtį

$$g(s) = f(s) + \int_a^b k(s,t)g(t)dt, \quad a \le s \le b, \tag{16.6}$$

kai g yra ieškoma, o f ir k – duotos funkcijos. Ši lygtis yra jau nagrinėta (16.1) lygtis su Fredholmo integraliniu operatoriumi T, nusakomu branduolio funkcija k. (16.6) lygtis vadinama antros rūšies Fredholmo integraline lygtimi. Pirmos rūšies Fredholmo integraline lygtimi vadinama lygtis

$$f(s) = \int_a^b k(s,t)g(t)dt, \quad a \leq s \leq b. \tag{16.7}$$

Skyrelio gale trumpai aptarsime jos savybes.

Fredholmo integraliniai operatoriai ir jų savybės gana detaliai nagrinėtos 9 skyriuje. Trumpai priminsime pagrindinius faktus apie šiuos operatorius. Tarkime, kad operatoriaus T branduolys k tenkina sąlygą

$$\int_a^b \int_a^b k^2(t,s)dtds < \infty. \tag{16.8}$$

Tuomet $T \in L(L_2(a,b))$. Erdvę $L_2(a,b)$ nagrinėsime kaip Hilberto. Tuomet operatoriaus T jungtinis operatorius T^* taip pat yra branduolinis ir nusakomas branduoliu k^*, $k^*(s,t) = k(t,s)$, $s,t \in (a,b)$ (kompleksinėje Hilberto erdvėje $k^*(s,t) = \overline{k(t,s)}$), t.y.,

$$T^*g(t) = \int_a^b k^*(t,s)g(s)ds = \int_a^b k(s,t)g(s)ds.$$

Jei tenkinama (16.8) sąlyga, tai abu operatoriai T ir T^* – kompaktiški. Jei, be to, $k(s,t) = k(t,s)$, $s,t \in (a,b)$, tai operatorius T – savijungis. Bendru kompaktiško operatoriaus T Hilberto erdvėje $\mathbb{H}$ atveju ..... skyrelio rezultatus lengva performuluoti, be to, formuluotės tampa paprastesnėmis, pasinaudojus ortogonalaus pildinio sąvoka. Pavyzdžiui, Fredholmo alternatyvą galime užrašyti tokiomis lygybėmis:

$$R(I-T) = N(I-T^*)^{\perp}, \quad R(I-T^*) = N(I-T)^{\perp},$$

Banacho erdvėse nėra savijungio operatoriaus sąvokos, todėl pažiūrėkime, kaip atrodo Fredholmo alternatyva Hilberto erdvės $\mathbb{H}$ ir kompaktiško savijungio operatoriaus T atveju. Nagrinėsime (16.6) lygtį su simetriniu branduoliu, užrašydami ją abstrakčia forma

$$g = Tg + f. \tag{16.9}$$

Remiantis (??) teorema, erdvėje $\mathbb{H}$ egzistuoja ortonormuota operatoriaus T tikrinių vektorių sistema (e_n). Sakykime, (λ_n) yra atitinkamos tikrinės reikšmės. Jei

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} b_k e_k + f', \quad Tf' = 0$$

$$g = \sum_{k=1}^{\infty} g_k e_k + g', \quad Tg' = 0,$$

tai, įstatę šias išraiškas į (16.9) lygtį, gauname

$$\sum_{k=1}^{\infty} g_k e_k + g' = \sum_{k=1}^{\infty} b_k e_k + f' + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k g_k e_k. \tag{16.10}$$

Ši lygybė galios tada ir tik tada, kai

$$g' = f'$$

$$g_k = \frac{b_k}{1-\lambda_k}, \quad \text{kai} \quad \lambda_k \neq 1,$$

$$b_k = 0, \quad \text{kai} \quad \lambda_k = 1.$$

Iš čia jau nesunkiai gauname Fredholmo alternatyvą nagrinėjamu atveju.

16.7 teorema. *Jei 1 nėra kompaktiško savijungio operatoriaus T tikrinė reikšmė, tai (16.9) lygtis turi vieną ir tik vieną sprendinį su kiekviena funkcija f. Jei 1 yra operatoriaus T tikrinė reikšmė, tai (16.9) lygtis išsprendžiama tik toms funkcijoms f, kurios ortogonalios visoms operatoriaus T tikrinėms funkcijoms, atitinkančioms tikrinę reikšmę 1. Pastaruoju atveju (16.9) lygtis turi be galo daug sprendinių.*

16.3.1 Voltero lygtis

Jei Fredholmo integralinėje lygtyje (16.6) paimsime branduolį, kuris tenkina sąlygą $k(s,t) = 0$, kai $s > t$, tai gausime lygtį

$$x(s) = f(s) + \int_a^s k(s,t)x(t)dt, \quad a \leq s \leq b, \tag{16.11}$$

kuri vadinama integraline Voltero lygtimi, o integralinis operatorius, veikiantis kokioje nors funkcijų erdvėje ir apibrėžiamas lygybe

$$(Tx)(s) = \int_a^s k(s,t)x(t)dt$$

vadinamas Voltero operatoriumi. Nors Voltero lygtis yra atskiras Fredholmo lygties atvejis ir jai tinka bendra anksčiau išdėstyta teorija, šį atvejį verta išskirti. Dėl specifinio lygties pavidalo galima įrodyti, kad tolydžiųjų funkcijų klasėje Voltero lygtis turi vienintelį sprendinį su kiekviena tolydžia funkcija f. Tai yra, nagrinėdami erdvės $\mathcal{C}[a,b]$ integralinę Voltero lygtį, įrodome tokį tvirtinimą.

16.8 teorema. *Tegu (16.11) lygtyje branduolys $k(s,t)$ – tolydi dviejų kintamųjų funkcija. Tada ši lygtis turi vienintelį sprendinį su kiekviena $f \in \mathcal{C}[a,b]$.*

Įrodymas. Pasinaudodami Fredholmo alternatyva matome, kad užtenka parodyti, jog homogeninė lygtis

$$x(s) = \int_a^s k(s,t)x(t)dt, \quad a \le s \le b,$$

turi vienintelį nulinį sprendinį. Tam tikslui pasinaudojame teorema apie sutraukiantį atvaizdį (žr. teoremą **??**, o taip pat pavyzdžius, kuriuose nejudamo taško teorema buvo taikoma integralinėms lygtims). Būtent, parodysime, kad tam tikras atvaizdžio $T : \mathcal{C}[a,b] \to \mathcal{C}[a,b]$, apibrėžiamo pereinamybe

$$Tx(s) = \int_a^s k(s,t)x(t)dt, \quad a \le s \le b,$$

laipsnis yra sutraukiantis atvaizdis. Tada iš **??** teoremos gausime, kad nagrinėjama lygtis turi vienintelį sprendinį. Kadangi nulinė funkcija akivaizdžiai tenkina homogeninę lygtį, gauname kad ši lygtis turi tik nulinį sprendinį. Pažymėkime $M = \max_{x,y\in[a,b]} k(x,y)$ ir tegu $x_1, x_2 \in \mathcal{C}[a,b]$, $d = \max_t |x_1(t) - x_2(t)|$. Tada

$$\begin{aligned} |Tx_1(s) - Tx_2(s)| &= |\int_a^s k(s,t)(x_1(t) - x_2(t))dt| \\ &\le Md(s-a) \end{aligned}$$

ir

$$\begin{aligned} |T^2x_1(s) - T^2x_2(s)| &= |\int_a^s k(s,t)(Tx_1(t) - Tx_2(t))dt| \\ &\le M^2d(s-a)^2/2. \end{aligned}$$

Tęsdami šias nelygybes, gausime

$$|T^nx_1(s) - T^nx_2(s)| \le \frac{M^nd(s-a)^n}{n!} \le \frac{M^nd(b-a)^n}{n!},$$

$$\sup_{s\in[a,b]} |T^n x_1(s) - T^n x_2(s)| \leq \frac{M^n d(b-a)^n}{n!}.$$

Iš pastarosios nelygybės matome, kad pakankamai dideliems n (tokiems, su kuriais $M^n d(b-a)^n (n!)^{-1} < 1$) atvaizdis T^n yra sutraukiantis su bet kuriomis fiksuotomis M, a, b reikšmėmis. Teorema įrodyta.

16.3.2 Pirmos rūšies Fredholmo lygtys

Baigdami šį skyrelį paminėsime taip vadinamas pirmos rūšies Fredholmo lygtis, kuriose ieškomas elementas x tiesiogiai į lygtį neįeina:

$$Tx = a. \tag{16.12}$$

Čia, kaip ir anksčiau $T : H \to H$ – kompaktiškas operatorius, $a \in H$ – fiksuotas elementas. Jau nagrinėtos (16.9) lygtys vadinamos antros rūšies Fredholmo lygtimis. Ir nors iš pirmo žvilgsnio (16.12) lygtis atrodo paprastesnė negu (16.9) lygtis, tačiau iš tikrųjų pirmos rūšies Fredholmo lygčių teorija yra sudėtingesnė. Net paėmę paprastą Hilberto erdvės $L_2[a, b]$ lygtį

$$f(s) = \int_a^s x(t)dt, \tag{16.13}$$

matome, kad ne su visomis funkcijomis f iš $L_2[a, b]$ ši lygtis išsprendžiama. Lygties sprendinys $x(s) = f'(s)$ egzistuoja tik tada, kai $f' \in L_2[a, b]$ ir $f(a) = 0$.

Panaši situacija yra ir bendru atveju. Jei T – kompaktiškas Hilberto erdvės operatorius, tai (16.12) lygtis negali būti išsprendžiama su visais $a \in H$. Iš tikrųjų, jei tai būtų galima, tai T atvaizduotų visą H į visą H, t.y., $TH = H$. Bet $H = \cup_{n=1}^{\infty} S_n$, čia $S_n = \{x \in H : ||x|| \leq n\}$ ir TS_n – kompaktiška aibė. Tada $TH = \cup_{n=1}^{\infty} TS_n$. Tačiau kompaktiška Hilberto erdvės aibė yra niekur netiršta. Iš tikrųjų, aibė yra niekur netiršta, jei jos uždarinio vidus yra tuščias, tai yra, uždarinys neturi jokios netuščios atviros aibės. Jei begalinio matavimo erdvės kompaktiškoje aibėje būtų atvira netuščia aibė, tai joje visuomet surastumėme seką, neturinčią jokio konverguojančio posekio. Todėl gavome prieštaravimą, nes pilna metrinė erdvė užrašoma kaip skaiti sąjunga niekur netirštų aibių. Todėl $TH \neq H$. ■

Dar viena pirmos rūšies Fredholmo lygčių ypatybė yra taip vadinamas sprendinių nestabilumas. Žinome, kad begalinio matavimo normuotos erdvės kompaktiško operatoriaus atvirkštinis operatorius yra neaprėžtas (žr. 9 skyrių). Todėl net jei elementai $f_1, f_2 \in H$ yra tokie, kad lygtys $Tx = f_i,\ i = 1, 2$ yra išsprendžiamos ir sprendiniai užrašomi $x_i = T^{-1} f_i,\ i = 1, 2$, tai f_1 ir f_2 gali būti artimi, t.y., elementų skirtumo norma maža, tačiau to negalime pasakyti apie x_1 ir x_2. Tai reiškia, kad nedaug pakeitę lygties (16.12) dešinę pusę, galime gauti smarkiai pakitusį sprendinį. Ką tik nagrinėtas lygties (16.13) pavyzdys lengvai demonstruoja šį efektą: nesunku sukonstruoti dvi artimas ($L_2[a, b]$ prasme) funkcijas, kurių išvestinės $L_2[a, b]$ metrikoje skirtųsi smarkiai.

16.4 Fredholmo lygčių sprendimas

Šiame skyrelyje trumpai panagrinėsime kaip sprendžiamos Hilberto erdvės Fredholmo lygtys. Verta pastebėti, kad dauguma teiginių galioja ir bendroms Banacho erdvėms.

Pradėsime nuo paprasčiausio atvejo: erdvės $L_2[a, b]$ ir išsigimusių branduolių. Nagrinėkime lygtį

$$x(s) = f(s) + \int_a^b k(s, t) x(t) dt, \quad a \le s \le b, \tag{16.14}$$

su branduoliu k, tenkinančiu sąlygą

$$k(s, t) = \sum_{i=1}^{n} P_i(s) Q_i(t), \tag{16.15}$$

čia P_i ir $Q_i,\ i = 1, \ldots, n$ ir (16.14) lygtyje esanti $f-$ fiksuotos funkcijos, priklausančios erdvei $L_2[a, b]$. Sprendinio ieškom taip pat erdvėje $L_2[a, b]$. Nesiaurindami bendrumo galime laikyti, kad funkcijos $P_i,\ i = 1, \ldots, n$ yra tiesiškai nepriklausomos (jei taip nebūtų, išreikštume kiekvieną P_i kaip tiesinę kombinaciją iš nepriklausomų funkcijų ir tokiu būdu gautumėme branduolio k išraišką $k(s, t) = \sum_{i=1}^{\tilde{n}} \tilde{P}_j \tilde{Q}_j$ su $\tilde{n} < n$ ir tiesiškai nepriklausomomis funkcijomis $\tilde{P}_j$). Įstatę (16.15) į (16.14) lygtį ir pažymėję

$$\int_a^b Q_i(t) x(t) dt = q_i,$$

gauname lygtį

$$x(s) = f(s) + \sum_{i=1}^{n} q_i P_i(s). \tag{16.16}$$

Šią funkcijos x išraišką įstatę į (16.14) lygtį ir pažymėję

$$\int_a^b Q_i(t)P_j(t)dt = a_{i,j}, \quad \int_a^b Q_i(t)f(t)dt = b_i,$$

gausime lygybę

$$\sum_{i=1}^{n} q_i P_i(s) = \sum_{i=1}^{n} P_i(s)\big(\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}q_j + b_i\big), \ s \in [a, b].$$

Prisiminę, kad funkcijos $P_1, \dots P_n$ yra tiesiškai nepriklausomos, sulyginame koeficientus prie funkcijų P_i ir gauname lygčių sistemą

$$q_i = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}q_j + b_i, \ i = 1, \dots, n$$

kurioje nežinomaisiais ura $q_1, \dots, q_n$. Tai yra tiesinių algebrinių lygčių sistema, Išsprendę šią sistemą rasime koeficientus q_i , o juos turėdami, gausime (16.14) lygties sprendinį, užrašytą (16.16) formule.

Matome, kad integralinių lygčių su išsigimusiais branduoliais sprendimas susivedė į algebrinių tiesinių lygčių sistemos, kurią matriciniu pavidalu galima užrašyti

$$Aq = b,$$

sprendimą (čia $A = \{\delta_{i,j} - a_{i,j}\}, \ b = (b_1, \dots, b_n), \ q = (q_1, \dots, q_n)$ ir $\delta_{i,j}$ – Kronekerio simbolis). Iš algebros kurso gerai žinomi teiginiai apie tokių lygčių sistemos sprendimą yra ne kas kita, kaip Fredholmo alternatyvos teiginiai, formuluojami įvedant ir homogeninę lygčių sistemą $A^*q = 0$ bei naudojant matricos A determinanto ir rango savokas. Jų čia nekartosime, tikėdami kad skaitytojas nepamiršo garsiųjų Kronekerio- Kapeli teoremų iš algebros kurso (žr. ...).

Dabar grįšime prie bendrų abstrakčios Hilberto erdvės H Fredholmo lygčių ir nagrinėsime lygtį

$$x = \lambda Tx + a,$$

čia $T : H \to H$ – kompaktiškas operatorius, $a \in H$, o λ – skaitinis parametras. Parametro λ įvedimas svarbus nagrinėjant spektrinę teorija tolimesneme vadovėlio skyriuje. Šią lygtį galima perrašyti tokiu pavidalu

$$(I - \lambda T)x = a. \tag{16.17}$$

Jei parametras λ tenkina sąlygą $|\lambda| < ||T||^{-1}$, tai $(I - \lambda T)^{-1}$ egzistuoja ir yra aprėžtas, taigi gauname (16.17) lygties sprendinį

$$x = (I - \lambda T)^{-1} a.$$

Panaudoję ... skyriuje turėta išraiška

$$(I - \lambda T)^{-1} = I + \lambda T + \lambda^2 T^2 + \cdots + \lambda^n T^n + \ldots$$

(šios eilutės konvergavimą garantuoja sąlyga $||\lambda T|| < 1$) sprendinį galime užrašyti

$$x = a + \lambda T a + \lambda^2 T^2 a + \cdots + \lambda^n T^n a + \ldots.$$

Jei $H = L_2[a, b]$ ir T – integralinis operatorius, nusakomas branduoliu $k(s, t)$, tenkinančiu sąlygą

$$||k||^2 = \int_a^b \int_a^b k(s,t)^2 ds dt < \infty, \tag{16.18}$$

tai turime lygtį (16.14). Matematinės indukcijos metodu nesunku įsitikinti, kad ir T^n bus integralinis operatorius, nusakomas branduoliu k_n , apibrėžiamu rekurentine formule

$$k_n(s,t) = \int_a^b k_{n-1}(s,u) k(u,t) du, \ n = 2, 3, \ldots, \ k_1(s,t) = k(s,t).$$

Lengvai galima patikrinti, kad galioja nelygybė $||k_n|| \le ||k||^n$, todėl jei $|\lambda| < ||k||^{-1}$, tai eilutė

$$\lambda k(s,t) + \lambda^2 k_2(s,t) + \cdots + \lambda^n k_n(s,t) + \ldots$$

konverguoja erdvėje $L_2[a, b]$. Jos sumą pažymėję $\Gamma(s, t, \lambda)$ matome, kad

$$(I - \lambda T)^{-1} = I + \Gamma_\lambda.$$

Čia Γ_λ yra integralinis operatorius, apibrėžiamas formule

$$\Gamma_\lambda x(s) = \int_a^b \Gamma(s,t,\lambda) x(t) dt.$$

Taigi, jei $|\lambda| < ||k||^{-1}$, tai (16.14) lygties sprendinys užrašomas formule

$$x(s) = f(s) + \int_a^b \Gamma(s,t,\lambda) f(t) dt.$$

Tačiau klausimas apie lygties sprendimą kai $|\lambda| > ||k||^{-1}$ lieka atviras.

Fredholmo alternatyva tvirtina, kad su kiekvienu λ galimi tik du atvejai

1) arba (16.17) lygtis turi vienintelį sprendinį su kiekvienu $a \in H$;

2) arba homogeninė lygtis $(I - \lambda T)x = 0$ turi nenulinį sprendinį .

Antruoju atveju gauname, kad egzistuoja toks elementas $x \neq 0$, kad $x = \lambda Tx$, arba $Tx = \frac{1}{\lambda}x$. Kitame skyriuje ... bus apibrėžtos operatoriaus spektro ir tikrinės reikšmės sąvokos. Pastaroji lygybė reiškia, kad $\frac{1}{\lambda}$ yra tikrinė operatoriaus T reikšmė. Lengva matyti, kad pirmuoju atveju operatorius $(I - \lambda T)^{-1} = \lambda^{-1}(\lambda^{-1}I - T)^{-1}$ egzistuoja ir yra aprėžtas, t. y., λ^{-1} nepriklauso spektrui. Jau minėtame skyriuje bus parodyta, kad kompaktiško operatoriaus spektras susideda tik iš tikrinių reikšmių, jų gali būti baigtinis skaičius arba skaiti seka su vieninteliu ribiniu tašku nulyje. Todėl turime kad (16.17) lygtis turi sprendinį su visomis λ reikšmėmis, išskyrus skaičią aibę reikšmių, kai $\frac{1}{\lambda}$ priklauso spektrui.

Fredholmas, pareikalavęs kad branduolys $k(s,t)$ būtų tolydi funkcija, parodė, kad jei $\frac{1}{\lambda}$ nėra tikrinė operatoriaus T reikšmė, tai (16.14) lygties sprendinys užrašomas

$$x(t) = f(t) + \int_a^b \frac{D(s,t,\lambda)}{D(\lambda)} ds, \tag{16.19}$$

čia $D(s,t,\lambda)$ ir $D(\lambda)$ – funkcijos, užrašomos begalinių eilučių pagalba. Eilučių nariai yra didėjančio kartotinumo integralai, pointegrinės funkcijos yra didėjančios eilės determinantai, išreikšti per branduolio funkciją $k(s,t)$. Dėl šių funkcijų sudėtingumo nepateikiame jų išraiškų. Pastebėsime, kad Karlemanas 1921 m parodė, kad Fredholmo formulė (16.19) galioja ir bendru atveju, kai branduolys tenkina tik (16.18). Skaitytojui, norinčiam susipažinti su šių teiginių įrodymais, galime rekomenduoti monografijas [], [], skirtas integralinių lygčių teorijai.