

Funkcinės analizės egzaminas

(2007 m. sausio 17 d., pradžia 16 val., pabaiga 17 val. 30 min.)

Vardas, pavardė

Studijų programa, grupė

Parašykite, koku pažymiu įsivertintumėte savo funkcinės analizės žinias

SĖKMĖS!

• • •

Atlikite šias trumpas užduotis. (Kiekvienas teisingas atsakymas - 1 taškas.)

1. Tolydinių funkcijų aibėje $C[0, 1]$ apibrėžkite bent dvi skirtingas atstumo funkcijas.

2. Apibrėžkite metrinę erdvę $L_4[1, 2]$.

3. Tegū $B_r(x_0)$ - uždarusis metrinės erdvės X rutulys. Koks jo atžvilgiu yra elementas $y \in X$, tenkinantis sąlygą: $d(x_0, y) > r$?

4. ε -kalba perrašykite teiginį „ $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ metrinėje erdvėje (X, d) “.

2

5. Ko dar, be aibės $A \subset C[a, b]$ aprėžtumo reikia, kad aibė A būtų reliatyviai kompaktinė?

6. Ar tiesinės erdvės E intervalas $[0, y)$, $y \in E$ yra absorbuojanti aibė? Atsakymą pagrįskite.

7. Tegu E yra tiesinė erdvė, $x, y \in E$. Užrašykite mažiausią tiesinę erdvės E aibę, kuriai priklauso taškai x ir y .

8. Paaiškinkite užrašą: $x \perp A$.

9. Ar homogeninis funkcionalas gali būti tiesiniu? Atsakymą paaiškinkite.

10. Kam lygi Hilberto erdvės H tiesinio funkcionalo $f(x) = \langle x, y \rangle$ norma?

Atlikite šias dvi teorines užduotis. (Kiekviena teisingai atlikta užduotis verinama 5 taškais.)

1. Įrodykite, kad pilnos metrinės erdvės kompaktinė aibė yra aprėžta.

2. Tegu L yra uždara tiesinė Hilberto erdvės H aibė ir $x \in H \setminus L$. Įrodykite, kad egzistuoja toks $y \in L$, kad $d(x, L) = \|x - y\|$.

Išspręskite šiuos du uždavinius. (Teisingas uždavinio sprendimas vertinamas 5 taškais.)

1. Apibrėžkite tiesinį funkcionalą $F : C[-1,1] \rightarrow R$ taip: $F(f) = \int_{-1}^1 f(t) \sin(\pi t) dt$, $f \in C[-1, 1]$. Įrodykite, kad funkcionalas F yra tolydus ir $\|F\| = 4/\pi$.

2. Tegū (x_n) ir (y_n) yra metrinės erdvės (X, d) Koši sekos. Išstirkite sekos $(d(x_n, y_n))$ konvergavimą.