MATEMATINĖ EKONOMIKA

Koliokviumo 2006.11.06 klausimai

Rimas Norvaiša

E-paštas: norvaisa @ktl.mii.lt

Vilnius, 2006 lapkritis

1 bilietas

(A) Kas yra dalinė ir bendroji ekonominė pusiausvyros ir kuo jos skiriasi?

(B) Įrodyti, kad Cobbo–Douglaso alternatyvų laukas $(\mathbb{R}^2_+, \succeq_u)$ apibrėžtas funkcija

$$u(x) = x_1^{\epsilon} x_2^{1-\epsilon}, \quad x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_+, \quad 0 < \epsilon < 1,$$

yra tolydus, stipriai monotoninis ir lokaliai nepasotinamas.

2 bilietas

(A) Rasti optimalų išteklių paskirstymą Robinzono Kruzo ekonomikoje decentralizuotu b$\overline{\text{u}}$du.

(B) Įrodyti, kad alternatyvų laukas $(\mathbb{R}^2_+, \succeq_L)$ su abėcėline preferencija yra griežtai iškilas.

3 bilietas

(A) Kuo skiriasi centralizuotas ir decentralizuotas išteklių paskirstymai Robinzono Kruzo ekonomikoje?

(B) Tarkime, kad alternatyvų aibės X preferencijos sąryšis $\succeq$ yra pilnas. Įrodyti, kad indiferentiškumo sąryšis $\sim$ yra refleksyvus ir simetrinis.

4 bilietas

(A) Kas yra pusiausvyrinė kaina ir koks jos vaidmuo Robinzono Kruzo ekonomikos išteklių paskirstyme?

(B) Sakykime, kad alternatyvų laukas $(X, \succeq)$ yra išreiškiamas naudingumo funkcija $u\colon\ X \to \mathbb{R}$. Tada $(X, \succeq)$ yra iškilas tada ir tik tada, kai u yra kvazi-įgaubta.

5 bilietas

(A) Suformuluoti Arrow–Debreu bendrosios ekonominės pusiausvyros teoriją (2.2 skyrelis).

(B) Parodyti, kad tobulųjų pakaitalų alternatyvų laukas $(\mathbb{R}^2_+, \succeq)$ yra tolydus ir stipriai monotoninis.

6 bilietas

(A) Kas sudaro Arrow–Debreu bendrosios ekonominės pusiausvyros egzistavimo problemą?

(B) Tegul X yra aibė, o $u\colon X \to \mathbb{R}$ yra funkcija. Su bet kuriais $x, y \in X$, sakysime, kad $x \succeq_u y$ jei $u(x) \geq u(y)$. Įrodyti, kad $(X, \succeq_u)$ yra alternatyvų laukas.

7 bilietas

(A) Tarkime, kad $(X, \succeq)$ yra alternatyvų laukas ir alternatyvoms $x, y, z \in X$ galioja preferencijos $x \succeq y$ ir $y \succeq z$. Įrodyti, kad griežta preferencija $x \succ z$ galioja jei galioja bent viena iš griežtų preferencijų $x \succ y$ arba $y \succ z$.

(B) Tegul $X \subset \mathbb{R}^n$ yra iškila aibė, $f\colon X \to \mathbb{R}$ yra įgaubta funkcija ir $c \in \mathbb{R}$. Tada aibė $S := \{x \in X\colon f(x) \geq c\}$ yra iškila.

8 bilietas

(A) Sakykime, kad $\succeq$ yra alternatyvų aibės X pilnas preferencijos sąryšis, pasirinkimo aibė $C(B) = \{x \in B\colon (\forall z \in B)[x \succeq z]\}$, $B \subset X$, ir $x, y \in X$. Įrodyti, kad griežta preferencija $x \succ y$ galioja tada ir tik tada, kai pasirinkimo aibė $C(\{x, y\}) = \{x\}$;

(B) Tegul $X \subset \mathbb{R}^n$ yra iškila aibė, $f_j\colon X \to \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, m$, yra įgaubtos funkcijos ir $f := \sum_{i=1}^n \alpha_i f_i$, $\alpha_i \geq 0$. Įrodyti, kad f yra įgaubta funkcija.

9 bilietas

(A) Sakykime, kad $(X, \succeq)$ yra tolydus alternatyvų laukas, $B \subset X$ yra kompakti aibė ir $C(B) = \{x \in B\colon (\forall z \in B)[x \succeq z]\}$ yra pasirinkimo aibė. Įrodyti, kad $C(B)$ yra netuščia ir kompakti.

(B) Parodyti, kad tobulųjų pakaitalų alternatyvų laukas $(\mathbb{R}^2_+, \succeq)$ yra iškilas bet ne griežtai iškilas.

10 bilietas

(A) Sakykime, kad $\succeq_L$ yra alternatyvų aibės $\mathbb{R}^2$ abėcėlinė preferencija. Įrodyti, kad neegzistuoja tokia funkcija $u\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, kad $\succeq_u = \succeq_L$, t.y. abėcėlinė preferencija nėra išreiškiama naudingumo funkcija.

(B) Tegul $X \subset \mathbb{R}^n$ yra iškila aibė. Įrodyti, kad funkcija $f\colon X \to \mathbb{R}$ yra įgaubta tada ir tik tada, kai aibė $\{(x, \alpha) \in X \times \mathbb{R}\colon f(x) \geq \alpha\}$ yra iškila.

11 bilietas

(A) Sakykime, kad alternatyvų aibė X yra baigtinė. Įrodyti, kad alternatyvų laukas $(X, \succeq)$ yra išreiškiamas naudingumo funkcija.

(B) Tarkime, kad aibė $X \subset \mathbb{R}^\ell$ yra iškila, o pora $(X, \succeq)$ yra alternatyvų laukas. Įrodyti, kad $(X, \succeq)$ yra griežtai iškilas t.t.t. kai su bet kuriais $u, v, y \in X$, jei $u \succeq y$, $v \succeq y$ ir $u \neq v$, tai iškila kombinacija $\lambda u + (1 - \lambda)v \succ y$ su kiekvienu $\lambda \in (0, 1)$.

12 bilietas

(A) Sakykime, kad $u, v\colon\ X \mapsto \mathbb{R}$ yra funkcijos ir u yra alternatyvų lauko $(X, \succeq)$ naudingumo funkcija. Įrodyti, kad v yra to paties lauko $(X, \succeq)$ naudingumo funkcija tada ir tik tada, kai egzistuoja tokia didėjanti funkcija $\phi\colon\ u(X) \mapsto \mathbb{R}$, kad $v = \phi \circ u$.

(B) Jei alternatyvų aibės X preferencija $\succeq$ yra tranzityvi, tai tranzityv$\bar{\text{u}}$s yra griežta preferencija $\succ$ ir indiferentiškumas $\sim$.

13 bilietas

(A) Sakykime, kad alternatyvų aibė $X \subset \mathbb{R}^\ell$ yra iškila, o $(X, \succeq)$ yra alternatyvų laukas. Įrodyti, kad $(a) \Rightarrow (b) \Rightarrow (c)$, čia

- (a) $(X, \succeq)$ yra iškilas;
- (b) su bet kuriais $x, y \in X$, jei $y \succeq x$, tai $\lambda y + (1 - \lambda)x \succeq x$ su kiekvienu $\lambda \in [0, 1]$;
- (c) aibė $\{z \in X\colon\ z \succ x\}$ yra iškila su visais $x \in X$.

(B) Tarkime, kad alternatyvų aibės X preferencija $\succeq$ yra pilna. Įrodyti, kad bet kuriems $x, y \in X$, griežta preferencija $x \succ y$ galioja tada ir tik tada, kai $\neg[y \succeq x]$.

14 bilietas

(A) Sakykime, kad alternatyvų aibė $X \subset \mathbb{R}^\ell$ yra iškila, o $(X, \succeq)$ yra alternatyvų laukas. Įrodyti, kad $(c) \Rightarrow (a)$, čia

- (a) $(X, \succeq)$ yra iškilas;
- (c) aibė $\{z \in X\colon\ z \succ x\}$ yra iškila su visais $x \in X$.

(B) Tarkime, kad aibės X preferencija $\succeq$ yra pilna. Įrodyti, kad bet kuriems $x, y \in X$, preferencija $x \succeq y$ galioja tada ir tik tada, kai arba $x \succ y$ arba $x \sim y$.

15 bilietas

(A) Sakykime, kad alternatyvų laukas $(\mathbb{R}_+^\ell, \succeq)$ yra tolydus ir stipriai monotoninis, o $e := (1, \ldots, 1) \in \mathbb{R}_+^\ell$ yra vienetinis vektorius. Įrodyti, kad sąryšis

$$u_\succeq(x) := \sup\big\{r \geq 0\colon\ x \succeq re\big\}, \quad x \in \mathbb{R}_+^\ell,$$

čia tuščios aibės supremumas yra $-\infty$, korektiškai apibrėžia funkciją $u_\succeq\colon\ \mathbb{R}_+^\ell \to \mathbb{R}_+$ ir ji yra alternatyvų lauko $(R_+^\ell, \succeq)$ naudingumo funkcija.

(B) Tegul $X \subset \mathbb{R}^n$ yra iškila aibė. Jei f_i, $i = 1, \ldots, k$, yra įgaubtos aibėje X, tai $f := \min_i f_i$ taip pat įgaubta aibėje X.

16 bilietas

(A) Sakykime, kad alternatyvų laukas $(\mathbb{R}_+^\ell, \succeq)$ yra tolydus ir stipriai monotoninis, o $e := (1, \ldots, 1) \in \mathbb{R}_+^\ell$ yra vienetinis vektorius. Įrodyti, kad alternatyvų lauko $(R_+^\ell, \succeq)$ naudingumo funkcija $u_\succeq\colon\ \mathbb{R}_+^\ell \to \mathbb{R}_+$, apibrėžta sąryšiu

$$u_\succeq(x) := \sup\big\{r \geq 0\colon\ x \succeq re\big\}, \qquad x \in \mathbb{R}_+^\ell$$

yra tolydi.

(B) Tarkime, kad alternatyvų aibės X preferencija $\succeq$ yra pilna. Įrodyti, kad bet kuriems $x, y \in X$, arba $x \succeq y$ arba $y \succ x$.

17 bilietas

(A) Sakykime, kad $(\mathcal{B}, C(\cdot))$ yra alternatyvų aibės X normalioji pasirinkimo struktūra, kuri apibrėžia du atskleistuosius preferencijos sąryšius: su visais $x, y \in X$,

$$[x \succeq^* y] \quad \Leftrightarrow \quad (\exists\, B \in \mathcal{B})[x \succeq_B^* y] \qquad \text{ir}$$

$$x \succeq_2^* y \quad \Longleftrightarrow \quad B := \{x, y\} \in \mathcal{B} \quad \text{ir} \quad x \succeq_B^* y.$$

Įrodyti: jei aibės X pavienės ir porinės alternatyvos priklauso klasei $\mathcal{B}$, tai atskleistieji preferencijos sąryšiai $\succeq^*$ ir $\succeq_2^*$ sutampa.

(B) Euklidinėje erdvėje $\mathbb{R}^2$ preferencijos sąryšis $\succeq_L$ vadinamas abėcėliniu jei su bet kuriais $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$, $x \succeq_L y$ tada ir tik tada, kai galioja viena iš dviejų sąlygų: (1) $x_1 > y_1$; arba (2) $x_1 = y_1$ ir $x_2 \geq y_2$. Įrodyti, kad abėcėlinė preferencija $\succeq_L$ yra racionali.

18 bilietas

(A) Sakykime, kad $(\mathcal{B}, C(\cdot))$ yra alternatyvų aibės X normalioji pasirinkimo struktūra. Įrodyti, kad $C(C(B)) = C(B)$ su kiekviena $B \in \mathcal{B}$.

(B) Įrodyti, kad alternatyvų lauko $(X, \succeq)$ baigtinėje alternatyvų aibėje $\{x_1, \ldots, x_p\}$ egzistuoja optimali alternatyva, t. y. pasirinkimo aibė $C(\{x_1, \ldots, x_p\})$ yra netuščia.

19 bilietas

(A) Sakykime, kad $\mathcal{B}$ yra tokia alternatyvų aibės X poaibių klasė, kuriai priklauso visos vieno, dviejų ir trijų elementų aibės ir $(\mathcal{B}, C(\cdot))$ yra pasirinkimo struktūra. Jei atskleistasis preferencijos sąryšis $\succeq^*$ yra racionalus ir pasirinkimas $C(\cdot)$ yra normalus, tai pasirinkimo struktūrai $(\mathcal{B}, C(\cdot))$ galioja SAPA.

(B) Įrodyti, kad funkcija $u\colon X \mapsto \mathbb{R}$ yra alternatyvų lauko $(X, \succeq)$ naudingumo funkcija t.t.t. kai išpildyta (a) ir (b), čia

- (a) su visais $x, y \in X$, $y \succ x$ tada ir tik tada, kai $u(y) > u(x)$;
- (b) su visais $x, y \in X$, $y \sim x$ tada ir tik tada, kai $u(y) = u(x)$.

20 bilietas

(A) Sakykime, kad $\mathcal{B}$ yra tokia alternatyvų aibės X poaibių klasė, kuriai priklauso visos vieno, dviejų ir trijų elementų aibės. Jei pasirinkimo struktūrai $(\mathcal{B}, C(\cdot))$ galioja SAPA, tai šios pasirinkimo struktūros atskleistasis preferencijos sąryšis $\succeq^*$ yra racionalus ir pasirinkimas $C(\cdot)$ yra normalus.

(B) Įrodyti, kad funkcija $u\colon X \mapsto \mathbb{R}$ yra alternatyvų lauko $(X, \succeq)$ naudingumo funkcija t.t.t. kai išpildyta (a) ir (b), čia

- (a) su visais $x, y \in X$, jei $y \succeq x$ tai $u(y) \geq u(x)$;
- (b) su visais $x, y \in X$, jei $y \succ x$ tai $u(y) > u(x)$.

21 bilietas

(A) Alternatyvų aibėje X apibrėšime funkciją $u\colon X \to \mathbb{R}$ atitinkantį preferencijos sąryšį $\succeq_u$: su bet kuriais $x, y \in X$ sakysime, kad $x \succeq_u y$ tada ir tik tada, kai $u(x) \geq u(y)$. Įrodyti, kad pora $(X, \succeq_u)$ yra alternatyvų laukas.

(B) Tegul $u\colon X \to \mathbb{R}$ yra X aibės naudingumo funkcija. Įrodyti, kad su bet kuriais $x, y \in X$ (1) $x \succ_u y$ t.t.t. $u(x) > u(y)$; ir (2) $x \sim_u y$ t.t.t $u(x) = u(y)$.

22 bilietas

(A) Tarkime, kad $(X, \succeq)$ yra alternatyvų laukas. Įrodyti, kad $(c) \Rightarrow (b) \Rightarrow (a)$, čia

(a) preferencija $\succeq$ yra tolydi;

(b) aibė $\{(x, y) \in X \times X\colon\ x \succeq y\}$ yra uždara Dekarto sandaugoje $X \times X$;

(c) su bet kuriais $x, y \in X$, jei $x \succ y$, tai egzistuoja tokia x-o aplinka U_x ir y-o aplinka U_y, kad $u \succ v$ su visais $u \in U_x$ ir $v \in U_y$.

(B) Parodyti, kad tobulųjų papildinių alternatyvų laukas $(\mathbb{R}^2_+, \succeq)$ yra tolydus, silpnai monotoninis bet ne stipriai monotoninis.

23 bilietas

(A) Tarkime, kad $(X, \succeq)$ yra alternatyvų laukas. Įrodyti, kad $(a) \Rightarrow (c)$, čia

(a) preferencija $\succeq$ yra tolydi;

(c) su bet kuriais $x, y \in X$, jei $x \succ y$, tai egzistuoja tokia x-o aplinka U_x ir y-o aplinka U_y, kad $u \succ v$ su visais $u \in U_x$ ir $v \in U_y$.

(B) Tegul $u(x) := \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}$, $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_+$. Įrodyti, kad alternatyvų laukas $(\mathbb{R}^2_+, \succeq_u)$ yra griežtai iškilas.

24 bilietas

(A) Sakykime, kad X yra baigtinė alternatyvų aibė. Tada alternatyvų laukas $(X, \succeq)$ yra išreiškiamas naudingumo funkcija.

(B) Tarkime, kad Robinzono kokoso riešutų rinkimo gamybos funkcija yra $f(d) = 12\sqrt{a + d}$, $a \geq 0$, ir jo naudingumo funkcija yra $u(l, k) = 18 \ln k + l$. Rasti Robinzono Kruzo ekonomikos pusiausvyrą.