8 paskaita

8.1 Banacho erdvės su Šauderio baze

8.1.1 Banacho erdvės elementų eilutės

Normotos erdvės elementų eilutė apibrėžiama analogiškai kaip ir realiųjų skaičių eilutė.

8.1 apibrėžimas. *Normuotosios erdvės $\mathbb{E}$ elementų $(x_n, n \in \mathbb{N})$ eilute vadinamas simbolinis reiškinys*

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n + \cdots .$$

Trumpiau eilutė žymima simboliu $\sum_n x_n$. Būtina atkreipti dėmesį, kad eilutė nėra elementų suma įprastine prasme, nes tiesinėje erdvėje apibrėžta tik baigtinio skaičiaus elementų suma. Eilutės $\sum_n x_n$ pirmųjų n elementų suma $s_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ vadinama jos n-ąja daline suma. Eilučių teorijoje svarbiausia yra dalinių sumų seka $(s_n, n \in \mathbb{N})$.

8.2 apibrėžimas. *Tarkime, $\sum_n x_n$ – erdvės $\mathbb{E}$ elementų eilutė, (s_n) – jos dalinių sumų seka. Eilutė $\sum_n x_n$ vadinama konverguojančiąja, jei seka (s_n) konverguoja. Riba $s = \lim_{n\to\infty} s_n$ vadinama eilutės $\sum_n x_n$ suma ir žymima $s = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$.*

8.3 apibrėžimas. *Konverguojančios eilutės $\sum_n x_n$ liekana vadinamas elementas $r_n = s - s_n$.*

Kitaip tariant, eilutės $\sum_n x_n$ liekana, tai eilutės $x_{n+1} + x_{n+2} + \ldots$ suma.

Dažnai eilutė $\sum_n x_n$ užrašoma tuo pačiu simboliu kaip ir jos suma – $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$. Šioje knygoje, kiek įmanoma, vengsime tokio sutapatinimo.

Akivaizdu, kad erdvės $\mathbb{R}$ atveju, pateiktasis eilutės ir jos sumos apibrėžimas sutampa su analogiškais skaičių eilutės apibrėžimais (žr. [?]). Tačiau tik nedaugelį teoremų apie skaičių eilutes galima apibendrinti normuotųjų erdvių elementų eilutėms. Keletą svarbesnių įrodysime.

8.1 teiginys. *Banacho erdvės $\mathbb{E}$ elementų eilutė $\sum_n x_n$ konverguoja tada ir tik tada, kai kiekvieną $\varepsilon > 0$ atitinka toks $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$, kad*

$$||x_{n+1} + x_{n+2} + \cdots x_{n+k}|| < \varepsilon, \quad \textit{kai} \;\; n \geq N_\varepsilon, \quad \textit{o} \;\; k \in \mathbb{N}.$$

Įrodymas. Kadangi

$$s_{n+k} - s_n = x_{n+1} + x_{n+2} + \cdots x_{n+k},$$

matome, kad teiginio sąlyga reiškia jog (s_n) – Koši seka. Lieka prisiminti 8.2 apibrėžimą. ∎

8.4 apibrėžimas. *Eilutė $\sum_n x_n$ vadinama absoliučiai konverguojančia, jei konverguoja skaičių eilutė $\sum_n ||x_n||$.*

8.1 teorema. *Sakykime, $\mathbb{E}$ – Banacho erdvė. Jei eilutė $\sum_n x_n$ konverguoja absoliučiai, tai eilutė $\sum_n x_n$ konverguoja ir, be to,*

$$\Big\|\sum_{n=1}^{\infty} x_n\Big\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} ||x_n||.$$

Įrodymas. Turime, kad skaičių eilutė $\sum_{n=1}^{\infty} ||x_n||$ konverguoja. Remiantis skaičių eilutės konvergavimo Koši kriterijumi, kiekvieną $\varepsilon > 0$ atitinka toks $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$, kad

$$||x_{n+1}|| + ||x_{n+2}|| + \cdots + ||x_{n+k}|| < \varepsilon,$$

kai $n \geq N_\varepsilon, k \in \mathbb{N}$. Pritaikę k kartų trikampio nelygybę, gauname

$$||x_{n+1} + x_{n+2} + \cdots + x_{n+k}|| \leq ||x_{n+1}|| + ||x_{n+2}|| + \cdots + ||x_{n+k}|| < \varepsilon,$$

kai $n \geq N_\varepsilon, k \in \mathbb{N}$. Remiantis 8.1 teiginiu, eilutė $\sum_n x_n$ konverguoja. Pritaikę trikampio nelygybę ir pasinaudoję normos tolydumu, gauname

$$\Big\|\sum_{n=1}^{\infty} x_n\Big\| = \lim_{m\to\infty}\Big\|\sum_{n=1}^{m} x_n\Big\| \leq \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} ||x_n|| = \sum_{n=1}^{\infty} ||x_n||.$$

■

Ką tik įrodyta 8.1 teorema dažnai vadinama Vejerštraso vardu. Atvirkščias teiginys charakterizuoja normuotosios erdvės pilnumą.

8.2 teiginys. *Jeigu normuotoje erdvėje kiekviena absoliučiai konverguojanti eilutė konverguoja, tai tokia erdvė yra pilna.*

Įrodymas. Tarkime, (x_n) – normuotosios erdvės $\mathbb{E}$ Koši seka. Iš jos išskirsime konverguojantį posekį (x_{n_k}). Elementą x_{n_1} taip parinksime, kad $||x_{n_1} - x_m|| < 1/2$ su visais $m > n_1$. Kiekvienam $k \geq 2$ taip parinksime $x_{n_k} > x_{n_{k-1}}$, kad $||x_{n_k} - x_m|| < 1/2^k$ su visais $m > n_k$. Šitaip išrinkę posekį (x_{n_k}), turėsime

$$||x_{n_k} - x_{n_{k-1}}|| < 1/2^{k-1} \quad \text{su visais} \quad k \geq 2.$$

Eilutę $\sum_k z_k$ sudarykime imdami $z_1 = x_{n_1}$, $z_k = x_{n_k} - x_{n_{k-1}}$, kai $k \geq 2$. Ši eilutė konverguoja absoliučiai, nes atitinkama normų eilutė mažoruojama konverguojančia eilute $||x_{n_1}|| + \sum_k 2^{-k+1}$. Vadinasi, egzistuoja toks elementas $x \in \mathbb{E}$, kad $\lim_{n\to\infty} s_n = x$, kai (s_n) yra eilutės $\sum_k z_k$ dalinių sumų seka. Nesunku pastebėti, kad $s_k = x_{n_k}$. Įrodėme, kad Koši seka (x_n) turi konverguojantį posekį. To pakanka, kad pati seka konverguotų (žr. **??** teiginį). ■

Nesunku įsitikinti, kad jei konverguoja eilutės $\sum_n x_n$ ir $\sum_n y_n$ tai su visais $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ konverguoja ir eilutė $\sum_k(\alpha x_n + \beta y_n)$. Be to,

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha x_n + \beta y_n) = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} x_n + \beta \sum_{n=1}^{\infty} y_n.$$

8.1.2 Šauderio bazės apibrėžimas, savybės

Nagrinėkime Banacho erdvę $\mathbb{E}$. Jei $\dim(\mathbb{E}) = n$, tuomet egzistuoja tokie n tiesiškai nepriklausomi elementai, sakykime, $y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{E}$, kad kiekvieną $x \in \mathbb{E}$ vienareikšmiškai galime išreikšti

$$x = \sum_{k=1}^{n} a_k y_k. \tag{8.1}$$

Skaliarai $a_1, \ldots, a_n$, vadinami elemento x koordinatėmis, o $y_1, \ldots, y_n$ – erdvės $\mathbb{E}$ koordinačių sistema arba baze. Jos egzistavimas yra labai svarbi baigtinės dimensijos erdvių savybė. Jei $\dim(\mathbb{E}) = \infty$ situacija visai kitokia. Norint aprašyti begaliniamačių tiesinių normuotų erdvių elementus jau nebepakanka baigtinio skaičiaus skaliarų. Intuityviai aišku, kad begalinės dimensijos erdvėse reikia ieškoti fiksuotos elementų sekos, savotiškos „begalinės koordinačių sistemos“, kurios pagalba erdvės elementus galima būtų aprašyti skaliarų sekomis. O (8.1) išraiškoje esančią sumą turėtų pakeisti begalinės eilutės suma. Ta mintis veda prie Šauderiobazės sampratos.

8.5 apibrėžimas. *Tarkime,* $\dim \mathbb{E} = \infty$. *Seką* $(e_k) \subset \mathbb{E}$ *vadiname erdvės* $\mathbb{E}$ *Šauderio baze, jei kiekvieną* x *vienareikšmiai galime išreikšti konverguojančia eilute:*

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k;$$

čia $c_1, c_2, \ldots$ *yra skaliarai ir vadinami elemento* x *koordinatėmis bazėje* (e_k).

Taigi Banacho erdvių su Šauderio baze elementus pilnai aprašo jų koordinačių sekos. Kita labai svarbi išvada yra ta, kad kiekvieną Banacho erdvės su Šauderio baze elementą kaip norime tiksliai galime aprašyti baigtiniu skaičiumi skaliarų, t. y., kiekvieną $\varepsilon > 0$ atitinka toks natūralusis skaičius N_ε, kad

$$||x - \sum_{k=1}^{N_\varepsilon} c_k e_k|| < \varepsilon.$$

Taigi skaliarų rinkinys $c_1, \ldots, c_{N_\varepsilon}$ elementą x aprašo ε-tikslumu. Bloga naujiena yra ta, kad toli gražu ne visos Banacho erdvės turi Šauderio bazę. Tuom netrukus įsitikinsime. O tai, kad Šauderio bazę galime interpretuoti kaip erdvės koordinačių sistemą, patvirtina ne tik jos apibrėžimas bet ir šis teiginys.

8.3 teiginys. *Šauderio bazės elementai yra tiesiškai nepriklausomi.*

Įrodymas. Tikrai, jei (e_k) – erdvės $\mathbb{E}$ Šauderio bazė, tai

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k = 0$$

gali būti tada ir tik tada, kai $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$, nes

$$0 = \sum_{k=1}^{\infty} 0 \times e_k.$$

■

Erdvės ℓ_p, $p \geq 1$, seka $(\boldsymbol{e}_k)$ (priminsime, kad $\boldsymbol{e}_k = (\delta_{kj}), k \in \mathbb{N}$) yra Šauderio bazė. Tikrai, imdami $\boldsymbol{x} \in \ell_p$, $\boldsymbol{x} = (x_k)$, nagrinėkime eilutę

$$\sum_k x_k \boldsymbol{e}_k.$$

Jos dalinių sumų seka

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} x_k \boldsymbol{e}_k, \quad n \in \mathbb{N},$$

konverguoja prie x, nes

$$||\boldsymbol{x} - s_n|| = ||(x_{n+1}, x_{n+2}, \dots)|| = \Big(\sum_{k=n+1}^{\infty} |x_k|^p\Big)^{1/p} \to 0,$$

kai $n \to \infty$, kaip konverguojančios eilutės $\sum_k |x_k|^p$ liekana. Taigi

$$\boldsymbol{x} = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \boldsymbol{e}_k.$$

Šios išraiškos vienatis išplaukia iš elementų $(\boldsymbol{e}_k)$ tiesinio nepriklausomumo.

Seka $(\boldsymbol{e}_k)$ yra taip pat ir erdvės c_0 Šauderio bazė (įrodykite), tačiau nėra erdvės ℓ_∞ Šauderio bazė. Dar daugiau, erdvėje ℓ_∞ Šauderio bazė apskritai neegzistuoja. Taip yra todėl, kad erdvės ℓ_∞ yra nesaparabili (žr. **??** teoremą). Tuo tarpu erdvės su Šauderio baze yra separabilios.

8.2 teorema. *Banacho erdvė su Šauderio baze yra separabili.*

Įrodymas. Tarkime, $\mathbb{E}$ realioji Banacho erdvė, (e_k) – jos Šauderio bazė. Nagrinėkime aibę

$$A = \Big\{ \sum_{k=1}^{n} a_k e_k : \quad a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Q}, \quad n \in \mathbb{N} \Big\}.$$

Ji yra skaiti, nes ją galime išreikšti skaičių aibių

$$A_n = \Big\{ \sum_{k=1}^{n} a_k e_k : \quad a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Q} \Big\},$$

skaičia sąjunga: $A = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$. Įrodysime, kad $[A] = \mathbb{E}$. Tegu $x \in \mathbb{E}$ ir x_k, $k \in \mathbb{N}$, – jo koordinatės bazėje (e_k). Fiksuokime $\varepsilon > 0$. Taip parinkime N_ε, kad

$$\Big\| x - \sum_{k=1}^{N_\varepsilon} x_k e_k \Big\| < \varepsilon/2.$$

Pažymėkime $b = \sum_{k=1}^{N_\varepsilon} ||e_k||$. Kiekvienam x_k suraskime tokį racionalųjį skaičių r_k, kad

$$|x_k - r_k| < \varepsilon/(2b), \quad k = 1, \dots, N_\varepsilon.$$

Tuomet $\widehat{x} = \sum_{k=1}^{N_\varepsilon} r_k e_k \in A$ ir

$$\begin{aligned} ||x - \widehat{x}|| &= \Big\| x - \sum_{k=1}^{N_\varepsilon} x_k e_k \Big\| + \Big\| \sum_{k=1}^{N_\varepsilon} x_k e_k - \sum_{k=1}^{N_\varepsilon} r_k e_k \Big\| \\ &\le \varepsilon/2 + \sum_{k=1}^{N_\varepsilon} |x_k - r_k| \cdot ||e_k|| \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Vadinasi, aibė A yra skaiti ir visur tiršta. Taigi erdvė $\mathbb{E}$ – separabili. Analogiškai įrodome ir kompleksinės erdvės su Šauderio baze separabilumą. ∎

8.1.3 Haaro funkcijų sistema

Su kiekvienu $j \ge 1$, aibę D_j sudaro skaičiai $(2k-1)2^{-j}$; $1 \le k \le 2^{j-1}$. Taip

$$\mathrm{D}_1 = \Big\{ \frac{1}{2} \Big\}, \quad \mathrm{D}_2 = \Big\{ \frac{1}{4}, \frac{3}{4} \Big\}, \quad \mathrm{D}_3 = \Big\{ \frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{5}{8}, \frac{7}{8} \Big\}, \quad \text{it t.t.}$$

Pažymėkime taip pat $\mathrm{D}_0 = \{0, 1\}$ ir

$$\mathrm{D} = \bigcup_{j=0}^{\infty} \mathrm{D}_j, \qquad \mathrm{D}^* := \mathrm{D} \setminus \{0\}.$$

Aibės D elementai vadinami diadiniais skaičiais, o aibės D^* – tikriniais diadiniais skaičiais. Sakoma, kad diadinis skaičius $r \in \mathrm{D}$ yra j-ojo lygmens, jei $r \in \mathrm{D}_j$. Jei $r \in \mathrm{D}_j$, tai susitarsime žymėti

$$r^- := r - 2^{-j}, \quad r^+ := r + 2^{-j}.$$

Akivaizdu, kad

$$r^+, r^- \in \mathrm{D}_0 \cup \mathrm{D}_1 \cup \cdots \cup \mathrm{D}_{j-1}.$$

Intervalai $[r^-, r]$, $(r, r^+]$, vadinami j-tojo lygmens diadiniais intervalais. Pavyzdžiui, $[0, 1/2], (1/2, 1]$ yra pirmojo lygmens diadiniai intervalai; $[0, 1/4]$, $(1/4, 1/2]$, $[1/2, 3/4], (3/4, 1]$ – antrojo ir t.t. Toliau I_r žymės arba intervalą $[r^-, r]$, arba $(r, r^+]$. Visų tokių intervalų sąjunga yra

$$\bigcup_{r \in D_j} I_r = \bigcup_{r \in D_j} [r^-, r^+] = [0, 1].$$

Su kiekvienu $r \in \mathrm{D}^*$ apibrėžkime Haaro[1] funkcijas $\chi_r(t), t \in [0, 1]$, taip. Jei $r \neq 1$, tai

$$\chi_r(t) = \begin{cases} +1, & \text{kai } \ t \in [r^-, r] \\ -1, & \text{kai } \ t \in (r, r^+] \\ 0, & \text{už intervalo } \ [r^-, r^+]. \end{cases} \tag{8.2}$$

Kai $r = 1$, apibrėžkime $\chi_r(t) = 1$ su visais $t \in [0, 1]$. Funkcijų šeima

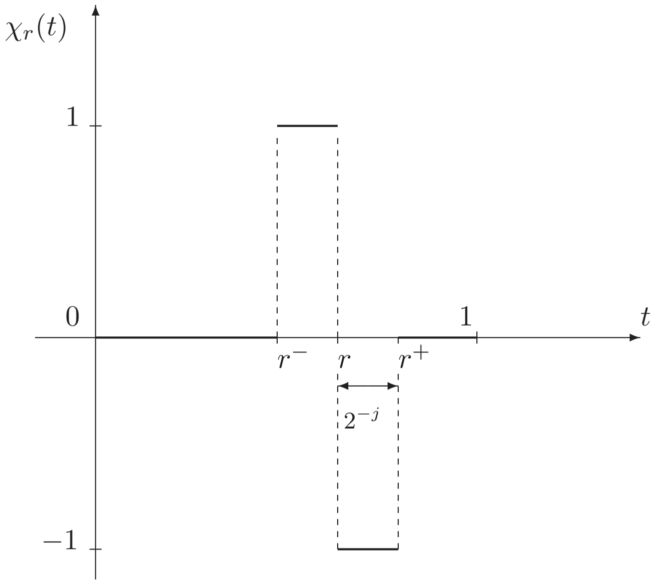
$$\{\chi_r, r \in \mathrm{D}^*\} \tag{8.3}$$

vadinama *Haaro sistema.*

Akivaizdu, kad Haaro sistemą galime perindeksuoti ir natūraliaisiais skaičiais, t.y. $\{\chi_r, r \in \mathrm{D}^*\} = \{\chi_n, n \in \mathbb{N}\}$. Nors tam yra daugybė būdų, dažniausiai naudojamas šis. Natūralųjį skaičių $n \geq 2$ išreiškiame $n = 2^j + k$, su kuriais nors $k = 1, \cdots, 2^j$, $j = 0, 1, \cdots$. Tada χ_n, kai $n = k + 2^j$, yra χ_r su $r = (2k-1)2^{-(j+1)}$, o χ_1 yra tiesiog χ_1.

8.3 teorema. *Haaro sistema yra kiekvienos iš erdvių $L_p(0, 1), p \geq 1$ Šauderio bazė.*

[1] Haar Alfréd, gimė 1885 m. spalio 11 d. Budapešte (Vengrija); mirė 1933 m. kovo 16 d. Segede (Vengrija).



10 brėžinys: Haaro funkcijos χ_r

Įrodymas. Funkcijos $f \in L_1(a,b)$ Haaro skleidiniu vadiname eilutę

$$c_1(f)\chi_1 + \sum_{j\geq 1} \sum_{r\in D_j} c_r(f)\chi_r,$$

čia $c_1(f) = \int_0^1 f(s)ds$,

$$c_r(f) = 2^{j-1}\int_0^1 f(s)\chi_r(s)ds, \quad \text{kai} \quad r \in D_j, j \geq 1.$$

Fiksuokime $p \geq 1$. Teoremos įrodymui pakanka įsitikinti, kad kiekvienai funkcijai $f \in L_p(0,1)$ jos Haaro skleidinys konverguoja į f. Tam nagrinėkime dalines sumas

$$s_J(f) = c_1(f)\chi_1 + \sum_{j=1}^{J} \sum_{r\in D_j} c_r(f)\chi_r, \quad J > 1.$$

Įrodysime, kad

$$\lim_{J\to\infty} ||s_J(f) - f|| = 0. \tag{8.4}$$

Galime nesunkiai įsitikinti, kad

$$s_J(f;t) = \frac{1}{m(I_r)}\int_{I_r} f(s)ds,$$

čia $I_r \subset [0,1]$ yra toks J lygmens diadinis intervalas, kuriam priklauso t, o m – Lebego matas. Tikrai, kai $J=1$,

$$s_1(f)(t) = c_1(f)\chi_1(t) + c_{1/2}(f)\chi_{1/2}(t) = \begin{cases} 2\int_0^{1/2} f(s)ds, & \text{kai } \ t \in (0,1/2]; \\ 2\int_{1/2}^{1} f(s)ds, & \text{kai } \ t \in (1/2,1]. \end{cases}$$

Toliau naudosime indukcijos metodą ir šią dalinių sumų savybę:

$$s_J(f) = s_{J-1}(f) + \sum_{r\in D_J} c_r(f)\chi_r.$$

Pirmiausia (8.4) įrodysime tolydžiajai funkcijai $f:[0,1]\to\mathbb{R}$. Tuo tikslu užrašykime

$$\begin{aligned} ||s_J(f) - f||^p &= \int_0^1 |s_J(f)(t) - f(t)|^p dt \\ &= \sum_{I_J} \int_{I_J} |s_J(f)(t) - f(t)|^p dt. \end{aligned} \tag{8.5}$$

Čia sumuojama pagal visus J-tojo lygmens diadinius inervalus. Jei $t \in I_J$, tai

$$\begin{aligned} |s_J(f)(t) - f(t)| =& \left|2^J \int_{I_J} f(s)ds - f(t)\right| = 2^J \left|\int_{I_J} (f(s) - f(t))ds\right| \\ \le& 2^J \int_{I_J} |f(s) - f(t)|ds \le \omega(f, 2^{-J}). \end{aligned}$$

Priminsime, kad $\omega(f;\delta)$ žymi funkcijos f tolydumo modulį (žr. (**??**)). Įstatę gautąjį įvertį į (8.5), išvedame

$$||s_J(f;\cdot) - f||^p \le \sum_{I_J} \int_{I_J} ds\omega^p(f;2^{-J}) = \omega^p(f,2^{-J}).$$

Taigi (8.4) teisinga, nes tolydžiajaii funkcijai uždarame intervale $\lim_{J\to\infty}\omega(f;2^{-J}) = 0$.

Toliau tegu $f \in L_p(0,1)$ bet kuri funkcija. Fiksuokime $\varepsilon > 0$. Pasinaudoję **??** teiginiu, parinkime tokią tolydžiąją funkciją $f_\varepsilon : [0,1] \to \mathbb{R}$, kad

$$||f - f_\varepsilon|| < \varepsilon/3.$$

Tuomet su visais $J \ge 1$,

$$\begin{aligned} ||f - s_J(f)|| &\le ||f - f_\varepsilon|| + ||f_\varepsilon - s_J(f_\varepsilon)|| + ||s_J(f) - s_J(f_\varepsilon)|| \\ &\le \varepsilon/2 + ||f_\varepsilon - s_J(f_\varepsilon)|| + ||s_J(f) - s_J(f_\varepsilon)|| \end{aligned} \tag{8.6}$$

Kadangi funkcija f_ε tolydi, tai, kaip tik ką įrodėme,

$$\lim_{J\to\infty} ||s_J(f_\varepsilon) - f_\varepsilon|| = 0. \tag{8.7}$$

Jei $t \in I_J$,

$$\begin{aligned}|s_J(f_\varepsilon)(t) - s_J(f)(t)| &= 2^J \Big| \int_{I_J} (f_\varepsilon(s) - f(s))ds \Big| \\ &\leq 2^{J/p} \Big(\int_{I_J} (|f_\varepsilon(s) - f(s)|^p ds \Big)^{1/p}.\end{aligned}$$

Čia pritaikėme Hiolderio nelygybę. Pasinaudoję gautu įverčiu, turime

$$\begin{aligned}||s_J(f) - s_J(f_\varepsilon)|| &= \Big(\sum_{I_J} \int_{I_J} |s_J(f_\varepsilon)(t) - s_J(f)(t)|^p dt \Big)^{1/p} \\ &\leq \Big(\sum_{I_J} \int_{I_J} |f_\varepsilon(s) - f(s)|^p ds \Big)^{1/p} \qquad (8.8) \\ &= ||f_\varepsilon - f|| < \varepsilon/2. \qquad (8.9)\end{aligned}$$

Surinkę (8.6) – (8.9) sąryšius gauname,

$$\lim_{J\to\infty} ||f - s_J(f)|| \leq \varepsilon.$$

Kadangi $\varepsilon > 0$ laisvai pasirinktas skaičius, tai gautoji nelygybė įrodo (8.4).
■

8.1.4 Feberio-Šauderio funkcijų sistema

Su kiekvienu $r \in \mathrm{D}_j$, $j \geq 1$, funkciją $\Lambda_r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ apibrėžkime taip:

$$\Lambda_r(t) = \begin{cases} 2^j(t - r^-) & \text{if } t \in (r^-, r]; \\ 2^j(r^+ - t) & \text{if } t \in (r, r^+]; \\ 0 & \text{kitur,} \end{cases}$$

$t \in \mathbb{R}$. Be to, apibrėžkime

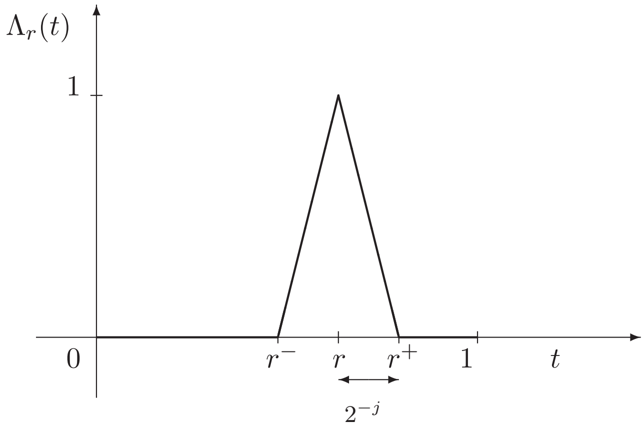
$$\Lambda_0(t) = 1, \quad \Lambda_1(t) = t, \quad t \in [0, 1].$$

Funkcijų šeima

$$\{\Lambda_r, r \in \mathrm{D}\}$$

vadinama *Feberio-Šauderio sistema*.

Kaip ir Haaro sistemą, Feberio-Šauderio funkcijų šeimą galime indeksuoti natūraliaisiais skaičiais. Tik šiuo atveju patogiau prie natūraliųjų skaičių prijungti ir nulį. Taip $\{\Lambda_r, r \in D\} = \{\Lambda_k, k = 0, 1, 2, \dots\}$.



11 brėžinys: Faberio -Šauderio funkcijos Λ_r

Funkcijos $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ Faberio-Šauderio eilute vadinama eilutė

$$\sum_{n\geq 0} \lambda_n(f)\Lambda_n(f) = \sum_{j\geq 0} \sum_{r\in D_j} \lambda_r(f)\Lambda_r, \tag{8.10}$$

kai

$$\lambda_0(f) = f(0), \quad \lambda_1(f) = f(1) - f(0), \tag{8.11}$$

$$\lambda_r(f) = f(r) - \frac{1}{2}[f(r^+) + f(r^-)], \quad r \in D_j, j \geq 1. \tag{8.12}$$

Nagrinėkime Faberio-Šauderio eilutės dalines sumas $(s_J(f), J \in \mathbb{N})$,

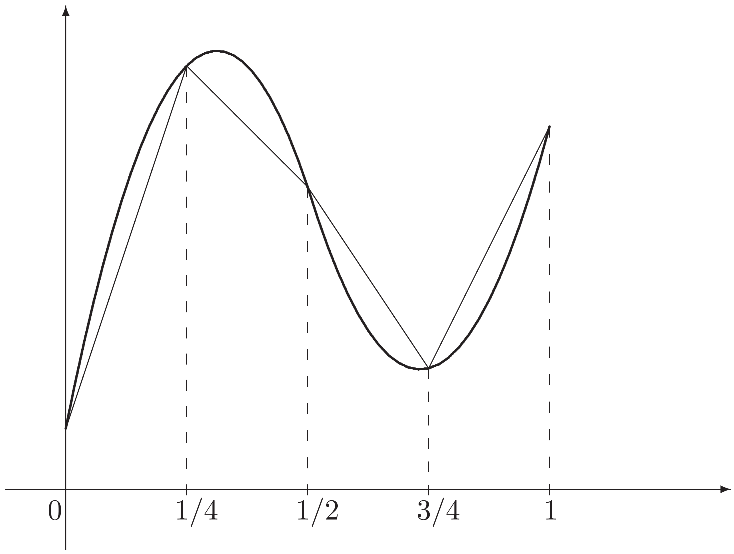
$$s_J(f) = \sum_{j=0}^{J} \sum_{r\in D_j} \lambda_r(f)\Lambda_r, \quad J \geq 1.$$

Nesunku įsitikinti, kad $s_J(f)(t), t \in [0, 1]$, yra laužtė, nubrėžta per taškus

$$(r, f(r)), \quad r \in D_0 \cup \dots \cup D_J$$

(žr. 12 brėžinį). Tikrai, kai $J = 1$, $\cup_{j=0}^{J} D_j = \{0, 1/2, 1\}$ ir

$$s_1(f)(t) = s_0(f)(t) + \sum_{r \in D_1} \lambda_r(f)\Lambda_r(t) = s_0(f)(t) + \lambda_{1/2}(f)\Lambda_{1/2}(t)$$
$$= \begin{cases} (1-2t)f(0) + 2tf(1/2), & \text{kai } \ t \in [0, 1/2] \\ 2(1-t)f(1/2) + (2t-1)f(1), & \text{kai } \ t \in (1/2, 1]. \end{cases}$$



12 brėžinys: funkcijos aproksimavimas Šauderio sumomis

Toliau pasinaudojame indukcija ir sąryšiu:

$$s_J(f) = s_{J-1}(f) + \sum_{r \in D_J} \lambda_r(f)\Lambda_r.$$

Funkcijai $f \in \mathcal{C}[0, 1]$ apibrėžkime

$$\omega^{(2)}(f; \delta) = \sup_{0 \le h \le \delta, h \le t \le 1-h} |f(t+h) + f(t-h) - 2f(t)|, \quad \delta > 0.$$

8.1 lema. *Jei $f \in \mathcal{C}[0, 1]$, tai*

$$\sup_{0 \le t \le 1} |f(t) - s_J(f; t)| \le \omega^{(2)}(f; 2^{-J}) \ \ \textit{su visais} \ \ J \ge 1.$$

Įrodymas. Nagrinėkime intervalą $(a,b) \subset (0,1)$ ir funkciją

$$\psi(t) = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(t-a), \quad t \in [0,1].$$

Pažymėkime

$$I = \max_{a \le t \le b} |f(t) - \psi(t)|.$$

Kadangi funkcija $u(t) = f(t) - \psi(t),\ t \in [0,1]$, yra tolydi ir $u(a) = u(b) = 0$, tai egzistuoja toks taškas $t_0 \in (a,b)$, kad

$$|u(t_0)| = \max_{a<t<b} |u(t)| = I.$$

Nemažindami bendrumo galime tarti, kad $h = t_0 - a \le b - t_0$. Tuomet $a = t_0 - h < t_0 < t_0 + h = b$ ir, kadangi $u(a) = 0$,

$$|u(t_0+h) + u(t_0-h) - 2u(t_0)| = |u(t_0+h) - 2u(t_0)| \ge I.$$

Kadangi ψ yra tiesinė funkcija, tai $|\psi(t_0+h)+\psi(t_0-h)-2\psi(t_0)| = 0$, todėl

$$\begin{aligned} I &\le |u(t_0+h) + u(t_0-h) - 2u(t_0)| \le |f(t_0+h) + f(t_0-h) - 2f(t_0)| \\ &\le \omega^{(2)}(f;(b-a)/2). \end{aligned}$$

Kadangi $s_J(f;t), t \in [0,1]$ yra laužtė, einanti per taškus $(r, f(r))$, $r \in \cup_{j=0}^{J} D_j$, lemos įrodymą užbaigiame panaudoję ką tik gautą nelygybę, kiekviename funkcijos $s_J(f;\cdot)$ tiesiškumo intervale. ∎

8.4 teorema. *Feberio-Šauderio funkcijų šeima yra erdvės $\mathcal{C}[0,1]$ Šauderio bazė.*

Įrodymas. Pakanka įrodyti, kad kiekvienos funkcijos $f \in \mathcal{C}[0,1]$ Feberio-Šauderio eilutė konverguoja prie f. Bet tai išplaukia iš 8.1 lemos, nes su kiekviena tolydžiaja funkcija $f : [0,1] \to \mathbb{R}$,

$$\lim_{\delta \to 0} \omega^{(2)}(f;\delta) \le \lim_{\delta \to 0} 2\omega(f;\delta) = 0.$$

∎