11 paskaita

11.1 Tiesiniai funkcionalai

Vienas iš pagrindinių funkcinės analizės tyrimo objektų yra funkcijos, apibrėžtos abstrakčiose erdvėse: metrinėse, tiesinėse normuotose ar kitose. Jų analizė reiškia tiek atskirų funkcijų savybių, tiek savybių, būdingų tam tikroms funkcijų klasėms, tyrimą. Tai svarbu įvairioms mokslų sritims, o abstrakti analizės forma leidžia apjungti į vieningą schemą iš pirmo žvilgsnio visiškai skirtingus uždavinius. Taip, pavyzdžiui, lygties

$$F(x) = a$$

nagrinėjimas, kai F yra abstraktaus argumento funkcija, o a duotas elementas iš tos funkcijos reikšmių aibės, vienija diferencialines bei integralines lygtis, begalines tiesinių lygčių sistemas ir netgi tikimybių teorijos momentų problemą.

Šiame skyriuje detaliai nagrinėsime pačias paprasčiausias abstraktaus argumento funkcijas – tiesines tolydžias – apibrėžtas tiesinėse normuotose erdvėse ir įgyjančias skaliarines, realias ar kompleksines, reikšmes. Tokias funkcijas įprasta vadinti tiesiniais tolydžiaisiais funkcionalais. Prisiminus realaus kintamojo tiesinę funkciją, gali pasirodyti, kad tiesinis tolydusis funkcionalas gana elementarus objektas. Deja yra ne taip. Vien netrivialių tiesinių tolydžių funkcionalų egzistavimas yra idomi problema, kurią bendru atveju pavyksta išspręsti tik pasitelkus Hano-Banacho teoremą apie tiesinio funkcionalo pratęsimą.

Šiame skyriuje skaitytojas ras įvairių normuotų erdvių tiesinių tolydžių funkcionalų bendrąsias išraiškas. Hilberto erdvėms ir tolydžiųjų funkcijų erdvei $\mathcal{C}[a, b]$ jas surado Rysas. Iliustruodami galimus Ryso teoremos pritaikymus, aptarsime momentų problemą.

11.1.1 Tiesiniai tolydūs funkcionalai. Pavyzdžiai

Šiame skyrelyje $\mathbb{E}$ – tiesinė normuota erdvė virš skaliarų kūno $\mathbb{K}$. Tiesinis atvaizdis $F : \mathbb{E} \to \mathbb{K}$ vadinamas erdvės $\mathbb{E}$ tiesiniu funkcionalu. Priminsime, kad atvaizdis F yra tiesinis, jei $F(\alpha x + \beta y) = \alpha F(x) + \beta F(y)$ su visais $x, y \in \mathbb{E}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Priminsime taip pat, kad funkcionalas $F : \mathbb{E} \to \mathbb{K}$ yra tolydus taške $x \in \mathbb{E}$, jei kiekvieną $\varepsilon > 0$ atitinka toks $\delta > 0$, kad

$$|F(x) - F(y)| \leq \varepsilon, \quad \text{kai} \quad ||x - y|| < \delta.$$

Funkcionalas F tolydus, jei jis tolydus kiekviename taške. Funkcionalas F vadinamas aprėžtu, jei jis kiekvieną aprėžtą aibę atvaizduoja į aprėžtą.

11.1 teorema. *Jei $F : \mathbb{E} \to \mathbb{K}$ – tiesinis funkcionalas, tai šie teiginiai yra ekvivalentūs:*

1) F tolydus nulyje;

2) F tolydus;

3) F aprėžtas;

4) egzistuoja toks skaičius $M \geq 0$, kad

$$|F(x)| \leq M||x||, \quad \textit{su visais} \quad x \in \mathbb{E}. \tag{11.1}$$

Įrodymas. (1) $\Leftrightarrow$ (2). Pakanka įrodyti, kad (1) $\Rightarrow$ (2). Pirmiausia pastebėsime, kad tiesinis funkcionalas erdvės nulį visada atvaizduoja į nulį: $F(0) = 0$, nes $F(0) = F(0 \cdot x) = 0 \cdot F(x) = 0$. Todėl tolydumas nulyje reiškia, kad kiekvieną $\varepsilon > 0$ atitinka toks $\delta > 0$ su kuriuo

$$|F(x)| < \varepsilon, \quad \text{kai} \quad ||x|| < \delta.$$

Tegu $x_0 \in \mathbb{E}$ ir $||x - x_0|| < \delta$. Tuomet

$$|F(x) - F(x_0)| = |F(x - x_0)| < \varepsilon.$$

Vadinasi, F tolydus taške x_0.

(2) $\Rightarrow$ (3). Tarkime, $A \subset \mathbb{E}$ – aprėžta aibė, $A \subset S_r(0)$. Įrodysime, kad aibė $F(A) = \{F(x) : x \in A\} \subset \mathbb{K}$ aprėžta. Iš funkcionalo F tolydumo nulyje išplaukia, kad egzistuoja toks $\delta > 0$, su kuriuo $|F(x)| < 1$, kai $||x|| < \delta$. Jei $y \in A$, tai $||r^{-1}\delta y|| < \delta$. Todėl $|F(r^{-1}\delta y)| < 1$ arba $|F(y)| < r/\delta$, nes $F(r^{-1}\delta y) = r^{-1}\delta F(y)$. Vadinasi, aibė $F(A)$ aprėžta.

(3) $\Rightarrow$ (4). Pakanka įsitikinti, kad (11.1) teisinga kai $x \neq 0$. Kadangi aibė $F(S_1(0))$ aprėžta, egzistuoja toks $m > 0$, kad

$$|F(x)| \leq m \quad \text{su visais} \; ||x|| \leq 1.$$

Bet tada, imdami $x \in \mathbb{E}$, $x \neq 0$, turime

$$|F(x)| = ||x|| \cdot \left|F(x||x||^{-1})\right| \leq m||x||.$$

(4) $\Rightarrow$ (1). Akivaizdu. ∎

Tiesiniam tolydžiam erdvės $\mathbb{E}$ funkcionalui F skaičius

$$||F|| = \sup_{||x|| \leq 1} |F(x)| \tag{11.2}$$

yra baigtinis. Jis vadinamas *funkcionalo F norma*. Iš funkcionalo normos apibrėžimo išplaukia, kad

$$|F(x)| \leq ||F|| \cdot ||x|| \quad \text{su visais} \quad x \in \mathbb{E}. \tag{11.3}$$

Kitais žodžiais tariant, mažiausia konstanta M, su kuria teisinga (11.1) savybė, yra lygi $||F||$. Iš čia nesunkiai išplaukia dar dvi ekvivalenčios išraiškos funkcionalo normai skaičiuoti.

11.1 teiginys. *Tiesinio tolydaus funkcionalo $F : \mathbb{E} \to \mathbb{K}$ normai teisingos šios formulės:*

$$||F|| = \sup_{x \neq 0} \frac{|F(x)|}{||x||} \tag{11.4}$$

$$||F|| = \sup_{||x||=1} |F(x)|. \tag{11.5}$$

Įrodymas. Pirmiausia įrodykime (11.4) formulę. Dešinėje jos pusėje esantį tikslųjį viršutinį rėžį pažymėkime $\nu(F)$. Su kiekvienu $x \neq 0$

$$|F(x)| \leq \nu(F)||x||.$$

Kadangi ši nelygybė akivaizdžiai teisinga ir nuliniam elementui, tai $||F|| \leq \nu(F)$. Norėdami įrodyti priešingą nelygybę, pasiremkime funkcionalo normos ir tiksliojo apatinio rėžio apibrėžimais. Jei $M > ||F||$, tai $|F(x)| \leq M||x||$ su visais $x \in \mathbb{E}$. Taigi jei $x \neq 0$, tai $|F(x)|/||x|| < M$, todėl $\nu(F) \leq M$. Kadangi M laisvai pasirinktas skaičius didesnis už funkcionalo F normą, tai teisinga ir nelygybė $\nu(F) \leq ||F||$.

Dešinėje (11.5) formulės pusėje esantį tikslųjį viršutinį rėžį pažymėkime $\nu_1(F)$. Su kiekvienu $x \neq 0$, elemento $x/||x||$ norma lygi vienam, todėl

$$|F(x)| = |F(x/||x||)| \cdot ||x|| \leq \nu_1(F)||x||.$$

Iš čia išvedame $\nu_1(F) \le ||F||$. Priešingą nelygybę įrodome kaip anksčiau tik dar reikia pastebėti, kad elemento $x/||x||$ norma, kai $x \neq 0$, yra lygi vienam. ■

Panagrinėkime keletą pavyzdžių.

11.1 pavyzdys. Erdvės $\mathcal{C}[a,b]$ elementams f apibrėžkime

$$F(f) = \sum_{k=1}^{n} c_k f(t_k),$$

kai $t_1, \dots, t_n \in [a,b]$ – iš anksto duoti taškai, $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ – fiksuoti skaičiai. Įrodysime, kad šis funkcionalas yra tiesinis tolydus ir suskaičiuosime jo normą. Tiesiškumas akivaizdus, nes

$$\begin{aligned} F(\alpha f + \beta g) &= \sum_{k=1}^{n} c_k(\alpha f + \beta g)(t_k) = \\ &= \sum_{k=1}^{n} c_k[\alpha f(t_k) + \beta g(t_k)] = \alpha F(f) + \beta G(g). \end{aligned}$$

Iš nelygybės

$$|F(f)| \le \sum_{k=1}^{n} |c_k||f(t_k)| \le \sup_{t\in[a,b]} |f(t)| \sum_{k=1}^{n} |c_k| = \sum_{k=1}^{n} |c_k| \cdot ||f||$$

ir 11.1 teoremos išvedame funkcionalo F tolydumą ir tokį normos įvertį:

$$||F|| \le \sum_{k=1}^{n} |c_k|. \tag{11.6}$$

Nemažindami bendrumo galime tarti, kad $a < t_1 < \cdots < t_n < b$. Nagrinėkime funkciją $f_0 : [a,b] \to \mathbb{R}$, apibrėžtą taip:

$$f_0(t_k) = \operatorname{sign}(c_k),$$

tiesinė intervaluose $[t_{k-1}, t_k], k = 2, \dots, n$ ir pastovi intervaluose $[a, t_1], [t_n, b]$. Akivaizdu, kad taip sukonstruota funkcija yra tolydi ir jos norma yra lygi vienam, t.y. $f_0 \in \mathcal{C}[a,b]$, $||f_0|| = 1$. Todėl

$$||F|| \ge |F(f_0)| = |\sum_{k=1}^{n} c_k f_0(t_k)| = \sum_{k=1}^{n} c_k \operatorname{sign}(c_k) = \sum_{k=1}^{n} |c_k|.$$

Šis įvertis kartu su (11.6) nelygybe įrodo, kad

$$||F|| = \sum_{k=1}^{n} |c_k|.$$

Įvairūs realiosios funkcijos parametrai yra atskiri išnagrinėto funkcionalo atvejai. Keletą iš jų paminėsime. Funkcijai $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, apibrėžtai intervale $[a, b]$, susitarkime, kad $f(t) = 0$, jei $t \notin [a, b]$.

- Funkcijos reikšmė fiksuotame taške $t_0 \in [a, b]$:

$$F(f) = f(t_0).$$

- Funkcijos prieauglis žingsniu h fiksuotame taške $t_0 \in [a, b]$:

$$F(f) = \Delta_h f(t_0) = f(t_0 + h) - f(t_0).$$

- Funkcijos r-tasis Šauderio koeficientas:

$$F(f) = f(r) - \frac{1}{2}[f(r^+) + f(r^-)].$$

  Čia $r \in D_j$ yra intervalo $[a, b]$ j-tojo lygmens diadinis skaičius, $j \geq 1$, (žr. **??** skyrelį).

- k-tasis funkcijos prieauglis žingsniu h fiksuotame taške $t_0 \in [a, b]$:

$$F(f) = \Delta_h^k f(t_0) = \sum_{m=0}^{k} (-1)^{m+k} \binom{k}{m} f(t_0 + mh).$$

- integralinė Rymano suma:

$$F(f) = \sum_{k=1}^{n} f(\tau_k)(t_k - t_{k-1}),$$

  kai $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b$ yra duotas intervalo $[a, b]$ skaidinys, o $\tau_k \in [t_{k-1}, t_k], k = 1, \ldots, n$ – duoti taškai.

11.2 pavyzdys. Nagrinėkime funkcionalą $F : \mathcal{C}[a, b] \to \mathbb{R}$, apibrėžtą formule

$$F(f) = \int_a^b f(t)\psi(t)dt,$$

kai ψ – integruojama funkcija. Tai, kad funkcionalas F apibrėžtas visiems $f \in \mathcal{C}[a,b]$ ir yra tiesinis, akivaizdu. Įrodysime, kad

$$||F|| = \int_a^b |\psi(t)|dt. \tag{11.7}$$

Kadangi

$$|F(f)| \leq \int_a^b |f(t)||\psi(t)|dt \leq \int_a^b |\psi(t)|dt \sup_{a \leq t \leq b} |f(t)|,$$

tai $||F|| \leq \int_a^b |\psi(t)|dt$. Priešingos nelygybės įrodymui, pirmiausia tarkime, kad funkcija ψ tolydi. Laisvai pasirinkime skaičių $\varepsilon > 0$ ir nagrinėkime tokį intervalo $[a,b]$ skaidinį $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b$, kad

$$\sup_{t_{k-1} \leq s < t \leq t_k} |\psi(t) - \psi(s)| < \varepsilon \;\; \text{su visais} \;\; k = 1, \ldots, n.$$

Toks skaidinys egzistuoja, nes funkcija ψ būdama tolydi uždarame intervale yra jame ir tolygiai tolydi. Šio skaidinio pagalba gautus intervalus suskaidykime į dvi grupes: intervalai $\Delta_1, \ldots, \Delta_r$, kuriuose funkcija ψ yra pastovaus ženklo ir likę intervalai $\Delta_1', \ldots, \Delta_q'$. Kadangi funkcija ψ kiekviename iš antrosios grupės intervalų keičia ženklą, tai kuriame nors jo taške yra lygi nuliui. Todėl

$$\sup_{t \in \Delta_j'} |\psi(t)| < \varepsilon, \;\text{su visais} \;\; j = 1, \ldots, q.$$

Funkciją $f_0 \in \mathcal{C}[a,b]$ apibrėžkime tokiu būdu. Tegu

$$f_0(t) = \operatorname{sign}(\psi(t)), \;\; \text{kai} \;\; t \in \Delta_1 \cup \cdots \cup \Delta_r$$

ir likusiuose intervaluose yra tiesiška. Be to, jei taškas a (arba b) yra antrosios grupės intervalų taškas, tai laikysime, kad $x(a) = 0$ (atitinkamai $x(b) = 0$). Įvertinkime $F(f_0)$. Pagal funkcijos f_0 apibrėžimą, $|f_0(t)| \leq 1$ su visais $t \in [a,b]$. Todėl

$$\begin{aligned}
|F(f_0)| &= \Big| \sum_{j=1}^r \int_{\Delta_j} f_0(t)\psi(t)dt + \sum_{j=1}^q \int_{\Delta_j'} f_0(t)\psi(t)dt \Big| \\
&\geq \sum_{j=1}^r \int_{\Delta_j} |\psi(t)|dt - \sum_{j=1}^q \int_{\Delta_j'} |\psi(t)|dt \\
&= \int_a^b |\psi(t)|dt - 2\sum_{j=1}^q \int_{\Delta_j'} |\psi(t)|dt \geq \int_a^b |\psi(t)|dt - 2\varepsilon(b-a).
\end{aligned}$$

Pastebėję, kad funkcijos f_0 norma lygi vienam ir pasinaudoję (11.5) formule, išvedame

$$||F|| \geq \int_a^b |\psi(t)|dt - 2\varepsilon(b-a).$$

Kadangi ε laisvai pasirenkamas skaičius, galime pereiti prie ribos, kai $\varepsilon \to 0$. Taigi $||F|| \geq \int_a^b |\psi(t)|dt$ ir (11.7) įrodyta, kai ψ tolydžioji funkcija.

Tarkime ψ bet kuri integruojama funkcija. Remiantis **??** teiginiu, egzistuoja tokia tolydžioji funkcija ψ_0, kad

$$\int_a^b |\psi(t) - \psi_0(t)|dt < \varepsilon.$$

Pakartoję ankstesnę funkcijos f_0 konstrukciją, tik šį kartą imdami funkciją ψ_0 vietoj ψ, išvedame

$$\begin{aligned}
|F(f_0)| =& \Big|\int_a^b f_0(t)\psi(t)dt\Big| \\
=& \Big|\int_a^b f_0(t)\psi_0(t)dt + \int_a^b f_0(t)[\psi(t) - \psi_0(t)]dt\Big| \\
\geq& \int_a^b |\psi_0(t)|dt - 2\varepsilon(b-a) - \varepsilon \\
\geq& \int_a^b |\psi(t)|dt - 2\varepsilon - 2\varepsilon(b-a)
\end{aligned}$$

ir įrodymą užbaigiame pereidami prie ribos, kai $\varepsilon \to 0$.

Atskiri išnagrinėto funkcionalo F pavyzdžiai yra šios funkcijos charakteristikos.

- Funkcijos integralas intervale $[a, b] : F(f) = \int_a^b f(t)dt$,
- Funkcijos integralas intervale $\Delta \subset [a, b] : F(f) = \int_\Delta f(t)dt$.
- Funkcijos Furjė koeficientai: $F(f) = \int_a^b f(t)\cos(\pi kt/(b-a))dt$, $k = 1, 2, \dots$

11.1.2 Jungtinės erdvės. Pavyzdžiai

Tiesinių erdvės $\mathbb{E}$ funkcionalų aibė sudaro tiesinę erdvę, kurioje sudėties ir daugybos iš skaliaro operacijos apibrėžiamos pataškiui: $(F + G)(x) =$

$F(x)+G(x)$ ir $(\alpha F)(x) = \alpha F(x)$, kai $F, G : \mathbb{E} \to \mathbb{K}$ – tiesiniai funkcionalai, o $\alpha \in \mathbb{K}$. Tą erdvę žymėsime $\mathbb{E}^{\#}$ ir vadinsime erdvės $\mathbb{E}$ algebrine jungtine erdve. Venu iš svarbiausių jos poaibių yra erdvės $\mathbb{E}$ tiesinių tolydžių funkcionalų aibė, kuri žymima $\mathbb{E}^*$. Dažnai, kai erdvės $\mathbb{E}$ elementus žymime simboliais $x, y, \ldots$, tai aibės $\mathbb{E}^*$ elementus – simboliais x^*, y^*, ... Tačiau čia nereikia ieškoti kokio nors sąryšio tarp x ir x^*. Taip, sekų erdvėms, tiesinius tokydžius funkcionalus žymėsime simboliais $\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{y}^*, \ldots$, o funkcijų erdvėms – $f^*, g^*, \ldots$ Naudosime ir žymenis $F, G, \ldots$, jei tik tai suteiks didesnį aiškumą dėstomam dalykui.

Nesunku įrodyti, kad $\alpha x^* + \beta y^* \in \mathbb{E}^*$ su bet kuriais $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ ir $x^*, y^* \in \mathbb{E}^*$.. Taigi $\mathbb{E}^*$ – tiesinė erdvė. Funkcija $F \to ||F||$ tiesiniam tolydžiam funkcionalui priskirianti jo normą, apibrėžtą (11.2) lygybe, yra erdvės $\mathbb{E}^*$ norma. Tikrai, $||F|| \geq 0$ ir $||F|| = 0$ reiškia, kad $F(x) = 0$ su visais $x \in \mathbb{E} : ||x|| \leq 1$. Tačiau, jei $y \neq 0$ tai $\big\|\, y/||y||\, \big\| = 1$ ir $F(y) = ||y||F(y/||y||) = 0$. Kadangi $F(0) = 0$ tai, galiausiai, $F(y) = 0$ su visais $y \in \mathbb{E}$, t.y. $F = 0$. Akivaizdu, kad $||F|| = 0$, kai $F = 0$. Skaitytojui paliekame patikrinti likusiais dvi normos aksiomas.

11.1 apibrėžimas. *Tiesinė erdvė* $\mathbb{E}^*$ *su norma, apibrėžta* (11.2) *lygybe, vadinama erdvės* $\mathbb{E}$ *(topologine) jungtine erdve.*

11.2 teorema. *Normuota erdvė* $\mathbb{E}^*$ *yra pilna.*

Įrodymas. Tegu $(x_n^*) \subset \mathbb{E}^*$ – Koši seka. Sakykime, $\varepsilon > 0$ ir N_ε – toks sveikasis skaičius, kad $||x_n^* - x_m^*|| < \varepsilon$, kai $n, m \geq N_\varepsilon$. Jeigu $x \in \mathbb{E}$ ir $n, m \geq N_e$, tai

$$||x_n^*(x) - x_m^*(x)|| = ||(x_n^* - x_m^*)x|| \leq ||x_m^* - x_n^*|| \cdot ||x|| \leq \varepsilon||x||. \qquad (11.8)$$

Iš čia išplaukia, kad $(x_n^*(x)) \subset \mathbb{K}$ – Koši seka. Tiek realiųjų, tiek kompleksinių skaičių sekų konvegravimui pakanka Koši kriterijaus. Taigi seka $(x_n^*(x))$ konverguoja. Sakykime,

$$x^*(x) = \lim_{n\to\infty} x_n^*(x). \qquad (11.9)$$

Šia lygybe apibrėžiamas atvaizdis $x^* : \mathbb{E} \to \mathbb{K}$. Įrodysime, kad $x^* \in \mathbb{E}^*$ ir $\lim_{n\to\infty} x_n^* = x^*$.

Sakykime, $x, y \in \mathbb{E}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Tuomet,

$$x^*(\alpha x + \beta y) = \lim_{n\to\infty} x_n^*(\alpha x + \beta y) =$$
$$\alpha \lim_{n\to\infty} x_n^*(x) + \beta \lim_{n\to\infty} x_n^*(y) =$$
$$\alpha x^*(x) + \beta x^*(y).$$

Tai įrodo, kad atvaizdis x^* yra tiesinis. Remiantis (11.9),

$$x^*(x) - x_n^*(x) = \lim_{m\to\infty} x_m^*(x) - x_n^*(x) = \lim_{m\to\infty} (x_m^*(x) - x_n^*(x)),$$

todėl, pasinaudoję normos tolydumu, turime

$$\begin{aligned} ||x^*(x) - x_m^*(x)|| &= ||\lim_{m\to\infty} (x_m^*(x) - x_n^*(x))|| \\ &= \lim_{m\to\infty} ||x_m^*(x) - x_n^*(x)||. \end{aligned}$$

Dabar galime pritaikyti (11.8) nelygybę ir išvesti

$$||x^*(x) - x_n^*(x)|| \le \varepsilon ||x||. \tag{11.10}$$

Šis įvertis teisingas su visais $x \in \mathbb{E}$ ir $n > N_e$. Iš (11.10) ir (11.3) sąryšių išplaukia

$$||x^*(x)|| \le ||x^*(x) - x_N^*(x)|| + ||x_N^*(x)|| \le \varepsilon ||x|| + ||x_N^*|| \cdot ||x|| = (\varepsilon + ||x_N^*||)||x||.$$

Iš čia matome, kad atvaizdis x^* aprėžtas. Taigi, $x^* \in \mathbb{E}^*$. Kadangi

$$||x_n^* - x^*|| = \sup_{x:||x||\le 1} ||x_n^*(x) - x^*(x)|| \le \varepsilon,$$

jei $n \ge N_\varepsilon$, tai $\lim_{n\to\infty} x_n^* = x^*$. ■

Kai kurioms normuotoms erdvėms galime rasti tiesinių tolydžiųjų funkcionalų bendrąsias išraiškas ir aprašyti jungtines erdves. Šiame skyrelyje pateiksime keletą tokių pavyzdžių.

11.3 pavyzdys. Jei $\mathbb{E}$ – baigtiniamatė tiesinė normuotoji erdvė virš kūno $\mathbb{K}$, tai

- bet kuris tos erdvės tiesinis funkcionalas yra aprėžtas;
- jungtinė erdvė $\mathbb{E}^*$ yra baigtiniamatė;

- $\dim(\mathbb{E}) = \dim(\mathbb{E}^*)$.

Tarkime, $\mathbb{E}$ – n-matė ir $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ – jos bazė. Bet kurį $x \in \mathbb{E}$ vieninteliu būdu galime išreikšti suma

$$x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k. \tag{11.11}$$

Čia $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{K}$. Nesunku patikrinti, kad atvaizdis $x \to \sum_{k=1}^{n} |x_k|$ yra erdvės $\mathbb{E}$ norma. Remiantis **??** teorema, bet kurios dvi baigtiniamatės erdvės normos yra ekvivalenčios, todėl egzistuoja toks $M > 0$, kad

$$\sum_{k=1}^{n} |x_k| \leq M||x|| \quad \text{su visais} \quad x \in \mathbb{E}. \tag{11.12}$$

Funkcionalus $e_j^* : \mathbb{E} \to \mathbb{K}, j = 1, 2, \ldots, n$, apibrėžkime taip:

$$e_j^*(x) = x_j, \;\; j = 1, 2, \ldots, n,$$

kai x išreiškiamas (11.11) formule. Nesunku patikrinti, kad taip apibrėžti funkcionalai yra tiesiniai. Pasinaudoję (11.12) nelygybe, gauname

$$|e_j^*(x)| = |x_j| \leq M||x||,$$

su visais $x \in \mathbb{E}$. Iš čia išplaukia funkcionalo e_j^* aprėžtumas. Vadinasi, $e_j^* \in \mathbb{E}^*$ su visais $j = 1, 2, ..., n$.

Aibė $\{e_1^*, e_2^*, ..., e_n^*\}$ tiesiškai nesurišta, nes iš $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k^* = 0$ išplaukia

$$0 = \Big(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k^*\Big)(e_j) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k^*(e_j) = \alpha_j,$$

kai $j = 1, 2, ..., n$.

Dabar tarkime, x^* – bet kuris tiesinis erdvės $\mathbb{E}$ funkcionalas. Imdami $\beta_j = x^*(e_j), j = 1, \ldots, n$ ir, pasinaudoję (11.11) sąryšiu, turime

$$x^*(x) = x^*\big(\sum_{k=1}^{n} x_k e_k\big) = \sum_{k=1}^{n} x_k x^*(e_k) =$$

$$\sum_{k=1}^{n} e_k^*(x) \beta_k = \big(\sum_{k=1}^{n} \beta_k e_k^*\big)(x).$$

Taigi, $x^* = \sum_{k=1}^{n} \beta_k e_k^*$. Be to, pastarosios lygybės įrodo, kad funkcionalas x^* aprėžtas ir $\{e_1^*, e_2^*, ..., e_n^*\}$ – erdvės $\mathbb{E}^*$ bazė.

11.4 pavyzdys. Šiame pavyzdyje rasime erdvės ℓ_1 tiesinio tolydžiojo funkcionalo bendrąją išraišką ir įrodysime, kad erdvės ℓ_1 jungtinė erdvė ℓ_1^* izometriškai izomorfinė erdvei ℓ_∞.

11.2 teiginys. *Su kiekviena seka $\boldsymbol{y} = (y_k) \in \ell_\infty$, funkcionalas*

$$\boldsymbol{x}^*(\boldsymbol{x}) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k \tag{11.13}$$

apibrėžtas erdvėje ℓ_1 yra tiesinis tolydus ir jo norma

$$||\boldsymbol{x}^*|| = \sup_k |y_k| = ||\boldsymbol{y}||_{\ell_\infty}.$$

Įrodymas. Funkcionalas $\boldsymbol{x}^*$ apibrėžtas erdvėje ℓ_1, nes eilutė $\sum_k x_k y_k$ konverguoja, jei $\sum_k |x_k| < \infty$. Funkcionalas yra tiesinis, nes

$$\boldsymbol{x}^*(\alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{z}) = \sum_{k=1}^{\infty}(\alpha x_k + \beta z_k) y_k =$$
$$\alpha \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k + \beta \sum_{k=1}^{\infty} z_k y_k = \alpha\boldsymbol{x}^*(\boldsymbol{x}) + \beta\boldsymbol{x}^*(\boldsymbol{z})$$

su visais $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ir $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z} \in \ell_1$. Kadangi

$$|\boldsymbol{x}^*(\boldsymbol{x})| = \Big|\sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k\Big| \le \sum_{k=1}^{\infty} |x_k| \cdot \sup_{k\ge 1} |y_k| = \sup_{k\ge 1} |y_k| \cdot ||\boldsymbol{x}||,$$

su visais $\boldsymbol{x} \in \ell_1$, tai $||\boldsymbol{x}^*|| \le \sup_{k\ge 1} |y_k|$. Kiekvieną $\varepsilon > 0$ atitinka toks $k_\varepsilon \in \mathbb{N}$ su kuriuo

$$\sup_{k\ge 1} |y_k| \le |y_{k_\varepsilon}| + \varepsilon.$$

Seką $\boldsymbol{x}_0 = (x_{0k}) \in \ell_1$ apibrėžkime taip:

$$x_{0k_\varepsilon} = \mathrm{sign}(y_{k_\varepsilon}), \quad \text{ir} \quad x_{0k} = 0, \quad \text{kai } k \ne k_\varepsilon.$$

Tada

$$\boldsymbol{x}^*(\boldsymbol{x}_0) = \sum_{k=1}^{\infty} x_{0k} y_k = y_{k_\varepsilon} \mathrm{sign}(y_{k_\varepsilon}) = |y_{k_e}| \ge \sup_{k\ge 1} |y_k| - \varepsilon.$$

Akivaizdu, kad $||\boldsymbol{x}_0|| = 1$. Taigi $||\boldsymbol{x}^*|| \ge \sup_{k\ge 1} |y_k| - \varepsilon$. Kadangi $\varepsilon > 0$ laisvai pasirenkamas skaičius, tai $||\boldsymbol{x}^*|| \ge \sup_{k\ge 1} |y_k|$, ir teorema pilnai įrodyta.

11.3 teiginys. *Kiekvieną erdvės ℓ_1 tiesinį tolydųjį funkcionalą $\boldsymbol{x}^*$ atitinka tokia seka $(y_n) \in \ell_\infty$, kad*

$$\boldsymbol{x}^*(\boldsymbol{x}) = \sum_{n=1}^{\infty} x_k y_k, \quad \textit{su visais} \;\; \boldsymbol{x} = (x_n) \in \ell_1. \tag{11.14}$$

Įrodymas. Sakykime, $\boldsymbol{e}_n = (\delta_{mn})_{m \geq 1}$. Akivaizdu, kad $\boldsymbol{e}_n \in \ell_1$ ir $||\boldsymbol{e}_n|| = 1$. Jei $\boldsymbol{x} = (x_n) \in \ell_1$ ir $\boldsymbol{s}_n = \sum_{k=1}^{n} x_k \boldsymbol{e}_k$, tai $||\boldsymbol{x} - \boldsymbol{s}_n|| = \sum_{k=n+1}^{\infty} |x_k|$. Pagal erdvės ℓ_1 apibrėžimą, eilutė $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|$ konverguoja, todėl, imdami bet kurį $\varepsilon > 0$, rasime $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$, su kuriuo $||\boldsymbol{x} - \boldsymbol{s}_n|| < \varepsilon$, kai $n \geq N_e$. Dabar tarkime, $\boldsymbol{x}^* \in \ell_1^*$ ir pažymėkime $y_n = \boldsymbol{x}^*(\boldsymbol{e}_n)$. Pastebėję, kad

$$|y_n| = |\boldsymbol{x}^*(\boldsymbol{e}_n)| \leq ||\boldsymbol{x}^*|| \cdot ||\boldsymbol{e}_n|| = ||\boldsymbol{x}^*||,$$

gauname, kad seka (y_n) yra aprėžta. Vadinasi, $(y_n) \in \ell_\infty$.

Kadangi $|\boldsymbol{x}^*(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{s}_n)| \leq ||\boldsymbol{x}^*|| \cdot ||\boldsymbol{x} - \boldsymbol{s}_n|| < \varepsilon ||\boldsymbol{x}^*||$, su visais $n \geq N_\varepsilon$, tai

$$\begin{aligned} &|\boldsymbol{x}^*(\boldsymbol{x}) - \sum_{k=1}^{n} x_k y_k| = |\boldsymbol{x}^*(\boldsymbol{x}) - \sum_{k=1}^{n} x_k \boldsymbol{x}^*(e_k)| = |\boldsymbol{x}^*(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{x}^*(\boldsymbol{s}_n)| \\ &= |\boldsymbol{x}^*(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{s}_n)| < \varepsilon ||\boldsymbol{x}^*||, \end{aligned}$$

kai $n \geq N_\varepsilon$. Vadinasi,

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} x_k y_k = \boldsymbol{x}^*(\boldsymbol{x}).$$

Taigi

$$\boldsymbol{x}^*(\boldsymbol{x}) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k.$$

■

11.4 teiginys. *Erdvės ℓ_1 jungtinė erdvė ℓ_1^* izometriškai izomorfinė erdvei ℓ_∞. Be to, atvaizdis $T : \ell_1^* \to \ell_\infty$, $T\boldsymbol{x}^* = (y_k)$, kai (y_k) nusakytas 11.3 teiginiu, yra atitinkamas izometrinis izomorfizmas.*

Įrodymas. Nesunku įrodyti, kad atvaizdis T yra tiesinis. Įrodykime, kad T yra bijekcija. Remiantis 11.3 teiginiu $T(\ell_1^*) = \ell_\infty$. Akivaizdu, kad jei $\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{y}^* \in \ell_1^*$ ir $\boldsymbol{x}^* \neq \boldsymbol{y}^*$ tai $T\boldsymbol{x}^* \neq T\boldsymbol{y}^*$. Taigi, atvaizdis T – abipus vienareikšmis. Vadinasi, T – izomorfizmas. Lieka pastebėti, kad

$$||T\boldsymbol{x}^*|| = \sup_k |y_k| = ||\boldsymbol{x}^*||.$$

Taigi T – izometrija. ■

11.5 pavyzdys. Šiame pavyzdyje rasime bendrąją erdvės c_0 tiesinio tolydžiojo funkcionalo erdvėje c_0 išraišką ir įrodysime, kad erdvė c_0^* yra izometriškai izomorfinė erdvei ℓ_1.

11.5 teiginys. *Su kiekviena seka $\boldsymbol{y} = (y_k) \in \ell_1$, funkcionalas*

$$\boldsymbol{x}^*(\boldsymbol{x}) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k, \tag{11.15}$$

apibrėžtas erdvėje c_0, yra tiesinis tolydus ir jo norma

$$||\boldsymbol{x}^*|| = \sum_{k=1}^{\infty} |y_k| = ||\boldsymbol{y}||_{\ell_1}.$$

Įrodymas. Funkcionalas $\boldsymbol{x}^*$ apibrėžtas erdvėje c_0, nes eilutė $\sum_k x_k y_k$ konverguoja, kai $\sum_k |y_k| < \infty$ ir $\max_k |x_k| < \infty$. Funkcionalo tiesiškumu įsitikiname kaip ir 11.3 teoremos įrodyme. Kadangi

$$|\boldsymbol{x}^*(\boldsymbol{x})| = \Big|\sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k\Big| \le \sum_{k=1}^{\infty} |y_k| \cdot \sup_{k\ge 1} |x_k| = \sum_{k=1}^{\infty} |y_k| \cdot ||\boldsymbol{x}||,$$

su visais $\boldsymbol{x} \in c_0$, tai $||\boldsymbol{x}^*|| \le \sum_{k=1}^{\infty} |y_k|$. Laisvai pasirinkę natūralųjį skaičių N, nagrinėkime seką $\boldsymbol{x}_0 = (x_{0k})$, kai

$$x_{0k} = \begin{cases} \operatorname{sign}(y_k), & \text{kai } k = 1, \ldots, N \\ 0, & \text{kai } k > N. \end{cases}$$

Akivaizdu, kad $\boldsymbol{x}_0 \in c_0$ ir $||\boldsymbol{x}_0|| = 1$. Todėl

$$||\boldsymbol{x}^*|| \ge |\boldsymbol{x}^*(\boldsymbol{x}_0)| = \sum_{k=1}^{N} |y_k|.$$

Kadangi N laisvai pasirenkamas, tai ir $\sum_{k=1}^{\infty} |y_k| \le ||\boldsymbol{x}^*||$. ■

11.6 teiginys. *Kiekvieną erdvės c_0 tiesinį tolydųjį funkcionalą $\boldsymbol{x}^*$ atitinka tokia seka $(y_n) \in \ell_1$, kad*

$$\boldsymbol{x}^*(\boldsymbol{x}) = \sum_{n=1}^{\infty} x_k y_k, \quad \textit{su visais} \ \ \boldsymbol{x} = (x_n) \in c_0. \tag{11.16}$$

Įrodymas. Kaip ir teoremos 11.3 įrodyme, pasinaudosime standartine vienetine seka $(\boldsymbol{e}_n)$. Akivaizdu, kad $\boldsymbol{e}_n \in c_0$ su visais $n \in \mathbb{N}$ ir $||\boldsymbol{e}_n|| = 1$. Tarkime, $\boldsymbol{x} = (x_n) \in c_0$, ir pažymėkime $\boldsymbol{s}_n = \sum_{k=1}^{n} x_k \boldsymbol{e}_k$. Imdami bet kurį $\varepsilon > 0$, rasime tokį $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$, kad $|x_k| < \varepsilon$, kai $k > N_\varepsilon$. Todėl

$$||\boldsymbol{x} - \boldsymbol{s}_n|| = \sup_{k > N_\varepsilon} |x_k| \leq \varepsilon,$$

kai $n \geq N_\varepsilon$.

Dabar imkime $\boldsymbol{x}^* \in c_0^*$ ir apibrėžkime $y_n = \boldsymbol{x}^*(\boldsymbol{e}_n)$. Kaip ir ankstesniame pavyzdyje, nesunkiai įrodome, kad $|\boldsymbol{x}^*(\boldsymbol{x}) - \sum_{k=1}^{n} x_k y_k| \leq \varepsilon||\boldsymbol{x}^*||$, kai $n \geq N_\varepsilon$. Vadinasi,

$$\boldsymbol{x}^*(\boldsymbol{x}) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k. \tag{11.17}$$

Įrodysime, kad $(y_n) \in \ell_1$. Sakykime, $z_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \boldsymbol{e}_k$. Čia $\alpha_n = 0$, jei $y_n = 0$, ir $\alpha_n = y_n/|y_n|$, jei $y_n \neq 0$. Akivaizdu, kad $||z_n|| \leq 1$. Remiantis (11.17) formule,

$$\boldsymbol{x}^*(z_n) \ = \ \sum_{k=1}^{n} |y_k|,$$

todėl

$$\sum_{k=1}^{n} |y_k| = |\boldsymbol{x}^*(z_n)| \leq ||\boldsymbol{x}^*|| \cdot ||z_n|| \leq ||\boldsymbol{x}^*||.$$

Tai įrodo, kad eilutė $\sum_k |y_k|$ konverguoja, t.y. $(y_n) \in \ell_1$. ■

11.7 teiginys. *Erdvės c_0 jungtinė erdvė c_0^* izometriškai izomorfinė erdvei ℓ_1. Be to, atvaizdis $T : c_0^* \to \ell_1$, $T\boldsymbol{x}^* = (y_k)$, kai (y_k) apibrėžtas 11.6 teiginio įrodyme, yra izometrinis izomorfizmas.*

Įrodymas. Pagal 11.6 teiginį $T(c_0^*) \subset \ell_1$ ir $||T\boldsymbol{x}^*|| = ||\boldsymbol{x}^*||$. Tereikia įrodyti, kad T yra bijekcija. O tai padarome analogiškai, kaip ir 11.3 teiginio įrodyme.
■

11.1.3 Normuotų erdvių Hano-Banacho teorema

H. Hanas 1927 metais įrodė, kad kiekvienai tiesinei normuotai erdvei egzistuoja netrivialūs tiesiniai tolydieji funkcionalai. Šis jo rezultatas yra bendresnės teoremos, kurią 1929 metais įrodė S. Banachas ir kuri dabar vadinama Hano-Banacho vardu, išvada.

Sakysime, kad tiesinis funkcionalas $F : \mathbb{E}_0 \to \mathbb{K}$, apibrėžtas tiesinės normuotos erdvės $\mathbb{E}$ tiesiniame poaibyje $\mathbb{E}_0$ yra aprėžtas, jei

$$\sup_{x\in\mathbb{E}_0:||x||\leq 1} |F(x)| < \infty.$$

11.3 teorema. (Hano-Banacho.) *Sakykime, $\mathbb{E}$ – tiesinė normuotoji erdvė virš skaliarų kūno $\mathbb{K}$, $\mathbb{E}_0$ – jos tiesinis poaibis. Sakykime, $y^* : \mathbb{E}_0 \to \mathbb{K}$ – tiesinis aprėžtas funkcionalas. Jei patenkintos šios sąlygos, tai egzistuoja toks tiesinis tolydusis funkcionalas x^* apibrėžtas erdvėje $\mathbb{E}$, kad:*

a) $x^*(x) = y^*(x)$ *su visais* $x \in \mathbb{E}_0$;

b) $||x^*|| = \sup_{x\in\mathbb{E}_0:||x||=1} |y^*(x)|$.

Įrodymas. Trumpumo dėlei pažymėkime

$$||y^*||_0 = \sup_{x\in\mathbb{E}_0:||x||\leq 1} |y^*(x)|.$$

Įrodymą pradėkime realiosios tiesinės erdvės atveju. Tarkime, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Šiuo atveju

$$y^*(x) \leq |y^*(x)| \leq ||y^*||_0 \cdot ||x||,$$

kai $x \in \mathbb{E}_0$. Atvaizdis $x \to ||y^*||_0 \cdot ||x||$ yra erdvės $\mathbb{E}$ subtiesinis funkcionalas. Remiantis Hano–Banacho **??** teorema, egzistuoja toks erdvės $\mathbb{E}$ tiesinis funkcionalas x^*, su kuriuo $x^*(x) = y^*(x)$, kai $x \in \mathbb{E}_0$. Be to, $x^*(x) \leq ||y^*||_0 \cdot ||x||$, kai $x \in \mathbb{E}$. Remiantis šia nelygybe, bei normos aksiomomis, išvedame

$$-x^*(x) = x^*(-x) \leq ||y^*||_0 \cdot || - x|| = ||y^*||_0 \cdot ||x||.$$

Taigi $|x^*(x)| \leq ||y^*||_0 \cdot ||x||$, kai $x \in \mathbb{E}$. Iš čia išeina, kad funkcionalas x^* yra aprėžtas ir jo normai teisinga nelygybė $||x^*|| \leq ||y^*||_0$. Kita vertus,

$$\begin{aligned} ||y^*||_0 &= \sup\{|y^*(x)| : x \in \mathbb{E}_0, ||x|| \leq 1\} \\ &= \sup\{|x^*(x)| : x \in \mathbb{E}_0, ||x|| \leq 1\} \\ &\leq \sup\{|x^*(x)| : x \in \mathbb{E}, ||x|| \leq 1\} = ||x^*||. \end{aligned}$$

Vadinasi, $||x^*|| = ||y^*||_0$. Taigi teorema įrodyta realiosios erdvės atveju.

Toliau tarkime, $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Šiuo atveju

$$\Re y^*(x) \leq |y^*(x)| \leq ||y^*||_0 \cdot ||x||,$$

kai $x \in \mathbb{E}_0$. Ir šį kartą pastebime, kad funkcionalas $x \to ||y^*||_0 \cdot ||x||$ subtiesinis. Pritaikę **??** teoremą, randame tokį kompleksinį tiesinį funkcionalą x^*, apibrėžtą erdvėje $\mathbb{E}$, kad $x^*(x) = y^*(x)$, kai $x \in \mathbb{E}_0$, ir $\Re x^*(x) \leq ||y^*||_0 \cdot ||x||$, kai $x \in \mathbb{E}$. Jei $x \in \mathbb{E}$ ir θ yra toks realusis skaičius, kad $x^*(x) = e^{\imath\theta}|x^*(x)|$, tai

$$\begin{aligned}|x^*(x)| &= \Re(e^{-\imath\theta}x^*(x)) \leq |x^*(e^{-\imath\theta}x)| \leq ||y^*||_0 \cdot ||e^{-\imath\theta}x|| \\ &\leq ||y^*||_0 \cdot ||x||.\end{aligned}$$

Iš čia išplaukia, kad funkcionalas x^* yra aprėžtas ir, be to, teisinga nelygybė $||x^*|| \leq ||y^*||_0$. Priešinga nelygybė gaunama analogiškai, kaip realiosios erdvės atveju. ■

Įrodyta teorema tvirtina, kad turėdami tiesinį tolydųjį funkcionalą, apibrėžtą normuotos erdvės tiesinėje aibėje, galime jį pratęsti į visą erdvę nepakeisdami jo normos. Dabar išvesime keletą labai svarbių 11.3 teoremos išvadų.

11.4 teorema. *Sakykime, $\mathbb{E}$ – tiesinė normuotoji erdvė virš skaliarų kūno $\mathbb{K}$, F – tiesinis jos poaibis. Jei $x \in \mathbb{E}$ ir $\delta = d(x, F) > 0$, tai egzistuoja toks tiesinis tolydusis funkcionalas $x^* : \mathbb{E} \to \mathbb{K}$, kad $x^*(y) = 0$, kai $y \in F$, $x^*(x) = \delta$ ir, be to, $||x^*|| = 1$.*

Įrodymas. Sakykime, $\mathbb{E}_0 = \mathrm{tap}\{F \cup \{x\}\}$. Pirmiausia apibrėšime tiesinį funkcionalą $y^* : \mathbb{E}_0 \to \mathbb{K}$. Akivaizdu, kad aibės $\mathbb{E}_0$ elementai yra pavidalo $y + \alpha x$, $y \in F$, $\alpha \in \mathbb{K}$. Apibrėžkime

$$y^*(y + \alpha x) = \alpha\delta,$$

kai $y \in \mathbb{F}$, $\alpha \in \mathbb{K}$. Nesunku įrodyti, kad funkcionalas y^* yra tiesinis. Įsitikinsime, kad jis yra aprėžtas. Jei $\alpha \neq 0$, tai

$$||y + \alpha x|| = |\alpha| \cdot ||\alpha^{-1}y + x|| \geq |\alpha|\delta = |y^*(y + \alpha x)|.$$

Gautasis įveris išlieka taip pat teisingas kai $\alpha = 0$, nes $|y^*(y)| = 0 \leq ||y||$. Taigi, jei $z = y + \alpha x \in \mathbb{E}_0$, tai

$$|y^*(z)| = |y^*(y + \alpha x)| \leq ||y + \alpha x|| = ||z||.$$

Taigi, funkcionalas y^* yra apržtas ir, be to,

$$||y^*||_0 = \sup_{z \in \mathbb{E}_0 : ||z|| \le 1} |y^*(z)| \le 1.$$

Dar pastebję, kad

$$\delta = y^*(x+y) \le ||y^*|| \cdot ||x+y||,$$

kai $y \in \mathbb{F}$, išvedame

$$\delta \le \inf\{||y^*|| \cdot ||x+y|| : y \in F\} = \delta ||y^*||_0,$$

t.y. $||y^*||_0 \ge 1$. Vadinasi, $||y^*||_0 = 1$. Toliau samprotaujame taip. Jei $\mathbb{E}_0 = \mathbb{E}$, tai y^* ir yra ieškomas funkcionalas. Jei $\mathbb{E}_0 \subset \mathbb{E}$, tai, remiantis 11.3 teorema, egzistuoja toks aprėžtas tiesinis funkcionalas x^*, apibrėžtas erdvėje $\mathbb{E}$, kad $x^*(x) = y^*(x)$ su visais $x \in \mathbb{E}_0$ ir $||x^*|| = 1$. Be to, $x^*(y) = y^*(y) = 0$ su visais $y \in \mathbb{F}$ ir $x^*(x) = y^*(x) = \delta$. Taigi šiuo atveju x^* yra ieškomasis funkcionalas. ∎

11.1 išvada. *Sakykime, $\mathbb{E}$ – tiesinė normuota erdvė virš skaliarų kūno $\mathbb{K}$, $\mathbb{F}$ – jos poerdvis. Jei $x \in \mathbb{E} \backslash \mathbb{F}$, tai egzistuoja toks tiesinis tolydusis funkcionalas x^*, apibrėžtas erdvėje $\mathbb{E}$, kad $x^*(x) \neq 0$ ir $x^*(y) = 0$, jei $y \in \mathbb{F}$.*

Įrodymas. Pažymėkime $\delta = d(x, \mathbb{F})$. Kadangi pagal normuotos erdvės poerdvio apibrėžimą aibė $\mathbb{F}$ yra uždara ir $x \notin \mathbb{F}$, tai $\delta > 0$. Lieka pasiremti 11.4 teorema. ∎

11.2 išvada. *Tarkime, $\mathbb{E}$ – tiesinė normuota erdvė virš skaliarų kūno $\mathbb{K}$. Jei $x \in \mathbb{E}$, $x \neq 0$, tai egzistuoja toks erdvės $\mathbb{E}$ tiesinis tolydusis funkcionalas x^*, kad $x^*(x) = ||x||$ ir $||x^*|| = 1$.*

Įrodymas. Reikia pritaikyti 11.4 teoremą, kai $\mathbb{F} = \{0\}$. ∎

11.3 išvada. *Jei $x_1, x_2 \in \mathbb{E}$, $x_1 \neq x_2$, tai egzistuoja toks $x^* \in \mathbb{E}^*$, kad $x^*(x_1) \neq x^*(x_2)$ ir $||x^*|| = 1$.*

Įrodymas. Reikia pritaikyti 11.2 išvadą, kai $x = x_1 - x_2$. ∎

11.4 išvada. *Jei elementai* $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{E}$ *– tiesiškai nepriklausomi, tai egzistuoja tokie* $x_1^*, \ldots, x_n^* \in \mathbb{E}^*$, *kad*

$$x_k^*(x_m) = \delta_{km}, \quad k, m = 1, \ldots, n.$$

Įrodymas. Tarkime, $\mathcal{L}_1 = \mathrm{tap}\{x_2, \ldots, x_n\}$. Iš $\{x_1, \ldots, x_n\}$ tiesinio nepriklausomumo išplaukia, kad

$$\delta = \rho(x_1, \mathcal{L}_1) > 0.$$

Remiantis 11.4 teorema, egzistuoja toks $y_1^* \in \mathbb{E}^*$, kad $y_1^*(x_1) = \delta$ ir $y_1^*(x) = 0$, kai $x \in \mathcal{L}_1$. Taigi $y_1^*(x_k) = 0$, kai $k = 2, \ldots, n$. Apibrėžkime $x_1^* = \delta^{-1} y_1^*$. Analogiškai, imdami x_2 ir $\mathcal{L}_2 = \mathrm{tap}\{x_1, x_3, \ldots, x_n\}$, gauname funkcionalą x_2^* ir t.t. ∎

Kaip jau pastebėjome, $\mathbb{E}^*$ yra Banacho erdvė, kurioje norma nusakyta formule

$$||x^*|| = \sup\{|x^*(x)| : x \in E, ||x|| \leq 1\}.$$

Pasirodo, erdvės $\mathbb{E}$ normai teisinga duali formulė.

11.5 išvada. *Jei* $x \in \mathbb{E}$, *tai*

$$||x|| = \sup\{|x^*(x)| : x^* \in \mathbb{E}^*, ||x^*|| \leq 1\}.$$

Įrodymas. Išplaukia iš 11.2 išvados ir jungtinės erdvės normos apibrėžimo. ∎