1 paskaita

1.1 Aibių teorijos elementai

Nė viena iš matematikos šakų negali išsiversti be aibės sąvokos ar bent elementariųjų aibių teorijos elementų. Ne išimtis ir funkcinė analizė. Skaitytojų patogumui šiame trumpame įvade surinktos tos pagrindinės aibių teorijos sąvokos, apibrėžimai bei tvirtinimai, kurių vėliau tikrai prireiks.

$\diamond$ *Aibe* vadiname tam tikrų matematinių objektų rinkinį, visumą ir dažniausiai aprašome kokiu nors būdu nusakydami jos elementus. Pavyzdžiui, realiųjų skaičių aibė, kvadratinių $n \times n$ matricų aibė, tolydžiųjų funkcijų, apibrėžtų intervale $[0, 1]$, aibė ir pan. Jei A – kažkokia aibė, tai $x \in A$ reiškia, kad x yra tos aibės elementas. Jei elementas x nepriklauso aibei A, tai rašoma $x \notin A$. Raide $\mathbb{R}$ įprasta žymėti realiųjų skaičių aibę, o užrašu $\{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$ aprašoma teigiamų realiųjų skaičių aibė. Kai iš teksto visiškai aišku, kad kalbama apie realiuosius skaičius, rašoma trumpiau $\{x : x > 0\}$. Apskritai, norėdami išskirti kokios nors aibės A elementus, turinčius sąvybę P, rašome $\{x \in A : P\}$ arba, jei aišku apie kokios aibės elementus kalbame, trumpiau $\{x : P\}$.

Šioje knygoje $\mathbb{C}$ žymės kompleksinių, $\mathbb{N}$ – natūraliųjų, o $\mathbb{Q}$ – racionaliųjų skaičių aibes. Kompleksinio skaičiaus $z = a + \imath b \quad (\imath = \sqrt{-1})$ realiąją ir menamąją dalis žymėsime atitinkamai $\Re z$ ir $\Im z$.

Tuščia aibe vadinama aibė neturinti nei vieno elemento ir ji žymima $\emptyset$. Aibė, susidedanti iš vieno elemento x, žymima $\{x\}$ (atkreipiame dėmesį, kad aibių teorijoje skiriasi x ir $\{x\}$, pvz., $\{\emptyset\} \neq \emptyset$). Jei kiekvienas $x \in A$ yra kartu ir aibės B elementas, tai sakoma, kad A yra B *poaibis* ir rašoma $A \subset B$ arba $B \supset A$. Jei $A \subset B$ ir $B \subset A$, tai aibės A ir B sutampa, ir tai žymima $A = B$. Jei A yra kokia nors aibė, tai 2^A žymi visų aibės A poaibių aibę. Jei A turi 3 elementus, tai 2^A turi $2^3 = 8$ elementus, o $2^\emptyset = \{\emptyset\} \neq \emptyset$. Tai paaiškina žymėjimo 2^A pasirinkimą.

Dviejų aibių A ir B *sankirta* $A \bigcap B$ yra aibė $\{x : x \in A, x \in B\}$, o *sąjunga* $A \bigcup B = \{x : x \in A \text{ arba } x \in B\}$. Analogiškai bet kokiai indeksų aibei I ir aibių sistemai $\{A_\alpha, \alpha \in I\}$ apibrėžiamos šių aibių sąjunga ir sankirta:

$$\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha = \{x : x \in A_\alpha \ \text{ kuriam nors } \ \alpha \in I\}$$

ir

$$\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha = \{x : x \in A_\alpha \ \text{ su visais } \ \alpha \in I\}.$$

Kiti svarbesni veiksmai su aibėmis yra aibių *skirtumas*

$$A\backslash B = \{x : \ x \in A, \ x \notin B\}$$

bei *simetrinis skirtumas*

$$A\Delta B = (A\backslash B) \cup (B\backslash A).$$

Jei $B \subset A$ tai skirtumas $A\backslash B$ dar vadinamas aibės B *papildiniu* (iki aibės A) ir, tuo atveju, kai aibė A aiški iš konteksto, žymimas B^c.

Aibių $A_1, A_2, \dots, A_d$ *Dekarto sandauga* yra sudaryta iš sutvarkytų rinkinių $(x_1, x_2, \dots, x_d)$, $x_1 \in A_1, \ x_2 \in A_2, \ \dots, x_d \in A_d$ ir žymima

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_d; \qquad A^d = \underbrace{A \times \cdots \times A}_{d \ \ \text{kartų}}.$$

◇ Šioje knygoje terminai *atvaizdis* ir *funkcija* vartojami kaip sinonimai ir užrašas

$$f : X \to Y$$

žymi vienareikšmę funkciją, apibrėžtą aibėje X su reikšmių sritimi aibėje Y: kiekvienam elementui $x \in X$ funkcija f priskiria vienintelį elementą $f(x) = y \in Y$. Simbolis

$$f(A) \ \ \text{žymi aibę} \quad \{f(x) \in Y : x \in A\},$$

kuri vadinama *aibės A vaizdu* (veikiant atvaizdžiui f), o

$$f^{-1}(B) \ \ \text{žymi aibę} \ \ \{x \in X : f(x) \in B\},$$

kuri vadinama *aibės B pirmvaizdžiu*. Atvaizdis $f : X \to Y$ vadinamas

- *siurjekcija* arba aibės X atvaizdžiu *į aibę* Y, jei $f(X) = Y$;
- *injekcija*, jei $f(x_1) \neq f(x_2)$, kai $x_1 \neq x_2$;
- *bijekcija*, jei f yra ir injekcija ir siurjekcija.

Jei $f : X \to Y$ yra bijekcija, tai su kiekvienu $y \in Y$ egzistuoja tik vienas toks elementas $x \in X$, kad $y = f(x)$. Šiuo atveju sakoma, kad egzistuoja funkcijos f *atvirkštinė funkcija*, kuri žymima f^{-1} ir kuri aibę Y atvaizduoja į aibę X pagal šią taisyklę:

$$f^{-1}(y) = x, \quad \text{jei} \quad f(x) = y.$$

Atvaizdžio f apibrėžimo sritį ir reikšmių sritį įprasta žymėti atitinkamai $D(f)$ ir $R(f)$.

Funkcija f vadinama funkcijos g *tęsiniu*, o g – f *siauriniu*, jei $D(g) \subset D(f)$ ir $f(x) = g(x)$, kai $x \in D(g)$. Dvi funkcijos yra lygios, jei sutampa jų apibrėžimo sritys ir reikšmės:

$$f = g, \text{ jei } D(f) = D(g) \text{ ir } f(x) = g(x) \text{ su visais } x \in D(f).$$

Jeigu $f : X \to Y, \; g : Y \to Z$, tai funkcija

$$g \circ f : X \to Z, \quad g \circ f(x) = g(f(x)), \quad \text{kai } x \in X,$$

vadinama funkcijų f ir g *kompozicija*, arba *sudėtine funkcija*.

Jei $A \subset X$, tai aibės A *indikatorinė funkcija* $\chi_A : X \to \mathbb{R}$ yra apibrėžta šia formule:

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{kai } x \in A; \\ 0, & \text{kai } x \notin A. \end{cases}$$

$\diamond$ Labai svarbi yra aibės galios sąvoka. Sakoma, kad dvi aibės A ir B yra *tos pačios galios*, jei egzistuoja abipus vienareikšmė funkcija, atvaizduojanti aibę A į aibę B (aibių A ir B bijekcija). Vaizdžiai ir negriežtai kalbant, tos pačios galios aibės turi tą patį elementų skaičių (negriežtumas kyla todėl, kad neaišku, ką reiškia „elementų skaičius“, kai aibės jų turi be galo daug). Aibė A yra *baigtinė*, jei ji yra tos pačios galios kaip aibė $\{0, 1, \ldots, n-1\}$, t.y. aibė A turi n elementų su kuriuo nors baigtiniu $n \in \mathbb{N}$. Priešingu atveju aibė A – *begalinė*. Pavyzdžiui, sveikųjų skaičių aibė $\mathbb{N}$ yra begalinė. Aibė B vadinama *skaičia*, jei ji yra tos pačios galios kaip aibė $\mathbb{N}$.[1] Pavyzdžiui, norint įsitikinti, kad $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ yra skaiti aibė, užtenka pastebėti, kad $f(n, m) = 2^m(2n + 1) - 1$ atvaizduoja $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ į $\mathbb{N}$ abipus vienareikšmiškai. Iš čia nesunku išvesti ir šią gerai žinomą skaičių aibių savybę.

1.1 teiginys. *Skaiti skaičių aibių sąjunga yra skaiti aibė.*

[1] Kai kuriuose vadovėliuose į skaičios aibės sąvoką įjungiamos ir baigtinės aibės bei apibrėžiamos skaičiai begalinės aibės.

Jei aibė nėra nei baigtinė nei skaiti, tai ji vadinama *neskaičia*. Pavyzdžiui, bet kuris netuščias realiųjų skaičių intervalas yra neskaiti aibė.

Sakome, kad aibė A yra *mažesnės galios* nei B, jei egzistuoja abipus vienareikšmė funkcija, atvaizduojanti A aibėje B, bet neegzistuoja jokia abipus vienareikšmė funkcija, kuri atvaizduotų A į B. Kadangi kiekvienam baigtiniam sveikam skaičiui n galioja $n < 2^n$, todėl baigtinė aibė A yra mažesnės galios negu 2^A . Šis teiginys teisingas bet kokios galios aibėms, t. y., bet kuri aibė A yra mažesnės galios negu 2^A . Taigi ir $\mathbb{N}$ yra mažesnės galios negu $2^{\mathbb{N}}$, todėl $2^{\mathbb{N}}$ yra neskaiti ir vadinama *kontinumo galios* aibe. Tiek aibė $\mathbb{R}$, tiek bet kuris jos intervalas turi kontinumo galią.

Paprastai aibės galia palydima jos *kardinaliuoju skaičiumi*. Baigtinės aibės kardinalusis skaičius lygus tos aibės elementų skaičiui. Aibės $\mathbb{N}$ kardinalusis skaičius žymimas $\aleph_0$, o kontinumo galios aibės kardinalusis skaičius tradiciškai žymimas raide c (nuo angliško žodžio „continuum“).

$\diamond$ Aibės S elementų *binariniu sąryšiu* vadinamas bet kuris poaibis $E \subset S \times S$. Jei $(x, y) \in E$ tai sakoma, kad elementas $x \in S$ susijęs su elementu $y \in S$ sąryšiu E. Norėdami tai pažymėti, rašome xEy. Aibės S elementų sąryšis E vadinamas:

- *refleksyviu*, jei xEx su kiekvienu $x \in S$;
- *asimetrišku*, jei iš xEy ir yEx išplaukia $x = y$;
- *tranzityviu*, jei iš xEy, yEz išplaukia xEz;
- *simetrišku*, jei iš xEy išplaukia yEx.

Refleksyvus simetriškas tranzityvus sąryšis vadinamas *ekvivalentumo sąryšiu*. Jis yra tam tikras elementų lygybės apibendrinimas. Pavyzdžiui, du sveikieji skaičiai m ir n yra lygūs $\mod (p)$ ($m = n \mod (p)$) tada ir tik tada, kai $m - n$ dalijasi iš p. Nesunku matyti, kad lygbė $\mod (p)$ yra sveikųjų skaičių ekvivalentumo sąryšis.

Jei E – aibės S ekvivalentumo sąryšis ir $x \in S$, tai aibė $\{y \in S : yEx\}$ vadinama *ekvivalentumo klase*, atitinkančią elementą x ir dažnai žymima $[x]$ (arba $[x]_E$, kai reikia pabrėžti sąryšį E). Dvi ekvivalentumo klasės yra arba lygios, arba nesikerta.

Refleksyvus asimetriškas tranzityvus sąryšis vadinamas aibės *daline tvarka*. Pora (S, E), kai E – dalinis sąryšis, vadinama *iš dalies sutvarkyta aibe*. Jos poaibis $V \subset S$ vadinamas *tiesiškai sutvarkytu*, jei bet kurie du jos elementai yra palyginami, t.y. jei $x, y \in V$, tai arba xEy, arba yEx. Pavyzdžiui, bet kuriai aibei X visų jos poaibių aibės $S = 2^X$ sąryšis $E : xEy$ tada ir tik tada, kai $x \subset y$, yra dalinė tvarka. Realiųjų skaičių aibės $\mathbb{R}$ sąryšis $E : xEy$

tada ir tik tada, kai $x \leq y$, yra tiesinė tvarka. Žinoma, kad visos aibės $\mathbb{R}^2$ tiesinė tvarka neegzistuoja.

Labai dažnai dalinė tvarka žymima vienu iš simbolių $\prec, \preceq, \succ, \succeq$. Tarkime, $(S, \prec)$ – iš dalies sutvarkyta aibė. Aibės $A \subset S$ *viršutinis rėžis* (arba *mažorantė*) (dalinės tvarkos $\prec$ atžvilgiu) yra toks elementas $x \in S$, kad $y \prec x$ su visais $y \in A$. Jei aibei A egzistuoja mažorantė, tai ta aibė vadinama *aprėžta iš viršaus*. Elementas $x \in S$ yra aibės A *tikslusis viršutinis rėžis*, jei

- x yra aibės A viršutinis rėžis;
- jei $z \in S$ yra kitas aibės A viršutinis rėžis, tai būtinai $x \prec z$.

Tikslusis viršutinis rėžis gali būti tik vienas. Aibės A tikslusis viršutinis rėžis, jei jis egzistuoja, žymimas $\sup A$. Taip pat naudojami žymenys

$$\max_{1 \leq i \leq n} x_i, \quad x_1 \vee \cdots \vee x_n,$$

kai $A = \{x_1, \ldots, x_n\}$ – baigtinė aibė ir

$$\sup_{i \geq 1} x_i,$$

kai aibė $A = \{x_i, i \in \mathbb{N}\}$ yra skaiti.

Aibės A viršutinis rėžis, kuris priklauso A vadinamas jos A *maksimaliuoju elementu* ir žymimas $\max A$. Maksimalus elementas, jei jis egzistuoja, būtinai yra ir tikslusis viršutinis rėžis.

Visiškai analogiškai apibrėžiami aibės A *apatinis rėžis*, *tikslusis apatinis rėžis* $\inf A$ bei *minimalusis elementas* $\min A$. Analogiškai naudojami ir žymenys

$$\min_{1 \leq i \leq n} x_i, \quad x_1 \wedge \cdots \wedge x_n, \quad \inf_{i \geq 1} x_i.$$

Vienas iš svarbiausių aibių teorijos teiginių yra vadinamoji Corno lema, kurią M. A. Cornas įrodė apie 1936 metus ir vadino „maksimumo principu“.

1.1 lema. (Corno lema.) *Jei S yra tokia netuščia iš dalies sutvarkyta aibė, kad kiekvienas tiesiškai sutvarkytas jos poaibis turi viršutinį rėžį, tai egzistuoja aibės S maksimalus elementas.*

Šio teiginio prasmę grubiai galime paaiškinti taip. Tarkime, $\preceq$ – aibės S dalinė tvarka ir x kuris nors tos aibės elementas. Jei jis nėra maksimalusis, tai egzistuoja kitas elementas $y \in S$ ir $x \preceq y$. Jei ir y nėra maksimalusis elementas, tai atsiras toks $z \in S$, kad $y \preceq z$. Be to, tie trys elementai

x, y, z sudarys tiesiškai sutvarkytą aibės S poaibį. Jei z nėra maksimalusis, tai procesą tęsiame toliau. Taip vis gauname tiesiškai sutvarkytą poaibį. Pagal prielaidą, tas poaibis turi viršutinį rėžį, tarkime, a. Jei a nebus maksimaliuoju, tai egzistuos už jį didesnis elementas, kurį vėl prijungsime prie nagrinėjamos aibės. Corno lema reiškia, kad tas procesas galiausiai turi užsibaigti maksimaliuoju elementu.

Corno lema yra ekvivalenti kitam gerai žinomam aibių teorijos teiginiui – išrinkimo aksiomai.

1.2 lema. (Išrinkimo aksioma.) *Tarkime, $\{A_\alpha, \alpha \in I\}$ – netuščių aibių šeima, indeksuota netuščia aibe I. Tuomet egzistuoja toks atvaizdis*

$$f : I \to \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha,$$

kad $f(\alpha) \in A_\alpha$ su kiekvienu $\alpha \in I$.

Ši aksioma pagrindžia bet kurios netuščių aibių šeimos Dekarto sandaugos apibrėžimą. Netuščių aibių šeimos $\{A_\alpha, \alpha \in I\}$ Dekarto sandauga $\prod_{\alpha \in I} A_\alpha$ vadiname visumą tokių funkcijų $f : I \to \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$, kad $f(\alpha) \in A_\alpha$ su kiekvienu $\alpha \in I$.

1.2 Metrinės erdvės

Skaičių sekos riba yra viena iš svarbiausių matematinės analizės sąvokų. Ji naudojama apibrėžiant funkcijos tolydumą, išvestinę bei apibrėžtinį integralą. Apibrėždami skaitinės sekos ribą, išnaudojame tik atstumą tarp realiųjų skaičių, kuris aprašomas skirtumo moduliu $|a - b|, \ \ a, b \in \mathbb{R}$. Taigi apibendrinant ribą, pirmiausia turime apibendrinti atstumo sąvoką. Šiame skyriuje nagrinėjamos metrinės erdvės ir yra tokios abstrakčių elementų aibės, kurių elementams apibrėžtas atstumas. Tai leidžia šioms erdvėms apibendrinti klasikines matematines sąvokas: elementų sekos ribą bei funkcijų tolydumą.

Metrinę erdvę pirmasis apibrėžė M. R. Frešėapie 1906 metus, bet terminą „metrinė erdvė“ pirmasis pasiūlė F. Hausdorfas

1.2.1 Apibrėžimas ir pavyzdžiai

Kaip ir daugelis kitų šiuolaikinės matematikos sąvokų, atstumas tarp aibės elementų apibrėžiamas aksiomų pagalba.

1.1 apibrėžimas. *Tarkime,* $\mathbb{X}$ *– netuščia aibė. Funkcija* $d : \mathbb{X} \times \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ *vadinama aibės* $\mathbb{X}$ *metrika (atstumo funkcija), jei teisingos šios aksiomos: su visais* $x, y, z \in \mathbb{X}$*,*

$(M1)$ $\quad d(x, y) \geq 0;$

$(M2)$ $\quad d(x, y) = 0$ *tada ir tik tada, kai* $x = y$ *(vienaties);*

$(M3)$ $\quad d(x, y) = d(y, x)$ *(simetriškumo);*

$(M4)$ $\quad d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ *(trikampio nelygybės).*

Skaičius $d(x, y)$ *vadinamas atstumu tarp elementų* x *ir* y*. Pora* $(\mathbb{X}, d)$ *vadinama metrine erdve.*

Toje pačioje aibėje $\mathbb{X}$ metriką galime apibrėžti daugeliu būdų (žinoma, išskyrus trivialųjį atvejį, kai $\mathbb{X}$ sudaryta iš vieno elemento). Jei iš konteksto aišku kokia metrika d apibrėžta, vietoje poros $(\mathbb{X}, d)$ rašysime tik $\mathbb{X}$.

Jei $(\mathbb{X}, d)$ – metrinė erdvė ir $\mathbb{Y} \subset \mathbb{X}$, tai funkcijos d siaurinys aibėje $\mathbb{Y} \times \mathbb{Y}$ yra aibės $\mathbb{Y}$ metrika. Ją žymėsime ta pačia raide d, o metrinę erdvę $(\mathbb{Y}, d)$ vadinsime *metrinės erdvės* $(\mathbb{X}, d)$ *poerdviu.*

1.1 pavyzdys. Patys paprasčiausi metrinių erdvių pavyzdžiai yra bet kuri realiųjų skaičių aibė $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{R}$ bei bet kuri kompleksinių skaičių aibė $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{C}$, kai atstumas tarp skaičių apibrėžiamas jų skirtumo moduliu:

$$d(x, y) = |x - y|, \quad \text{kai} \quad x, y \in \mathbb{X}.$$

Nesunku patikrinti, kad funkcija d tenkina (M1)–(M4) aksiomas. Ši atstumo funkcija dažnai vadinama euklidine metrika.

1.2 pavyzdys. Aibėje $\mathbb{R}^k$ (analogiškai $\mathbb{C}^k$), sudarytoje iš sutvarkytų k realiųjų (kompleksinių) skaičių rinkinių $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_k)$ (vadinamų k-mačiais vektoriais), dažniausiai nagrinėjama *euklidinė metrika*

$$d_2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \Big(\sum_{j=1}^{k} |x_j - y_j|^2 \Big)^{1/2},$$

kai $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_k)$, $\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_k)$. Metrikos aksiomas šiai funkcijai įrodysime 1.2.3 skyrelyje (žr. 1.11 pavyzdį).

Tiek aibėje $\mathbb{R}^k$, tiek $\mathbb{C}^k$ atstumą tarp taškų galime apibrėžti ir kitais būdais. Pavyzdžiui, bet kuriems realiųjų ar kompleksinių skaičių k-mačiams vektoriams $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_k)$ ir $\boldsymbol{y} = (x_1, \ldots, y_k)$ galime nagrinėti

$$\begin{aligned} d_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) &= |x_1 - y_1| + \cdots + |x_k - y_k|, \\ d_\infty(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) &= \max\{|x_1 - y_1|, \ldots, |x_k - y_k|\}. \end{aligned}$$

Nesunku įsitikinti, kad abi funkcijos d_1 ir d_∞ tenkina metrikos aksiomas. Tačiau visais atvejais, kai nebus pasakyta kitaip, aibėms $\mathbb{R}^k$, $\mathbb{C}^k$ fiksuota euklidinė metrika $d = d_2$.

1.3 pavyzdys. Bet kuriai netuščiai aibei $\mathbb{X}$ galime apibrėžti taip vadinamą *diskrečiąją metriką*

$$d(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{kai } x \neq y \\ 0, & \text{kai } x = y. \end{cases}$$

Taip apibrėžtai funkcijai $d : \mathbb{X} \times \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ $(M1) - (M3)$ aksiomos akivaizdžiai teisingos. Norėdami patikrinti $(M4)$ aksiomą, pirmiausia pastebėkime, kad ji yra tikrai teisinga, kai $x = z$. Jei $x \neq z$, tai $d(x, z) = 1$. Bet šiuo atveju arba $y \neq z$, arba $y \neq x$, todėl $d(x, y) + d(y, z) \geq 1$. Taip sukonstruota metrinė erdvė $(\mathbb{X}, d)$ vadinama *diskrečiąja*.

Funkcinės analizės taikymams toli gražu nepakanka tokių paprastų metrinių erdvių.

1.2.2 Funkcijų erdvės

Metrinės erdvės, kurių elementai yra realiosios arba kompleksinės funkcijos, labai dažnai pasirodo įvairiose matematikos srityse. Šiame skyrelyje apibrėšime kai kurias klasikines funkcijų erdves. Jų elementus žymėsime analizėje labiau įprastais žymenimis $f, g, \ldots$

Tegu $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

1.4 pavyzdys. *Erdvė* $\mathcal{C}[a, b]$.

Ją sudaro tolydžiųjų funkcijų $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ aibė $\mathcal{C}[a, b]$ su metrika

$$d(f, g) = \sup_{t \in [a, b]} |f(t) - g(t)|, \tag{1.1}$$

kai $f, g \in \mathcal{C}[a, b]$. Priminsime, kad funkcijos, apibrėžtõs uždarame intervale $[a, b]$, tolydumas taške a suprantamas kaip tolydumas iš dešinės, o taške b – iš kairės. Be to, pastebėsime, kad (1.1) apibrėžime tikslusis viršutinis rėžis išties yra maksimumas, tačiau tradiciškai susiklostė būtent toks metrinės erdvės $\mathcal{C}[a, b]$ atstumo funkcijos žymėjimas.

Akivaizdu, kad $d(f, g) = 0$ tada ir tik tada, kai $f(t) = g(t)$ su kiekvienu $t \in [a, b]$. Simetriškumo aksioma $d(f, g) = d(g, f)$ taip pat akivaizdi. Trikampio nelygybė funkcijoms $f, g, h \in \mathcal{C}[a, b]$ įrodoma taip:

$$\begin{aligned}
&|f(t) - g(t)| \leq |f(t) - h(t)| + |h(t) - g(t)| \leq \\
&\sup_{t\in[a,b]} |f(t) - h(t)| + \sup_{t\in[a,b]} |h(t) - g(t)| = d(f, h) + d(h, g).
\end{aligned}$$

Gautoji nelygybė teisinga su bet kuriuo $t \in [a, b]$, taigi ir su tuo, kuriam skirtumas $|f(t) - g(t)|$ yra didžiausias.

1.5 pavyzdys. *Erdvė* $\mathcal{C}(\mathbb{R})$.

Ją sudaro tolydžiųjų funkcijų $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ aibė $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ su metrika

$$d(f, g) = \sum_{K=1}^{\infty} 2^{-K} \frac{\sup_{t\in[-K,K]} |f(t) - g(t)|}{1 + \sup_{t\in[-K,K]} |f(t) - g(t)|}, \tag{1.2}$$

kai $f, g \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$. Patikrinti metrikos aksiomas paliekame skaitytojui vietoje pratimo (analogiškas yra ir 1.10 pavyzdys).

1.6 pavyzdys. *Erdvė* $\mathcal{B}[a, b]$.

Ją sudaro aprėžtųjų funkcijų $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ aibė $\mathcal{B}[a, b]$ su (1.1) formule apibrėžta metrika. Kadangi kiekviena tolydi funkcija uždarame intervale yra aprėžta, tai $\mathcal{C}[a, b]$ yra metrinės erdvės $\mathcal{B}[a, b]$ poerdvis.

1.7 pavyzdys. *Erdvės* $\mathcal{C}^k[a, b]$, $k \geq 1$.

Ją sudaro tolydžiai k kartų diferencijuojamų funkcijų $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ intervale $[a, b]$ aibė $\mathcal{C}^k[a, b]$ su metrika

$$d(f, g) = \sum_{i=0}^{k} \sup_{t\in[a,b]} |f^{(i)}(t) - g^{(i)}(t)|, \quad f, g \in \mathcal{C}^k[a, b].$$

Čia ir toliau $f^{(i)}(t), i = 1, 2, \ldots$ žymi i-tąją funkcijos f išvestinę taške t, o $f^{(0)}(t) = f(t)$. Priminsime, kad funkcijos, apibrėžtõs uždarajame intervale

$[a, b]$, diferencijuojamumas intervalo gale a suprantamas kaip diferencijuojamumas iš dešinės, o taške b – iš kairės. Skaitytojui siūlome pačiam patikrinti atstumo funkcijos aksiomas.

1.8 pavyzdys. *Lebego erdvės* $L_p(a, b)$, $0 < p \leq \infty$.

Šiame pavyzdyje intervalas (a, b) gali būti ir begalinis, $(a, +\infty), (-\infty, b)$ ar $(-\infty, +\infty)$. Vietoj $L_p(-\infty, +\infty)$ taip pat rašysime $L_p(\mathbb{R})$.

Kai $0 < p < \infty$, aibę $L_p(a, b)$ sudaro tokios mačiosios funkcijos $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, kurioms yra baigtinis Lebego integralas $\int_a^b |f(t)|^p dt$.

Dvi mačias funkcijas laikydami lygiomis kai jos sutampa beveik visur[2], aibės $L_p[a, b]$ metriką apibrėžiame formule

$$d(f, g) = \begin{cases} \Big(\int_a^b |f(t) - g(t)|^p dt \Big)^{1/p}, & \text{jei } p \geq 1, \\ \int_a^b |f(t) - g(t)|^p dt, & \text{jei } 0 < p < 1, \end{cases} \tag{1.3}$$

kai $f, g \in L_p(a, b)$.

Iš Lebego integralo savybių žinome, kad $\int_a^b |f(t) - g(t)|^p dt = 0$ tada ir tik tada, kai $m\{t \in [a, b] : |f(t) - g(t)| \neq 0\} = 0$. Vadinasi, $d(f, g) = 0$ tada ir tik tada, kai $f = g$ (pagal susitarimą). Simetriškumo aksioma akivaizdžiai teisinga. Kai $0 < p \leq 1$, trikampio nelygybė funkcijai d išplaukia iš elemetarios nelygybės

$$|a + b|^\alpha \leq |a|^\alpha + |b|^\alpha, \quad a, b \in \mathbb{C}, \quad 0 < \alpha \leq 1. \tag{1.4}$$

Kai $p > 1$, reikia pasinaudoti šia Minkovskio nelygybe.

> Tarkime, $p > 1$. Su bet kuriomis mačiosiomis realiomis arba kompleksinėmis funkcijomis f, g, apibrėžtomis mačiojoje erdvėje $(S, \mathcal{S})$, teisinga nelygybė
>
> $$\Big(\int_S |f(s)+g(s)|^p \mu(ds) \Big)^{1/p} \leq \Big(\int_S |f(s)|^p \mu(ds) \Big)^{1/p} + \Big(\int_S |g(s)|^p \mu(ds) \Big)^{1/p}. \tag{1.5}$$

Erdvę $L_\infty(a, b)$ sudaro beveik visur Lebego mato prasme aprėžtos mačiosios funkcijos $f : (a, b) \to \mathbb{R}$. Funkcija f yra beveik visur aprėžta, kai egzistuoja toks skaičius C, su kuriuo

$$m(t \in (a, b) : |f(t)| > C) = 0.$$

[2] jei Lebego matą pažymėsime m, tai $f = g$ tada ir tik tada, kai $m\{t \in [a, b] : f(t) \neq g(t)\} = 0$

Tikslusis apatinis tokių skaičių C rėžis vadinamas esminiu funkcijos f supremumu ir žymimas ess $\sup(f)$:

$$\text{ess}\,\sup(f) = \inf\{C > 0 : m(t \in (a,b) : |f(t)| > C) = 0\}.$$

Atstumas tarp funkcijų $f, g \in L_\infty(a,b)$ apibrėžiamas taip:

$$d(f,g) = \inf\{C > 0 : m(t \in (a,b) : |f(s) - g(s)| > C) = 0\}. \tag{1.6}$$

Įrodykime, kad taip apibrėžta funkcija tikrai tenkina metrikos aksiomas. Pirmiausia pastebėkime, kad $d(f,g) = 0$ tada ir tik tada, kai $m(t \in (a,b) : |f(t) - g(t)| > 0) = 0$. Tai, savo ruožtu, reiškia, jog funkcijos f ir g sutampa beveik visur. Taigi pagal susitarimą, $f = g$. Akivaizdu, kad $d(f,g) = d(g,f)$. Lieka patikrinti trikampio nelygybę. Imkime tris funkcijas $f, g, h \in L_\infty(a,b)$ ir pažymėkime $a = d(f,h), b = d(h,g)$. Pagal funkcijos d apibrėžimą,

$$m(t \in (a,b) : |f(t) - h(t)| > a + \varepsilon) = 0$$

ir

$$m(t \in (a,b) : |h(t) - g(t)| > b + \varepsilon) = 0$$

su kiekvienu $\varepsilon > 0$. Kadangi

$$\begin{aligned}
&m(t \in (a,b) : |f(t) - g(t)| > a + b + 2\varepsilon) \leq \\
&m(t \in (a,b) : |f(t) - h(t)| > a + \varepsilon) + \\
&m(t \in (a,b) : |h(t) - g(t)| > b + \varepsilon) = 0,
\end{aligned}$$

tai $d(f,g) \leq a + b + 2\varepsilon$. Iš čia išplaukia trikampio nelygybė, nes $\varepsilon > 0$ laisvai pasirinktas skaičius.

1.1 pastaba. Norime atkreipti dėmesį į susitarimą sutampančias beveik visur Lebego mato prasme funkcijas laikyti lygiomis. Ne visada tai yra patogu ir dažnai tenka nagrinėti kiek kitokį erdvių $L_p(a,b)$ apibrėžimą. Trumpai paaiškinsime. Nagrinėkime aibę $\mathcal{L}_p(a,b)$ sudarytą iš tokių mačių funkcijų $f : (a,b) \to \mathbb{R}$, kurioms yra baigtinis Lebego integralas $\int_a^b |f(t)|^p dt$. Funkcijoms $f, g \in \mathcal{L}_p(a,b)$ apibrėžkime binarinį sąryšį $\sim$:

$$f \sim g \ \text{ tada ir tik tada, kai } \ m\{t \in (a,b) : f(t) \neq g(t)\} = 0.$$

Nesunku patikrinti, kad tai yra ekvivalentumo sąryšis. Tikrai, sąryšio $\sim$ refleksyvumas ($f \sim f$) bei simetriškumas (jei $f \sim g$, tai $g \sim f$) nekelia jokių abejonių. Norėdami patikrinti tranzityvumą, tarkime, $f \sim g$ ir $g \sim h$. Pastebėję, kad

$$\{t : f(t) \neq h(t)\} \subset \{t : f(t) \neq g(t)\} \ \cup \ \{t : g(t) \neq h(t)\},$$

įsitikiname, kad $f \sim h$. Vadinasi, sąryšis $\sim$ yra tranzityvus.

Aibę $L_p(a, b)$ sudarykime iš sąryšį $\sim$ atitinkančių ekvivalentumo klasių $[f]$, kai $f \in \mathcal{L}_p(a, b)$. Atstumas $d([f], [g])$ tarp klasių $[f]$ ir $[g]$ apibrėžiamas atitinkamai (1.3) formule, kai $0 < p < \infty$ ir (1.6) formule, kai $p = \infty$, imant bet kuriuos atitinkamų klasių atstovus $f \in [f]$ ir $g \in [g]$, t.y. $d([f], [g]) = d(f, g)$. Nesunku patikrinti, kad taip apibrėžta funkcija d nepriklauso nuo atstovų iš atitinkamų klasių parinkimo ir tenkina (M1) – (M4) aksiomas. Ankstesnis erdvės $L_p(a, b)$ apibrėžimas gaunamas sutapatinus visas ekvivalenčias funkcijas.

1.9 pavyzdys. *Erdvės* $\mathcal{C}_p[a, b]$, $p > 0$, $-\infty < a < b < +\infty$.

Tai aibė $\mathcal{C}[a, b]$ su metrika d, apibrežta (1.3) formule. Tik pastebėsime, kad joje Lebego integralas sutampa su Rymano, nes integruojamos tolydžios funkcijos. Be to, dvi tolydžios funkcijos yra ekvivalenčios tada ir tik tada, kai jos yra lygios (įprastine prasme). Taigi tolydžioms funkcijoms $\int_a^b |f(t) - g(t)|^p dt = 0$ tada ir tik tada, kai $f = g$.

1.2.3 Sekų erdvės

Šiame skyrelyje pateiksime klasikinių sekų erdvių apibrėžimus. Skaičių seką $x_1, x_2, \ldots$ trumpiau žymėsime vienu iš simbolių (x_n), $(x_n, n \in \mathbb{N})$. Sekų aibės elementus žymėsime $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \ldots, \boldsymbol{x} = (x_n),\ \boldsymbol{y} = (y_n), \ldots$

1.10 pavyzdys. *Erdvė* $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Aibę $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ sudaro visos realiųjų skaičių sekos. Jos metrika apibrėžiama formule

$$d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \frac{|x_k - y_k|}{1 + |x_k - y_k|}, \quad \text{kai } \ \boldsymbol{x} = (x_n),\ \boldsymbol{y} = (y_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}.$$

Čia eilutė konverguoja, nes jos n-tasis narys neviršija 2^{-n}. Taip apibrėžtai funkcijai $d : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$ prmosios trys atstumo funkcijos aksiomos (M1)-(M3) akivaizdžiai teisingos. Norint patikrinti trikampio nelygybę, reikia pasinaudoti nelygybe

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|} \le \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|}, \tag{1.7}$$

kuri yra teisinga su visais $a, b \in \mathbb{R}$. Savo ruožtu, (1.7) nesunkiai išvedama iš to, kad funkcija $f(x) = x/(1+x),\ x \ge 0$, yra didėjanti.

1.11 pavyzdys. *Erdvės* $\ell_p, p > 0$.

Simboliu ℓ_p žymime aibę, sudarytą iš realiųjų skaičių sekų $\boldsymbol{x} = (x_n)$, kurioms eilutė $\sum_n |x_n|^p$ konverguoja:

$$\ell_p = \Big\{ \boldsymbol{x} = (x_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \sum_n |x_n|^p < \infty \Big\}.$$

Bet kuriems $\boldsymbol{x} = (x_n) \in \ell_p$ ir $\boldsymbol{y} = (y_n) \in \ell_p$, apibrėžkime

$$d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \begin{cases} \Big(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k - y_k|^p\Big)^{1/p}, & \text{kai } p \ge 1; \\ \sum_{k=1}^{\infty} |x_k - y_k|^p, & \text{kai } 0 < p < 1. \end{cases}$$

Įrodysime, kad d yra erdvės ℓ_p metrika. Tam pakanka patikrinti trikampio nelygybę, nes kitos aksiomos akivaizdžiai teisingos. Pirmiausia tarkime, kad $p \ge 1$. Paėmę $\boldsymbol{x} = (x_n)$, $\boldsymbol{z} = (z_n)$, $\boldsymbol{y} = (y_n) \in \ell_p$, pažymėkime $u_k = x_k - z_k$ ir $v_k = z_k - y_k,\quad k \ge 1$. Tarkime, $N > M$. Remiantis Minkovskio (1.5) nelygybe

$$\Big(\sum_{k=1}^{M} |u_k + v_k|^p\Big)^{1/p} \le \Big(\sum_{k=1}^{N} |u_k|^p\Big)^{1/p} + \Big(\sum_{k=1}^{N} |v_k|^p\Big)^{1/p}.$$

Perėję prie ribos, kai $N \to \infty$, gauname

$$\Big(\sum_{k=1}^{M} |u_k + v_k|^p\Big)^{1/p} \le d(x, z) + d(y, z).$$

Lieka pereiti prie ribos, kai $M \to \infty$.

Tuo atveju, kai $0 < p \le 1$, pritaikę elementarią (1.4) nelygybę, išvedame

$$\sum_{k=1}^{M} |u_k + v_k|^p \le \sum_{k=1}^{N} |u_k|^p + \sum_{k=1}^{N} |v_k|^p$$

ir trikampio nelygybės įrodymą užbaigiame analogiškai, pereidami prie ribos kai $N \to \infty$ ir $M \to \infty$.

1.12 pavyzdys. *Erdvė ℓ_∞.*

Simboliu ℓ_∞ žymime aibę, sudarytą iš aprėžtų skaitinių sekų:

$$\boldsymbol{x} = (x_n) \in \ell_\infty \quad \text{tada ir tik tada, kai} \quad \sup_n |x_n| < \infty.$$

Atstumas tarp sekų $\boldsymbol{x} = (x_n)$ ir $\boldsymbol{y} = (y_n) \in \ell_\infty$ yra

$$d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sup_{k \geq 1} |x_k - y_k|. \tag{1.8}$$

Akivaizdu, kad šiai funkcijai teisingos pirmosios trys metrikos aksiomos. Trikampio nelygybė patikrinama paprastai. Kadangi su kiekvienu $k \geq 1$,

$$|x_k - y_k| \leq |x_k - z_k| + |z_k - y_k| \leq d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) + d(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{y}),$$

todėl ir

$$d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sup_{k \geq 1} |x_k - y_k| \leq d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) + d(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{y}).$$

1.13 pavyzdys. *Erdvė c_0.*

Aibę c_0 sudaro visos konverguojančios į nulį skaičių sekos:

$$\boldsymbol{x} = (x_n) \in c_0 \quad \text{tada ir tik tada, kai} \quad \lim_{n \to \infty} x_n = 0.$$

Erdvės c_0 metrika apibrėžiama (1.8) formule. Kadangi konverguojančios sekos yra aprėžtos, c_0 yra metrinės erdvės ℓ_∞ poerdvis.

Kompleksinių skaičių sekų ℓ_p, $0 < p \leq \infty$, c_0 ir $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ erdvės apibrėžiamos analogiškai.