GEOMETRIJOS UŽDAVINIAI

1. Rasti taško $A(a_1, a_2, a_3)$ atstumą $\rho(A, S^2)$ iki sferos S^2. Sferos S^2 lygtis tokia:

$$S^2: \ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = R^2.$$

Taškas A gali būti tiek sferos išorėje, tiek ir viduje.

Sprendimas. Sprendimas labai paprastas ir paliekamas skaitytojui.

2. Rasti tiesės l atstumą $\rho(l, S^2)$ iki sferos S^2. Tiesės l ir sferos S^2 lygtys tokios:

$$l: \ \frac{x_1 - a_1}{\alpha_1} = \frac{x_2 - a_2}{\alpha_2} = \frac{x_3 - a_3}{\alpha_3}, \quad S^2: \ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = R^2.$$

Tiesė ir sfera nesikerta.

Pirmas sprendimas. Raskime tiesės l tokio taško koordinates (u_1, u_2, u_3), kad vektoriai (u_1, u_2, u_3) ir $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ būtų statmeni. Užrašę tiesės taško koordinates parametrine išraiška, gauname:

$$\alpha_1 \cdot (\alpha_1 \cdot t + a_1) + \alpha_2 \cdot (\alpha_2 \cdot t + a_2) + \alpha_3 \cdot (\alpha_3 \cdot t + a_3) = 0.$$

Išsprendę šią lygtį, gauname parametro t reikšmę:

$$t_0 = -\frac{\alpha_1 \cdot a_1 + \alpha_2 \cdot a_2 + \alpha_3 \cdot a_3}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2}.$$

Taigi ieškomas atstumas yra lygus

$$\rho(l, S^2) = \sqrt{(\alpha_1 \cdot t_0 + a_1)^2 + (\alpha_2 \cdot t_0 + a_2)^2 + (\alpha_3 \cdot t_0 + a_3)^2} - R.$$

Atlikę veiksmus, gausite iškomo atstumo išraišką.

Antras sprendimas. Raskime atstumą tarp tiesės l ir sferos centro $O(0,0,0)$. Šis atstumas $\rho(O, l)$ yra lygus

$$\rho(O, l)^2 = \frac{(\alpha_1 \cdot a_2 - \alpha_2 \cdot a_1)^2 + (\alpha_1 \cdot a_3 - \alpha_3 \cdot a_1)^2 + (\alpha_2 \cdot a_3 - \alpha_3 \cdot a_2)^2}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2}.$$

Taigi ieškomas atstumas yra lygus

$$\rho(O, l) = \frac{\sqrt{(\alpha_1 \cdot a_2 - \alpha_2 \cdot a_1)^2 + (\alpha_1 \cdot a_3 - \alpha_3 \cdot a_1)^2 + (\alpha_2 \cdot a_3 - \alpha_3 \cdot a_2)^2}}{\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2}} - R.$$

3. Rasti atstumą $\rho(P, S^2)$ tarp plokštumos P ir sferos S^2. Plokštumos P ir sferos S^2 lygtys tokios:

$$P: \ \alpha_1 \cdot (x_1 - a_1) + \alpha_2 \cdot (x_2 - a_2) + \alpha_3 \cdot (x_3 - a_3) = 0,$$

$$S^2: \; x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = R^2.$$

Plokštuma ir sfera nesikerta.

Sprendimas. Atstumas $\rho(O,P)$ taško O iki plokštumos P yra

$$\frac{|\alpha_1 \cdot a_1 + \alpha_1 \cdot a_1 + \alpha_1 \cdot a_1|}{\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2}}.$$

Ieškomas atstumas yra lygus

$$\rho(P, S^2) = \frac{|\alpha_1 \cdot a_1 + \alpha_1 \cdot a_1 + \alpha_1 \cdot a_1|}{\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2}} - R.$$

4. Rasti tiesės l atstumą $\rho(l,T)$ iki cilindro T. Tiesės l ir cilindro T lygtys tokios:

$$l: \; \frac{x_1 - a_1}{\alpha_1} = \frac{x_2 - a_2}{\alpha_2} = \frac{x_3 - a_3}{\alpha_3}, \quad T: \; x_2^2 + x_3^2 = R^2.$$

Tiesė l ir cilindras T nesikerta.

Pirmas sprendimas. Galimi du atvejai: tiesė yra cilindro viduje ir tiesė yra cilindro išorėje. Pirmuoju atveju tiesė yra lygiagretė cilindro sudaromosioms ir uždavinys suvedamas į tokį uždavinį plokštumoje: rasti atstumą nuo taško, esančio apskritimo viduje, iki apskritimo. Tai paprastas uždavinys ir paliekamas skaitytojui. Taigi spręsime uždavinį antruoju atveju. Tegu (x_{10}, x_{20}, x_{30}) toks cilindro taškas, kuriame cilindro liečiamoji plokštuma P yra lygiagretė tiesei l. Tegu $F = x_2^2 + x_3^2 - R^2$. Tuomet cilindro liečiamosios plokštumos P taške (x_{10}, x_{20}, x_{30}) lygtis atrodo taip:

$$F'_{x_1}(x_{10}) \cdot (x_1 - x_{10}) + F'_{x_1}(x_{20}) \cdot (x_2 - x_{20}) + F'_{x_3}(x_{30}) \cdot (x_3 - x_{30}) = 0$$

arba tiksliau:

$$P: \; x_{20} \cdot (x_2 - x_{20}) + x_{30} \cdot (x_3 - x_{30}) = 0.$$

Taigi šiuo atveju užrašome sąlygą, kad $P||l$:

$$x_{20} \cdot \alpha_2 + x_{30} \cdot \alpha_3 = 0.$$

Jei būtų $\alpha_2 = \alpha_3 = 0$, tai tiesė būtų lygiagretė cilindro sudaromosioms, t.y. tiesei x_1 ir šiuo atveju reikėtų rasti atstumą nuo taško iki apskritimo plokštumoje. Tai labai paprastas uždavinys. Taigi tegu $\alpha_3 \neq 0$. Tuomet

$$x_{30} = -\frac{x_{20} \cdot \alpha_2}{\alpha_3} \Longrightarrow x_{20}^2 + \frac{x_{20}^2 \cdot \alpha_2^2}{\alpha_3^2} = R^2.$$

Išsprendę šią lygtį, gauname:

$$x_{20} = \pm \frac{R \cdot \alpha_3}{\sqrt{\alpha_2^2 + \alpha_3^2}}, \quad x_{30} = \mp \frac{R \cdot \alpha_2}{\sqrt{\alpha_2^2 + \alpha_3^2}}.$$

Taigi atlikę veiksmus, gauname, kad ieškomas atstumas yra lygus

$$\rho(l, T) = \min \frac{| \pm \alpha_3 \cdot a_2 \mp \alpha_2 \cdot a_3 - R \cdot \sqrt{\alpha_2^2 + \alpha_3^2}|}{\sqrt{\alpha_2^2 + \alpha_3^2}}.$$

Antras sprendimas. Raskime atstumą tarp tiesės l ir tiesės l' – ašies x_1. Ašis x_1 aprašoma lygtimis: $x_2 = 0$, $x_3 = 0$. Kadangi

$$(1, 0, 0) \times (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (0, -\alpha_3, \alpha_2),$$

tai

$$\rho(l, l') = \frac{|\alpha_2 \cdot a_3 - \alpha_3 \cdot a_2|}{\sqrt{\alpha_2^2 + \alpha_3^2}}.$$

Ieškomas atstumas yra lygus

$$\rho(l, T) = \frac{|\alpha_2 \cdot a_3 - \alpha_3 \cdot a_2|}{\sqrt{\alpha_2^2 + \alpha_3^2}} - R.$$

5. Rasti atstumą $\rho(A, T)$ tarp plokštunos taško $A(a_1, a_2)$ ir esančios šioje plokštumoje parabolės T. Parabolės lygtis yra tokia:

$$a \cdot x_1^2 - x_2 - b = 0.$$

Sprendimas Šį uždavinį galima spręsti keletą būdų. Tegu (x_{10}, x_{20}) – parabolės taškas, artimiausias taškui A. Tuomet vektorius $(x_{10} - a_1, x_{20} - a_2)$ ir parabolės liestinės taške (x_{10}, x_{20}) normalės vektorius $(2 \cdot a \cdot x_{10}, -1)$ yra proporcingi. Taigi galime užrašyti lygybę:

$$(x_{10} - a_1) \cdot (-1) = (x_{20} - a_2) \cdot 2 \cdot a \cdot x_{10}$$

arba

$$(x_{10} - a_1) \cdot (-1) = (x_{10}^2 - b - a_2) \cdot 2 \cdot a \cdot x_{10}.$$

Sutvarkę, gauname lygtį, kurią tenkina x_{10}:

$$2 \cdot a \cdot x_{10}^3 - 2 \cdot a \cdot (b + a_2) \cdot x_{10} + x_{10} - a_1 = 0$$

6. Rasti tiesės l atstumą $\rho(l, T)$ iki cilindro T. Tiesės l ir cilindro T lygtys tokios:

$$l: \frac{x_1 - a_1}{\alpha_1} = \frac{x_2 - a_2}{\alpha_2} = \frac{x_3 - a_3}{\alpha_3}, \quad T: x_2^2 + x_3 - b = 0.$$

Tiesė l ir cilindras T nesikerta.

Sprendimas. Šis uždavinys sprendžiamas panašiai kaip ir 4-as. Tad paliekame šį uždavinį išspręsti skaitytojui.

7. Tegu $A_j(a_{1j}, a_{2j}, a_{3j})$, $1 \leqslant j \leqslant 4$, – taškai, nepriklausantys jokiai plokštumai. Įrodykite, kad keturios tiesės, išvestos per taškus A_j ir priešais esančių trikampių pusiaukraštinių susikirtimo taškus, kertasi viename taške. Rasti to taško koordinates. Kokia mechaninė uždavinio prasmė?

Sprendimas. Galite įsitikinti, kad ieškomojo taško koordinatės yra

$$(\frac{1}{4} \cdot \sum_{j=1}^{4} a_{1j}, \frac{1}{4} \cdot \sum_{j=1}^{4} a_{2j}, \frac{1}{4} \cdot \sum_{j=1}^{4} a_{3j}).$$