I. VEKTORIAI IR VEIKSMAI SU VEKTORIAIS

Dažnai trimatės erdvės vektorius apibrėžiamas kaip orientuota atkarpa $\vec{AB}$. Taškas A vadinamas vektoriaus pradiniu tašku, o taškas B – vektoriaus galiniu tašku. Vektoriai $\vec{AB}$ ir $\vec{CD}$ yra vadinami lygiais, jei tiesės, kurioms priklauso atkarpos AB ir CD, yra lygiagrečios, atkarpų ilgiai – lygūs ir orientuotos atkarpos yra tos pačios krypties. Paaiškinsime, kaip suprantamas pasakymas "orientuotos atkarpos $\vec{AB}$ ir $\vec{CD}$ yra tos pačios krypties". Jei tiesės, kurioms priklauso atkarpos AB ir CD, yra lygiagrečios, tai šios atkarpos priklauso vienai ir tik vienai plokštumai P. Plokštumoje P egzistuoja vienintelė tiesė l, kuriai priklauso orientuotų atkarpų $\vec{AB}$ ir $\vec{CD}$ pradžios taškai A ir C. Tiesė l plokštumą P dalija į dvi pusplokštumes. Jei orientuotų atkarpų $\vec{AB}$ ir $\vec{CD}$ galiniai taškai B ir D priklauso vienai ir tai pačiai pusplokštumei, tai orientuotos atkarpos $\vec{AB}$ ir $\vec{CD}$ yra tos pačios krypties, o jei taškai B ir D priklauso skirtingoms pusplokštumėms, tai orientuotos atkarpos $\vec{AB}$ ir $\vec{CD}$ yra vadinamos skirtingų krypčių.

Trimatės erdvės visų vektorių aibę pažymėkime raide V. Kaip žinome, vektorių aibėje V apibrėžta sudėtis ir ši sudėtis turi tam tikras savybes. Taigi pateiksime štai tokį apibrėžimą.

Apibrėžimas. Tegu V – aibė, kurioje apibrėžta sudėtis $+$, tenkinanti aksiomas:

1. Sudėtis $+$ aibėje V – asociatyvi, t.y. bet kuriems $v_1, v_2, v_3 \in V$,
$(v_1 + v_2) + v_3 = v_1 + (v_2 + v_3)$;

2. Egzistuoja sudėties $+$ atžvilgiu neutralus elementas 0, dar vadinamas nuliumi, t.y. toks elementas, kad kiekvienam $v \in V$,
$0 + v = v + 0 = v$;

3. Kiekvienam aibės V elementui v egzistuoja sudėties $+$ atžvilgiu simetrinis elementas $-v$, taipogi dar vadinamas priešingu elementu elementui v, t.y. toks elementas, kad
$v + (-v) = 0$;

4. Sudėtis $+$ aibėje V – komutatyvi, t.y. bet kuriems v_1, v_2,
$v_1 + v_2 = v_2 + v_1$.

Aibė V joje apibrėžtos sudėties $+$, tenkinančios anksčiau išvardintas aksiomas, atžvilgiu yra vadinama Abelio grupe ir žymima $(V, +)$.

Taigi vektorių aibė V sudėties $+$ atžvilgiu yra Abelio grupė. Be šio pavyzdžio galima pateikti ir daugiau Abelio grupių pavyzdžių.

Pavyzdžiai. 1. $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$ – Abelio grupės, čia $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ – seikųjų, racionaliųjų ir realiųjų skaičių aibės.

2. Tegu X – aibė, $P(X)$ – aibės X visų poaibių aibė, $\ominus$ – aibių simetrinė atimtis, t.y. bet kuriems aibės X poaibiams A ir B,
$A \ominus B =: (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

Galite įsitikinti, kad $(P(X), \ominus)$ – Abelio grupė, $\emptyset$ – veiksmo $\ominus$ atžvilgiu yra neutralus elementas, o kiekvienam $A \in P(X)$ simetrinis elementas elementui A yra jis pats, t.y. $A \ominus A = \emptyset$.

Vektorius ne tik galima sudėti, bet kiekvieną vektorių galima padauginti ir iš realaus skaičiaus. Taigi pateiksime tokį apibrėžimą.

Apibrėžimas. Abelio grupė $(V, +)$ yra vadinama tiesine erdve virš realiųjų skaičių kūno $\mathbb{R}$, jei apibrėžtas atvaizdis

$$\cdot : \mathbb{R} \times V \to V, \quad (\alpha, v) \mapsto \alpha \cdot v,$$

tenkinantis aksiomas:

1. Bet kuriems $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $v \in V$, $\alpha \cdot (\beta \cdot v) = (\alpha \cdot \beta) \cdot v$;
2. Kiekvienam $v \in V$, $1 \cdot v = v$;
3. Bet kuriems $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $v \in V$, $(\alpha + \beta) \cdot v = \alpha \cdot v + \beta \cdot v$;
4. Bet kuriems $\alpha \in \mathbb{R}$, $v_1, v_2 \in V$, $\alpha \cdot (v_1 + v_2) = \alpha \cdot v_1 + \alpha \cdot v_2$.

Taigi visi trimatės erdvės vektoriai sudėties $+$ ir daugybos iš realiųjų skaičių atžvilgiu sudaro tiesinę erdvę virš realiųjų skaičių kūno. Realiųjų skaičių aibė joje apibrėžtų sudėties $+$ ir daugybos $\cdot$ atžvilgiu yra vadinama kūnu. Egzistuoja be galo daug aibių, tiek baigtinių, tiek ir begalinių, kuriose galima apibrėžti tų aibių elementų veiksmus, vadinamus taip pat sudėtimi $+$ ir daugyba $\cdot$, ir turinčių tokias pat savybes, kaip ir realiųjų skaičių sudėtis ir daugyba. Visi tokie objektai yra vadinami kūnais. Realieji skaičiai yra tiktai vienas iš tokių objektų pavyzdžių.

Apibrėžimas. Aibė k joje apibrėžtų sudėties $+$ ir daugybos $\cdot$ atžvilgiu yra vadinama kūnu, jei

I $(k, +)$ – Abelio grupė;

II $(k^*, \cdot)$ – Abelio grupė, čia $k^* = k \setminus \{0\}$, 0 – nulis sudėties atžvilgiu;

III Sudėtis $+$ ir daugyba $\cdot$ susieti distributyvumo dėsniu: bet kuriems α, β, $\gamma \in k$

$$(\alpha + \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot \gamma + \beta \cdot \gamma.$$

Pastaba. Jei tiesinės erdvės apibrėžime realiuosius skaičius pakeistume bet kuriuo kūnu, gautume visiškai bendrą tiesinės erdvės apibrėžimą.

Vektorių skaliarinė daugyba

Trimatės erdvės vektorius galima sudauginti skaliariškai. Ši daugyba apibrėžiama dviem būdais. Vienas iš šių būdų toks: jei $u, v \in V$, tai $u \cdot v = |u| \cdot |v| \cdot \cos \varphi(u, v)$, čia $|u|, |v|$ – vektorių u ir v ilgiai, o $\varphi(u, v)$ – kampas tarp šių vektorių. Kitas apibrėžimas remiasi kiekvieno vektoriaus užrašu baziniais vektoriais i, j ir k, kurie tarp savęs yra statmeni, kiekvieno iš jų ilgis lygus vienam ir jie sudaro taip vadinamą dešininę vektorių sistemą. Jei

$$u = \alpha_1 \cdot i + \alpha_2 \cdot j + \alpha_3 \cdot k, \quad v = \beta_1 \cdot i + \beta_2 \cdot j + \beta_3 \cdot k,$$

tai $u \cdot v = \alpha_1 \cdot \beta_1 + \alpha_2 \cdot \beta_2 + \alpha_3 \cdot \beta_3$.

Vektorių skaliarinė daugyba turi šias savybes:

1. $u \cdot v = v \cdot u$ (vektorių skaliarinė daugyba simetrinė);

2. $(\alpha \cdot u + \beta \cdot v) \cdot w = \alpha \cdot u \cdot w + \beta \cdot v \cdot w$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $u, v, w \in V$ (vektorių skaliarinė daugyba tiesinė funkcija pagal pirmąjį argumentą);

3. $u \cdot u \geqslant 0$ ir $u \cdot u = 0$ tada ir tik tada, kai $u = O$, čia O – nulinis vektorius (vektorių skaliarinė daugyba teigiamai apibrėžta).

Tegu $(V, +)$ – tiesinė erdvė virš realiųjų skaičių kūno $\mathbb{R}$. Šioje tiesinėje erdvėje galima apibrėžti skaliarinę daugybą, kaip dviejų kintamųjų funkciją

$$\langle \ , \ \rangle : V \times V \to \mathbb{R},$$

tenkinančią vektorių skaliarinės daugybos išvardintas tris savybes:

1. $\langle u, v\rangle = \langle v, u\rangle$, $u, v \in V$;

2. $\langle \alpha \cdot u + \beta \cdot v, w\rangle, = \alpha \cdot \langle u, w\rangle + \beta \cdot \langle v, w\rangle$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $u, v, w \in V$;

3. $\langle u, u\rangle \geqslant 0$ ir $\langle u, u\rangle = 0$ tada ir tik tada, kai $u = O$, čia O – nulinis vektorius.

Apibrėžimas. Tiesinė erdvė $(V, +)$ virš realiųjų skaičių kūno $\mathbb{R}$, kurioje apibrėžta skaliarinė daugyba $\langle \ , \ \rangle$, yra vadinama Euklido erdve.

Galima įrodyti, kad Euklido erdvėje $(V, +)$ egzistuoja tokia vektorių šeima e_1, e_2, …, e_n, kad

1. Kiekvienas vektorius $v \in V$ vienareikšmiškai tiesiškai išreiškiamas vektoriais e_1, e_2, …, e_n, t.y.

$$v = \alpha_1 \cdot e_1 + \alpha_2 \cdot e_2 + \ldots + \alpha_n \cdot e_n, \quad \alpha_j \in \mathbb{R}, \quad 1 \leqslant j \leqslant n;$$

2. $\langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij}$, $1 \leqslant i, j \leqslant n$, čia δ_{ij} – taip vadinamas Kronekerio simbolis (lygus vienam, kai indeksai sutampa ir lygus nuliui kitais atvejais).

Euklido erdvės vektorių šeima e_1, e_2, …, e_n, tenkinanti anksčiau užrašytas sąlygas, yra vadinama Euklido erdvės ortonormuota baze. Trimatėje vektorinėje erdvėje V vektoriai i, j ir k ir yra šios erdvės ortonormuota bazė.

Vektorių vektorinė daugyba

Apibrėšime dar vieną svarbų veiksmą su vektoriais – vektorių vektorinę daugybą. Tegu u ir v – trimatės erdvės vektoriai. Apibrėšime vektorių $u \times v$, turintį savybes:

1. Vektorius $u \times v$ yra statmenas vektoriams u ir v.

2. Vektoriaus $u \times v$ ilgis lygus lygiagretainio, kurį sudaro vektorių $\alpha \cdot u + \beta \cdot v$, turinčių bendrą pradžią kuriame nors taške, galai, čia $0 \leqslant \alpha, \beta \leqslant 1$, plotui.

3. Vektoriai u, v ir $u \times v$ sudaro dešininę vektorių sistemą.

Tam tikslui reikalingas trečios eilės kvadratinės matricos determinanto apibėžimas. Trečios eilės kvadratinė matrica – tai lentelė:

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix},$$

čia α_{ij}, $1 \leqslant i,j \leqslant 3$, – realieji skaičiai, α_{ij} yra vadinamas matricos ij-elementu. Šios matricos determinantą apibrėžiame taip:

$$\det\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix} = \alpha_{11}\cdot\begin{vmatrix} \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} - \alpha_{12}\cdot\begin{vmatrix} \alpha_{21} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{33} \end{vmatrix} + \alpha_{13}\cdot\begin{vmatrix} \alpha_{21} & \alpha_{22} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= \alpha_{11}\cdot\alpha_{22}\cdot\alpha_{33} - \alpha_{11}\cdot\alpha_{23}\cdot\alpha_{32} - \alpha_{12}\cdot\alpha_{21}\cdot\alpha_{33} + \alpha_{12}\cdot\alpha_{23}\cdot\alpha_{31} + \alpha_{13}\cdot\alpha_{21}\cdot\alpha_{32} - \alpha_{13}\cdot\alpha_{22}\cdot\alpha_{31}.$$

Pastebėsime, kad pirmoji lygybė – tai šios matricos determinanto skleidinys pirmąja eilute. Šiame skleidinyje matome antros eilės matricų, gaunamų išbraukiant trečios eilės matricos pirmąją eilutę ir atitinkamai pirmąjį, antrąjį ir trečiąjį stulpelius, t.y. tą eilutę ir stulpelius, kurių susikirtime užrašyti elementai α_{11}, α_{12} ir α_{13}, determinantus

$$\begin{vmatrix} \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \alpha_{21} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{33} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \alpha_{21} & \alpha_{22} \\ \alpha_{31} & \alpha_{33} \end{vmatrix}.$$

Tik pastebėsime, kad šie determinantai užrašyti panašiai kaip ir matricos, bet tarp tiesių skliaustų. Matricos elementai surašomi tarp lenktų skliaustų. Antros eilės matricos

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}$$

determinantas pagal apibrėžimą yra lygus skaičiui

$$\alpha_{11}\cdot\alpha_{22} - \alpha_{12}\cdot\alpha_{21}.$$

Į šį apibrėžimą taip pat galime žiūrėti kaip į antros eilės matricos determinanto skleidinį pirmosios eilutės elementais.

Matricos determinanto savybės

Dabar išvardinsime trečios eilės matricos determinanto savybes. Jas formuluosime tik matricos eilutėms. Tokias pat savybes galima suformuluoti ir matricos stulpeliams.

1. Trečios eilės matricos determinantas yra lygus nuliui, jei matricos kurios nors dvi eilutės yra lygios.

2. Antrąją savybę užrašysime tik pirmajai matricos determinanto eilutei. Kitoms matricos eilutėms ši savybė užrašoma panašiai. Žodžiais ši savybė išreiškiama taip: matricos determinantas yra bet kurios matricos eilutės tiesinė funkcija.

$$\det\begin{pmatrix} \lambda\cdot\alpha'_{11}+\mu\cdot\alpha''_{11} & \lambda\cdot\alpha'_{12}+\mu\cdot\alpha''_{12} & \lambda\cdot\alpha'_{13}+\mu\cdot\alpha''_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix} =$$

$$\lambda \cdot \det \begin{pmatrix} \alpha'_{11} & \alpha'_{12} & \alpha'_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix} + \mu \cdot \det \begin{pmatrix} \alpha''_{11} & \alpha''_{12} & \alpha''_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix}.$$

3. Trečios eilės matricos, kurios įstrižainėje yra vienetai, o kitose – nuliai, determinantas yra lygus vienam. Bet kuri n-tos eilės matrica, kurios įstrižainėje užrašyti vienetai, o kitose – nuliai, yra vadinama vienetine n-tos eilės matrica.

Šias trečios eilės matricos determinanto savybes galite tiesiog patikrinti remdamiesi matricos determinanto apibrėžimu.

Pastaba. Bet kurios eilės kvadratinės matricos determinantą galima apibrėžti aksiomatiškai. Aksiomų sistema – kaip tik išvardintos trys trečios eilės kvadratinių matricų determinantų savybės. Šios aksiomos bet kurios eilės kvadratinės matricos determinantą apibrėžia vienareikšmiškai.

Remiantis išvardintomis trečios eilės kvadratinės matricos determinanto savybėmis, galima padaryti kai kurias išvadas.

1. Jei sukeičiame matricos kurias nors dvi eilutes ar stulpelius vietomis, tai matricos determinantas pakeičia ženklą.

2. Jei matricos kurios nors dvi eilutės yra proporcingos, tai šios matricos determinantas lygus nuliui.

Pastaba. Panašiai galima apibrėžti ir n-tos eilės kvadratinės matricos determinantą, suvedant jo skaičiavimą į $n-1$-os eilės kvadratinių matricų determinantų skaičiavimą. Sutarkime n-tos eilės matricą A užrašyti taip: $A = (\alpha_{ij})_{ij=1}^{n}$, t.y. užrašydami šios matricos bendrąjį elementą α_{ij} tarp skliaustelių ir nurodydami šio bendrojo elemento pirmojo ir antrojo indeksų įgyjamas reikšmes. Dabar nurodysime, kaip matricos $A = (\alpha_{ij})_{ij=1}^{n}$ determinanto skaičiavimą galime suvesti į $n-1$-os eilės kvadratinių matricų determinantų skaičiavimą. Bet kuriam r, $1 \leqslant r \leqslant n$, apibrėžkime

$$\det(\alpha_{ij})_{ij=1}^{n} = (-1)^{r+1}\alpha_{1r}M^{1r} + (-1)^{r+2}\alpha_{2r}M^{2r} + \ldots + (-1)^{r+n}\alpha_{nr}M^{nr},$$

čia M^{jr} – $n-1$-os eilės matricos, gautos matricoje $A = (\alpha_{ij})_{ij=1}^{n}$ išbraukus j-ąją eilutę ir r-ąjį stulpelį, determinantas. Parašyta formulė – tai n-tos eilės matricos determinanto skleidinys r-ojo stulpelio elementais. Taip pat šį determinantą galima išskleisti bet kurios eilutės elementais. Visais atvejais gaunama viena ir ta pati determinanto reikšmė. Be to, taip apibrėžtas n-tos eilės matricos determinantas turi visas tas pačias savybes, kaip ir trečios eilės matricos determinantas. Šis bendras atvejis kolkas mums nereikalingas. Tad grįžkime prie dviejų vektorių vektorinės sandaugos apibrėžimo.

Apibrėžimas. Tegu vektoriai u ir v užrašyti baziniais vektoriais i, j, k:

$$u = \alpha_1 \cdot i + \alpha_2 \cdot j + \alpha_3 \cdot k, \quad v = \beta_1 \cdot i + \beta_2 \cdot j + \beta_3 \cdot k,$$

Tuomet dviejų vektorių u ir v vektorinė sandauga $u \times v$ apibrėžiama taip:

$$u \times v = \det \begin{pmatrix} i & j & k \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix} \cdot i - \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_3 \end{vmatrix} \cdot j + \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix} \cdot k =$$

$$= (\alpha_2 \cdot \beta_3 - \alpha_3 \cdot \beta_2) \cdot i - (\alpha_1 \cdot \beta_3 - \alpha_3 \cdot \beta_1) \cdot j + (\alpha_1 \cdot \beta_2 - \alpha_2 \cdot \beta_1) \cdot k$$

Dabar reikia įsitikinti, kad dviejų vektorių vektorinė sandauga turi anksčiau paminėtas savybes. Taigi įrodysime, kad vektorių u ir v vektorinės sandaugos vektorius $u \times v$ turi savybes:

1. Vektorius $u \times v$ yra statmenas vektoriams u ir v.
2. Vektoriaus $u \times v$ ilgis lygus lygiagretainio, kurį sudaro vektorių $\alpha \cdot u + \beta \cdot v$, turinčių bendrą pradžią kuriame nors taške, galai, čia $0 \leqslant \alpha, \beta \leqslant 1$, plotui.
3. Vektoriai u, v ir $u \times v$ sudaro dešininę vektorių sistemą.

Taigi pirmiausia įsitikinsime, kad vektorius $u \times v$ yra statmenas vektoriams u ir v. Tuo tikslu sudauginkime skaliariškai vektorius u ir $u \times v$, o taip pat v ir $u \times v$. Bet

$$u \cdot (u \times v) = \det \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{pmatrix} = 0.$$

Šis determinantas yra lygus nuliui, nes jo pirmosios dvi eilutės yra lygios. Taigi $u \perp (u \times v)$. Panašiai gauname, kad $v \perp (u \times v)$. Kaip suprantate, ženklas $\perp$ parašytas tarp vektorių žymi, kad šie vektoriai statmeni (ortogonalūs).

Dabar apskaičiuokime lygiagretainio $\alpha \cdot u + \beta \cdot v$, $0 \leqslant \alpha, \beta \leqslant 1$, užtempto ant vektorių u ir v, plotą ir įsitikinkime, kad jis yra lygus vektoriaus $u \times v$ ilgiui. Ištikrųjų įrodysime, kad nagrinėjamojo lygiagretainio ploto kvadratas yra lygus vektoriaus $u \times v$ ilgio kvadratui. Taip patogiau skaičiuoti.

Taigi figūra $\{\alpha u + \beta v \mid 0 \leqslant \alpha, \beta \leqslant 1\}$ yra lygiagretainis, užtemptas ant vektorių u ir v. Kaip žinome, lygiagretainio plotas yra lygus kurios nors lygiagretainio kraštinės ir lygiagretainio aukštinės į šią kraštinę ilgių sandaugai. Imkime lygiagretainio kraštinę u. Tuomet lygiagretainio aukštinės į kraštinę u ilgis yra lygus $|v| \cdot \sin \varphi(u, v)$. Taigi lygiagretainio plotas yra lygus $|u| \cdot |v| \sin \varphi(u, v)$. Lygiagretainio ploto kvadratas yra lygus:

$$(|u| \cdot |v| \cdot \sin \varphi(u, v))^2 = |u|^2 \cdot |v|^2 \cdot (1 - \cos^2 \varphi(u, v)) =$$

$$|u|^2 \cdot |v|^2 \cdot (1 - \frac{(u \cdot v)^2}{|u|^2 \cdot |v|^2}) = |u|^2 \cdot |v|^2 - (u \cdot v)^2.$$

Kadangi radome lygiagretainio, užtempto ant vektorių u ir v, ploto kvadrato formulę, tai $|u|^2 \cdot |v|^2 - (u \cdot v)^2 \geqslant 0$. Tai labai svarbi nelygybė, vadinama Koši, Švarco, Buniakovskio vardais. Be to, iš geometrinės prasmės matome, kad $|u|^2 \cdot |v|^2 - (u \cdot v)^2 = 0$ tada ir tik tada, kai lygiagretainis supliukšta, t.y. tada ir tik tada, kai vektoriai u ir v yra kolinearūs (proporcingi). Šią nelygybę nesunku įrodyti ir bendruoju atveju, t.y. tiesinės erdvės virš $\mathbb{R}$, kurioje apibrėžta skaliarinė daugyba, atveju.

Tegu

$$u = \alpha_1 \cdot i + \alpha_2 \cdot j + \alpha_3 \cdot k, \quad v = \beta_1 \cdot i + \beta_2 \cdot j + \beta_3 \cdot k.$$

Tuomet

$$|u|^2 \cdot |v|^2 - (u \cdot v)^2 = (\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2) \cdot (\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2) -$$

$$(\alpha_1 \cdot \beta_1 + \alpha_2 \cdot \beta_2 + \alpha_3 \cdot \beta_3)^2 = (\alpha_1^2 \cdot \beta_2^2 + \alpha_2^2 \cdot \beta_1^2 + \alpha_1^2 \cdot \beta_3^2 +$$

$$\alpha_3^2 \cdot \beta_1^2 + \alpha_2^2 \cdot \beta_3^2 + \alpha_3^2 \cdot \beta_2^2 - 2 \cdot \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \beta_1 \cdot \beta_2 - 2 \cdot \alpha_1 \cdot \alpha_3 \cdot \beta_1 \cdot \beta_3 - 2 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_3 \cdot \beta_2 \cdot \beta_3.$$

Vektoriaus $u \times v$ ilgio kvadratas yra lygus

$$|u \times v|^2 = \begin{vmatrix} \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix}^2 =$$

$$= (\alpha_2 \cdot \beta_3 - \alpha_3 \cdot \beta_2)^2 + (\alpha_1 \cdot \beta_3 - \alpha_3 \cdot \beta_1)^2 + (\alpha_1 \cdot \beta_2 - \alpha_2 \cdot \beta_1)^2$$

Sutvarkę šį reiškinį, galite įsitikinti, kad jis yra lygus anksčiau užrašytam lygiagretainio, užtempto ant vektorių u ir v, ploto kvadratui.

Tegu i, j ir k – baziniai vektoriai. Tuomet ramdamiesi bazinių vektorių apibrėžimu matome, kad $k = i \times j$. Taigi norėdami įsitikinti, kad vektorių vektorinė daugyba turi ir trečiąją savybę, pakanka įsitikinti remiantis vektorių vektorinės daugybos apibrėžimu, kad $k = i \times j$. Remdamiesi vektorių vektorinės daugybos apibrėžimu rasime $i \times j$:

$$i \times j = \det \begin{pmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot i - 0 \cdot j + 1 \cdot k = k.$$

Vektorių vektorinės daugybos savybės

Vektorių vektorinė daugyba be anksčiau paminėtų savybių turi dar šias savybes:
1. Kiekvienam $u \in V$, $u \times u = O$;
2. Bet kuriems $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $u', u'', v \in V$,

$$(\lambda \cdot u' + \mu \cdot u'') \times v = \lambda \cdot u' \times v + \mu \cdot u'' \times v;$$

3. Bet kuriems $u, v, w \in V$,

$$(u \times v) \times w + (v \times w) \times u + (w \times u) \times v = O.$$

Ši savybė yra vadinama Jakobi (Jacobi) tapatybe.

Pirmoji savybė akivaizdi. Antrąją savybę įrodysime. Tegu

$$u' = \alpha'_1 \cdot i + \alpha'_2 \cdot j + \alpha'_3 \cdot k, \quad u'' = \alpha''_1 \cdot i + \alpha''_2 \cdot j + \alpha''_3 \cdot k, \quad v = \beta_1 \cdot i + \beta_2 \cdot j + \beta_3 \cdot k.$$

Tuomet

$$\lambda \cdot u' + \mu \cdot u'' = (\lambda \cdot \alpha'_1 + \mu \cdot \alpha''_1) \cdot i + (\lambda \cdot \alpha'_2 + \mu \cdot \alpha''_2) \cdot j + (\lambda \cdot \alpha'_3 + \mu \cdot \alpha''_3) \cdot k.$$

Taigi

$$(\lambda \cdot u' + \mu \cdot u'') \times v = \det \begin{pmatrix} i & j & k \\ \lambda \cdot \alpha'_1 + \mu \cdot \alpha''_1 & \lambda \cdot \alpha'_2 + \mu \cdot \alpha''_2 & \lambda \cdot \alpha'_3 + \mu \cdot \alpha''_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{pmatrix} =$$

$$\lambda \cdot \det \begin{pmatrix} i & j & k \\ \alpha'_1 & \alpha'_2 & \alpha'_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{pmatrix} + \mu \cdot \det \begin{pmatrix} i & j & k \\ \alpha''_1 & \alpha''_2 & \alpha''_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{pmatrix} =$$

$$\lambda \cdot (u' \times v) + \mu \cdot (u'' \times v).$$

Remiantis antrąja vektorių vektorinės daugybos savybe, trečiąją savybę pakanka patikrinti tik baziniams vektoriams i, j, k. Paliekame tai padaryti skaitytojui.

Pastaba. Vektorių vektorinė daugyba trimatėje erdvėje – tai atskiras atvejis veiksmo, vadinamo Li (Lie) veiksmu. Šis veiksmas apibrėžiamas aksiomatiškai tiesinėje erdvėje. Bendruoju atveju operacija $\times$ žymima $[\ ,\ ]$.

Apibrėžimas. Tegu V – tiesinė erdvė virš kūno K. Atvaizdis

$$[\ ,\ ] : V \times V \to V,\ (u, v) \mapsto [u, v],$$

tenkinantis aksiomas:

1. Kiekvienam $u \in V$, $[u, u] = O$;
2. Bet kuriems $\lambda, \mu \in K$, $u', u'', v \in V$,

$$[\lambda \cdot u' + \mu \cdot u'', v] = \lambda \cdot [u', v] + \mu \cdot [u'', v];$$

3. Bet kuriems $u, v, w \in V$,

$$[[u, v], w] + [[v, w], u] + [w, u], v] = O,$$

yra vadinamas tiesinėje erdvėje V Li operacija. Tiesinė erdvė V virš kūno K, kurioje apibrėžta Li operacija $[\ ,\ ]$, yra vadinama Li algebra, o pati operacija $[\ ,\ ]$ – Li skliaustais.

Taigi trimatė vektorinė erdvė vektorių vektorinės daugybos atžvilgiu yra Li algebra.

Pastaba. Li algebros tampriai susijusios su Li grupėmis. Pavyzdžiui, trimatė vektorinė Li algebra yra susijusi su trimatės erdvės visų posūkių apie fiksuotą tašką Li grupe, žymima $SO(3)$. Li grupių sandara gana sudėtinga ir šiai sandarai nagrinėti pasitelkiama atitinkama Li algebra, kuri turi žymiai paprastesnę struktūrą.

II. TIESĖS IR PLOKŠTUMOS TRIMATĖJE ERDVĖJE LYGTYS

Dabar galime užrašyti tiesės ir plokštumos trimatėje erdvėje lygtis.

Kanoninė tiesės lygtis

Kokių tiesės duomenų pakanka tiesės lygčiai užrašyti? Pirmiausia galime remtis aksioma, kad du skirtingi tiesės taškai vienareikšmiškai apibrėžia tiesę. Tegu du skirtingi taškai $A(a_1, a_2, a_3)$ ir $B(b_1, b_2, b_3)$ priklauso tiesei l. Tegu $X(x_1, x_2, x_3)$ – bendrasis tiesės taškas. Tuomet vektoriai $\vec{AX}$ ir $\vec{AB}$ yra kolinearūs (proporcingi). Taigi galime parašyti:

$$\frac{x_1 - a_1}{b_1 - a_1} = \frac{x_2 - a_2}{b_2 - a_2} = \frac{x_3 - a_3}{b_3 - a_3}.$$

Tai ir yra tiesės l, kuriai priklauso du skirtingi tiesės taškai A ir B, lygtis. Kadangi du skirtingi tiesės taškai A ir B laisvai parenkami, tai daug tiesės lygčių aprašo vieną ir tą pačią tiesę.

Apibrėžimas. Nenulinis vektorius, lygiagretus tiesei, yra vadinamas tos tiesės krypties vektoriumi.

Remdamiesi tik tiesės krypties vektoriaus apibrėžimu, galime suformuluoti paprastą teiginį.

Teiginys. Visi tiesės krypties vektoriai yra kolinearūs.

Taigi vektorius $\vec{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)$ yra tiesės l krypties vektorius. Matome, kad tiesės taškas A ir kuris nors tiesės krypties vektorius taip pat vienareikšmiškai apibrėžia tiesę ir šiuo atveju galime užrašyti tiesės kanoninę lygtį:

$$\frac{x_1 - a_1}{\alpha_1} = \frac{x_2 - a_2}{\alpha_2} = \frac{x_3 - a_3}{\alpha_3},$$

čia vektorius $(b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$. Tai tiesės l, kuri lygiagretė vektoriui $v = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ ir kuriai priklauso taškas $A(a_1, a_2, a_3)$, lygtis.

Parametrinė tiesės lygtis

Tiesės lygtį galima ir kitaip užrašyti, įvedus parametrą t. Tegu

$$\frac{x_1 - a_1}{\alpha_1} = \frac{x_2 - a_2}{\alpha_2} = \frac{x_3 - a_3}{\alpha_3} = t.$$

Tuomet tiesės bendrojo taško koordinates galime išreikšti per parametrą:

$$\begin{cases} x_1 = \alpha_1 \cdot t + a_1, \\ x_2 = \alpha_2 \cdot t + a_2, \\ x_3 = \alpha_3 \cdot t + a_3. \end{cases}$$

Į šią parametrinę tiesės lygtį galima žiūrėti, kaip ir į atvaizdį:

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, \ \ t \mapsto (\alpha_1 \cdot t + a_1, \alpha_2 \cdot t + a_2, \alpha_3 \cdot t + a_3).$$

Šis atvaizdis rodo, kaip realioji tiesė $\mathbb{R}$ įdėta į trimatę erdvę $\mathbb{R}^3$.

Plokštumos lygtis

Dabar nagrinėsime trimatės erdvės plokštumas. Kaip žinome, trys skirtingi taškai, nesantys vienoje tiesėje, vienareikšmiškai apibrėžia plokštumą. Tegu trys skirtingi taškai $A(a_1, a_2, a_3)$, $B(b_1, b_2, b_3)$ ir $C(c_1, c_2, c_3)$, nesantys vienoje tiesėje, priklauso plokštumai P. Tegu $X(x_1, x_2, x_3)$ – bendrasis plokštumos P taškas. Tuomet vektorius $\vec{AX}$ statmenas vektoriui $\vec{AB} \times \vec{AC}$. Pastarasis vektorius nelygus nuliniam vektoriui, nes vektoriai $\vec{AB}$ ir $\vec{AC}$ nėra kolinearūs. Taigi galime užrašyti:

$$\vec{AX} \cdot (\vec{AB} \times \vec{AC}) = 0.$$

Tai plokštumos P lygtis vektorinėje formoje. Galime šią lygtį užrašyti ir vektorių koordinatėmis:

$$(x_1 - a_1, x_2 - a_2, x_3 - a_3) \cdot \det \begin{pmatrix} i & j & k \\ b_1 - a_1 & b_2 - a_2 & b_3 - a_3 \\ c_1 - a_1 & c_2 - a_2 & c_3 - a_3 \end{pmatrix} = 0.$$

Šią lygtį galima užrašyti ir taip:

$$\det \begin{pmatrix} x_1 - a_1 & x_2 - a_2 & x_3 - a_3 \\ b_1 - a_1 & b_2 - a_2 & b_3 - a_3 \\ c_1 - a_1 & c_2 - a_2 & c_3 - a_3 \end{pmatrix} = 0.$$

Užrašę šio determinanto skleidinį pirmosios eilutės elementais, gauname:

$$\alpha_1 \cdot (x_1 - a_1) + \alpha_2 \cdot (x_2 - a_2) + \alpha_3 \cdot (x_3 - a_3) = 0,$$

čia

$$\alpha_1 = \det \begin{pmatrix} b_2 - a_2 & b_3 - a_3 \\ c_2 - a_2 & c_3 - a_3 \end{pmatrix} = (b_2 - a_2) \cdot (c_3 - a_3) - (b_3 - a_3) \cdot (c_2 - a_2),$$

ir panašiai

$$\alpha_2 = -\det \begin{pmatrix} b_1 - a_1 & b_3 - a_3 \\ c_1 - a_1 & c_3 - a_3 \end{pmatrix}, \ \ \alpha_3 = \det \begin{pmatrix} b_1 - a_1 & b_2 - a_2 \\ c_1 - a_1 & c_2 - a_2 \end{pmatrix}.$$

Kadangi trys skirtingi taškai $A(a_1, a_2, a_3)$, $B(b_1, b_2, b_3)$ ir $C(c_1, c_2, c_3)$, nesantys vienoje tiesėje, parenkami laisvai, tai, kaip ir tiesės atveju, daug plokštumos lygčių aprašo vieną ir tą pačią plokštumą.

Apibrėžimas. Nenulinis vektorius, statmenas plokštumai, yra vadinamas plokštumos normalės vektoriumi.

Pavyzdžiui, vektorius $\vec{AB} \times \vec{AC}$ yra plokštumos P normalės vektorius. Jei plokštumos P lygtis yra užrašyta pavidalu

$$\alpha_1 \cdot (x_1 - a_1) + \alpha_2 \cdot (x_2 - a_2) + \alpha_3 \cdot (x_3 - a_3) = 0,$$

tai vektorius $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ yra plokštumos P normalės vektorius. Taigi plokštumos taškas ir plokštumos normalės vektorius vienareikšmiškai apibrėžia plokštumą.

Kaip ir tiesės atveju, remdamiesi tik plokštumos normalės vektoriaus apibrėžimu, galime suformuluoti paprastą teiginį.

Teiginys. Visi plokštumos normalės vektoriai yra kolinearūs.

Parametrinė plokštumos lygtis

Sutarkime, kad visų nagrinėjamų vektorių pradinis taškas yra $(0, 0, 0)$. Taip sutarę, galime sutapatinti trimatės erdvės taškus su vektorių galiniais taškais.

Pirmiausia panagrinėkime atvaizdį $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, apibrėžtą taip:

$$(u, v) \mapsto (\alpha_{11} \cdot u + \alpha_{12} \cdot v,\ \ \alpha_{21} \cdot u + \alpha_{22} \cdot v,\ \ \alpha_{31} \cdot u + \alpha_{32} \cdot v).$$

Vektoriaus $(1, 0) \in \mathbb{R}^2$ vaizdas yra vektorius $(\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{13})$, o vektoriaus $(0, 1) \in \mathbb{R}^2$ vaizdas yra vektorius $(\alpha_{21}, \alpha_{22}, \alpha_{23})$. Bendrojo plokštumos $\mathbb{R}^2$ vektoriaus (u, v) vaizdas yra sudaromas taip:

$$u \cdot (\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{13}) + v \cdot (\alpha_{21}, \alpha_{22}, \alpha_{23}).$$

Koks šio atvaizdžio vaizdas? Jei vektoriai $(\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{13})$ ir $(\alpha_{21}, \alpha_{22}, \alpha_{23})$ yra proporcingi, tai nagrinėjamojo atvaizdžio vaizdas, kaip nesunku matyti, yra tiesė. Jei vektorių $(1, 0)$, $(0, 1) \in \mathbb{R}^2$ vaizdai nėra proporcingi, tai įrodysime, kad nagrinėjamojo atvaizdžio vaizdas yra plokštuma, kuriai priklauso trimatės erdvės taškas $(0, 0, 0)$. Įrodysime, kad nenulinio daugiklio tikslumu egxistuoja vienintelis nenulinis lygčių sistemos

$$\begin{cases} \alpha_{11} \cdot x_1 + & \alpha_{12} \cdot x_2 + & \alpha_{13} \cdot x_3 & = 0 \\ \alpha_{21} \cdot x_1 + & \alpha_{22} \cdot x_2 + & \alpha_{23} \cdot x_3 & = 0 \end{cases}$$

sprendinys. Į šias lygčių kairiąsias puses galime žiūrėti, kaip į vektoriaus (x_1, x_2, x_3) skaliarinę sandaugą su vektoriais $(\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{13})$ ir $(\alpha_{21}, \alpha_{22}, \alpha_{23})$. Kadangi tos sandaugos yra lygios nuliui, tai lygtis galime interpretuoti, kad skaliariškai dauginami vektoriai yra statmeni. Todėl nesunku suvokti, kad šios lygčių sistemos vienas iš sprendinių yra vektorius

$$(\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{13}) \times (\alpha_{21}, \alpha_{22}, \alpha_{23}),$$

nes, kaip žinome, šis vektorius yra statmenas vektoriams $(\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{13})$ ir $(\alpha_{21}, \alpha_{22}, \alpha_{23})$.

Dabar akivaizdu, kad trimatės erdvės taškai (arba vektoriai)

$$(\alpha_{11} \cdot u + \alpha_{12} \cdot v,\ \ \alpha_{21} \cdot u + \alpha_{22} \cdot v,\ \ \alpha_{31} \cdot u + \alpha_{32} \cdot v)$$

tenkina plokštumos lygtį

$$\begin{vmatrix} \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{22} & \alpha_{23} \end{vmatrix} \cdot x_1 - \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{23} \end{vmatrix} \cdot x_2 + \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{23} \end{vmatrix} \cdot x_3 = 0.$$

Ir atvirkščiai: įrodysime, kad kiekvienas šios lygties sprendinys (a_1, a_2, a_3) yra užrašomas vienareikšmiškai pavidalu

$$(\alpha_{11} \cdot u + \alpha_{12} \cdot v,\ \ \alpha_{21} \cdot u + \alpha_{22} \cdot v,\ \ \alpha_{31} \cdot u + \alpha_{32} \cdot v),\ \ u, v \in \mathbb{R},$$

t. y. kiekvienam lygties sprendiniui (a_1, a_2, a_3) parametrų u ir v reikšmės randamos vienareikšmiškai.

Paprastumo dėlei tarkime, kad plokštumos lygties paskutinis koeficientas

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{23} \end{vmatrix} = \alpha_{11} \cdot \alpha_{23} - \alpha_{12} \cdot \alpha_{21}$$

nelygus nuliui. Tegu (a_1, a_2, a_3) – plokštumos taškas. Nagrinėkime lygčių sistemą:

$$\begin{cases} \alpha_{11} \cdot u + & \alpha_{12} \cdot v & = a_1, \\ \alpha_{21} \cdot u + & \alpha_{22} \cdot v & = a_2. \end{cases}$$

Galite įsitikinti, kad ši lygčių sistema turi vienintelį sprendinį:

$$u_0 = \frac{\alpha_{22} \cdot a_1 - \alpha_{12} \cdot a_2}{\alpha_{11} \cdot \alpha_{23} - \alpha_{12} \cdot \alpha_{21}}, \quad v_0 = \frac{\alpha_{11} \cdot a_2 - \alpha_{21} \cdot a_1}{\alpha_{11} \cdot \alpha_{23} - \alpha_{12} \cdot \alpha_{21}}.$$

Trečioji plokštumos taško komponentė a_3 vienareikšmiškai randama, žinant pirmąsias dvi komponentes a_1 ir a_2, nes pagal prielaidą paskutinis plokštumos lygties koeficientas nelygus nuliui. Kadangi

$$a_1 = \alpha_{11} \cdot u_0 + \alpha_{12} \cdot v_0,\ \ a_2 = \alpha_{21} \cdot u_0 + \alpha_{22} \cdot v_0,$$

tai ir

$$a_3 = \alpha_{31} \cdot u_0 + \alpha_{32} \cdot v_0,$$

nes sutvarkytas trejetas

$$(\alpha_{11} \cdot u + \alpha_{12} \cdot v, \;\; \alpha_{21} \cdot u + \alpha_{22} \cdot v, \;\; \alpha_{31} \cdot u + \alpha_{32} \cdot v),$$

tapatingai visiems u, $v \in \mathbb{R}$, tenkina anksčiau užrašytą plokštumos lygtį.

Dabar galime nagrinėti bendresnį atvaizdį $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, apibrėžtą taip:

$$(u, v) \mapsto (\alpha_{11} \cdot u + \alpha_{12} \cdot v + a_1, \alpha_{21} \cdot u + \alpha_{22} \cdot v + a_2, \alpha_{31} \cdot u + \alpha_{32} \cdot v + a_3).$$

Kaip ir anksčiau, jei vektoriai $(\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{13})$ ir $(\alpha_{21}, \alpha_{22}, \alpha_{23})$ yra proporcingi, tai nagrinėjamojo atvaizdžio vaizdas, kaip nesunku matyti, yra tiesė, kuriai priklauso taškas (a_1, a_2, a_3). Jei šie vektoriai nėra proporcingi, tai galima įrogyti, kap ir anksčiau, kad nagrinėjamojo atvaizdžio vaizdas yra plokštuma, kuriai priklauso trimatės erdvės taškas (a_1, a_2, a_3). Kaip ir anksčiau, galite įsitikinti, kad šios plokštumos lygtis yra

$$\begin{vmatrix} \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{22} & \alpha_{23} \end{vmatrix} \cdot (x_1 - a_1) - \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{23} \end{vmatrix} \cdot (x_2 - a_2) + \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{23} \end{vmatrix} \cdot (x_3 - a_3) = 0.$$

Taigi į atvaizdį $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, apibrėžtą taip:

$$(u, v) \mapsto (\alpha_{11} \cdot u + \alpha_{12} \cdot v + a_1, \alpha_{21} \cdot u + \alpha_{22} \cdot v + a_2, \alpha_{31} \cdot u + \alpha_{32} \cdot v + a_3),$$

galime žiūrėti, kaip į realiosios plokštumos $\mathbb{R}^2$ įdėtį į realiąją trimatę erdvę $\mathbb{R}^3$.

Tiesė plokštumoje, bendroji tiesės lygtis

Tegu l – tiesė plokštumoje $\mathbb{R}^2$, $A(\alpha_1, \alpha_2)$, $B(\beta_1, \beta_2)$ – skirtingi šios tiesės fiksuoti taškai, $X(x_1, x_2)$ – bendrasis tiesės l taškas. Tuomet vektoriai $\overrightarrow{AB}$ ir $\overrightarrow{AX}$ yra kolinearūs. Vadinasi, galime užrašyti lygybę:

$$\frac{x_1 - \alpha_1}{\beta_1 - \alpha_1} = \frac{x_2 - \alpha_2}{\beta_2 - \alpha_2}.$$

Tai tiesės l, kuriai priklauso taškas A ir kurios kryptį nusako vektorius $\overrightarrow{AB}$, lygtis. Tai kanoninė tiesės plokštumoje lygtis. Visi tiesės plokštumoje krypties vektoriai yra kolinearūs. Šią lygtį galime ir kitaip užrašyti:

$$(\beta_2 - \alpha_2)(x_1 - \alpha_1) = (\beta_1 - \alpha_1)(x_2 - \alpha_2).$$

$\beta_2 - \alpha_2$ pažymėję a_1, $\alpha_1 - \beta_1$ pažymėję a_2, o $(\alpha_2 - \beta_2)\alpha_1 + (\beta_1 - \alpha_1)\alpha_2$ – raide b, pastarąją lygtį užrašome taip:

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + b = 0.$$

Ši tiesės plokštumoje lygtis yra vadinama bendrąja. Nesunku įsitikinti, kad vektorius (a_1, a_2) yra statmenas tiesės l krypties vektoriui $\overrightarrow{AB} = (\beta_1 - \alpha_1, \beta_1 - \alpha_1)$. Vektorius (a_1, a_2) yra vadinamas tiesės l normalės vektoriumi. Visi tiesės plokštumoje normalės vektoriai yra kolinearūs.

III. UŽDAVINIAI IR JŲ SPRENDIMAS

Dabar galime išspręsti keletą paprastų uždavinių. Viename iš jų rasime taško erdvėje atstumą iki plokštumos. Panašaus uždavinio plokštumoje sprendinys gaunamas iš uždavinio sprendinio erdvėje atmetus trečiąsias taškų koordinates arba trečiąją koordinatę prilyginus nuliui.

1. Uždavinys. Tegu $A(a_1, a_2, a_3)$ – trimatės erdvės taškas, P – plokštuma, kurios lygtis yra

$$\alpha_1 \cdot x_1 + \alpha_2 \cdot x_2 + \alpha_3 \cdot x_3 + \beta = 0.$$

Rasti atstumą $\rho(A, P)$ tarp taško A ir plokštumos P.

Sprendimas. Štai ką mes darysime. Užrašysime tiesės l, kuriai priklauso taškas A ir kuri statmena plokštumai P, lygtį. Rasime tiesės l ir plokštumos P susikirtimo tašką B. Atstumas tarp taškų A ir B $\rho(A, B$ ir yra lygus atstumui $\rho(A, P)$ tarp taško A ir plokštumos P.

Tiesės l, kuriai priklauso taškas A ir kuri statmena plokštumai P, lygtis yra

$$\frac{x_1 - a_1}{\alpha_1} = \frac{x_2 - a_2}{\alpha_2} = \frac{x_3 - a_3}{\alpha_3}.$$

Tiesės l ir plokštumos P susikirtimo taško B koordinatės yra lygčių sistemos

$$\begin{cases} \alpha_1 \cdot x_1 + \alpha_2 \cdot x_2 + \alpha_3 \cdot x_3 + \beta = 0, \\ \frac{x_1 - a_1}{\alpha_1} = \frac{x_2 - a_2}{\alpha_2} = \frac{x_3 - a_3}{\alpha_3} \end{cases}$$

sprendinys. Patogu išspręsti šią lygčių sistemą užrašius tiesės lygtį parametrine forma

$$\begin{cases} x_1 = \alpha_1 \cdot t + a_1, \\ x_2 = \alpha_2 \cdot t + a_2, \\ x_3 = \alpha_3 \cdot t + a_3. \end{cases}$$

Įrašę x_1, x_2 ir x_3 išraiškas į plokštumos lygtį, gauname:

$$\alpha_1 \cdot (\alpha_1 \cdot t + a_1) + \alpha_2 \cdot (\alpha_1 \cdot t + a_2) + \alpha_3 \cdot (\alpha_1 \cdot t + a_3) + \beta = 0.$$

Šios lygties sprendinys yra

$$t_0 = -\frac{\alpha_1 \cdot a_1 + \alpha_2 \cdot a_2 + \alpha_3 \cdot a_3 + \beta}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2}.$$

Taigi tiesės l ir plokštumos P susikirtimo taško B koordinatės yra lygios

$$\begin{cases} x_1 = \alpha_1 \cdot t_0 + a_1, \\ x_2 = \alpha_2 \cdot t_0 + a_2, \\ x_3 = \alpha_3 \cdot t_0 + a_3. \end{cases}$$

Atstumo tarp taško A ir plokštumos P kvadratas yra lygus

$$\rho(A,P)^2 = \rho(A,B)^2 = (\alpha_1 \cdot t_0)^2 + (\alpha_2 \cdot t_0)^2 + (\alpha_3 \cdot t_0)^2 = t_0^2 \cdot (\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2).$$

Sutvarkę, gauname:

$$\rho(A,P)^2 = \frac{(\alpha_1 \cdot a_1 + \alpha_2 \cdot a_2 + \alpha_3 \cdot a_3 + \beta)^2}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2}$$

arba

$$\rho(A,P) = \frac{|\alpha_1 \cdot a_1 + \alpha_2 \cdot a_2 + \alpha_3 \cdot a_3 + \beta|}{\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2}}.$$

Plokštumos lygtį

$$\alpha_1 \cdot x_1 + \alpha_2 \cdot x_2 + \alpha_3 \cdot x_3 + \beta = 0$$

normavę, gauname taip vadinamą normaliąją plokštumos lygtį

$$\frac{\alpha_1 \cdot x_1 + \alpha_2 \cdot x_2 + \alpha_3 \cdot x_3 + \beta}{\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2}} = 0.$$

Pastaba. Tegu $A(a_1, a_2)$ – plokštumos taškas, l – tiesė plokštumoje, kurios lygtis yra

$$\alpha_1 \cdot x_1 + \alpha_2 \cdot x_2 + \beta = 0.$$

Tuomet atstumas $\rho(A, l)$ tarp taško A ir tiesės l yra

$$\rho(A,l) = \frac{|\alpha_1 \cdot a_1 + \alpha_2 \cdot a_2 + \beta|}{\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}}.$$

Tiesės plokštumoje bendrąją lygtį

$$\alpha_1 \cdot x_1 + \alpha_2 \cdot x_2 + \alpha_3 \cdot x_3 + \beta = 0$$

normavę, gauname taip vadinamą normaliąją tiesės plokštumoje lygtį

$$\frac{\alpha_1 \cdot x_1 + \alpha_2 \cdot x_2 + \beta}{\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}} = 0.$$

2. Uždavinys. Tegu

$$\frac{x_1 - a_1}{\alpha_1} = \frac{x_2 - a_2}{\alpha_2} = \frac{x_3 - a_3}{\alpha_3}$$

ir

$$\frac{x_1 - b_1}{\beta_1} = \frac{x_2 - b_2}{\beta_2} = \frac{x_3 - b_3}{\beta_3}$$

dviejų tiesių l_1 ir l_2 lygtys. Rasti atstumą $\rho(l_1, l_2)$ tarp šių tiesių.

Sprendimas. Pirmiausia nagrinėkime atvejį, kai šios tiesės yra prasilenkiančios, t.y. kai jų krypčių vektoriai $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ ir $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ nėra proporcingi. Tuomet išsirinkę kurioje nors tiesėje tašką, pavyzdžiui, pirmojoje tašką $A(a_1, a_2, a_3)$, užrašykime tiesės l_3, kuriai priklauso taškas A ir kuri yra lygiagretė antrajai tiesei, lygtį:

$$\frac{x_1 - a_1}{\beta_1} = \frac{x_2 - a_2}{\beta_2} = \frac{x_3 - a_3}{\beta_3}.$$

Egzistuoja plokštuma P, kuriai priklauso tiesės l_1 ir l_3. Be to, ši plokštuma yra lygiagretė tiesei l_2. Vektorius

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \times (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$$

yra šios plokštumos normalės vektorius. Taigi galime užrašyti plokštumos P, kuriai priklauso tiesės l_1 ir l_3, lygtį

$$(\alpha_2 \cdot \beta_3 - \alpha_3 \cdot \beta_2)(x_1 - a_1) + (\alpha_3 \cdot \beta_1 - \alpha_1 \cdot \beta_3)(x_2 - a_2) + (\alpha_1 \cdot \beta_2 - \alpha_2 \cdot \beta_1)(x_3 - a_{)} = 0.$$

Taigi atstumas $\rho(l_1, l_2)$ tarp prasilenkiančių tiesių l_1 ir l_2 yra lygus atstumui $\rho(B, P)$ tarp tiesės l_2 taško $B(b_1, b_2, b_3)$ ir plokštumos P ir, remiantis pirmojo uždavinio sprendiniu, yra lygus

$$\frac{|(\alpha_2 \cdot \beta_3 - \alpha_3 \cdot \beta_2)(b_1 - a_1) + (\alpha_3 \cdot \beta_1 - \alpha_1 \cdot \beta_3)(b_2 - a_2) + (\alpha_1 \cdot \beta_2 - \alpha_2 \cdot \beta_1)(b_3 - a_{)}|}{\sqrt{(\alpha_2 \cdot \beta_3 - \alpha_3 \cdot \beta_2)^2 + (\alpha_3 \cdot \beta_1 - \alpha_1 \cdot \beta_3)^2 + (\alpha_1 \cdot \beta_2 - \alpha_2 \cdot \beta_1)^2}}$$

arba labiau simetrine išraiška

$$\rho(l_1, l_2) = \frac{\left| \begin{vmatrix} \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix} \cdot (b_1 - a_1) - \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_3 \end{vmatrix} \cdot (b_2 - a_2) + \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix} \cdot (b_3 - a_3) \right|}{\sqrt{(\alpha_2 \cdot \beta_3 - \alpha_3 \cdot \beta_2)^2 + (\alpha_3 \cdot \beta_1 - \alpha_1 \cdot \beta_3)^2 + (\alpha_1 \cdot \beta_2 - \alpha_2 \cdot \beta_1)^2}}.$$

Tegu tiesės l_1 ir l_2 yra lygiagrečios, t.y.

$$\frac{x_1 - a_1}{\alpha_1} = \frac{x_2 - a_2}{\alpha_2} = \frac{x_3 - a_3}{\alpha_3}$$

– tiesės l_1 lygtis ir

$$\frac{x_1 - b_1}{\alpha_1} = \frac{x_2 - b_2}{\alpha_2} = \frac{x_3 - b_3}{\alpha_3}$$

– tiesės l_2 lygtis. Šiuo atveju atstumas $\rho(l_1, l_2)$ tarp tiesių l_1 ir l_2 yra lygus atstumui tarp, pavyzdžiui, tiesės l_1 kurio nors taško ir tiesės l_2. Taigi išspręsime paprastą uždavinį.

3. Uždavinys. Rasti atstumą $\rho(A, l)$ tarp taško $A(a_1, a_2, a_3)$ ir tiesės l, kuri apibrėžiama lygtimi

$$\frac{x_1 - b_1}{\alpha_1} = \frac{x_2 - b_2}{\alpha_2} = \frac{x_3 - b_3}{\alpha_3}.$$

Sprendimas. Pasirinkime du skirtingus tiesės l taškus. Tegu vienas iš jų yra $B(b_1, b_2, b_3)$, o kitas –

$$B'(b_1 + \alpha_1, b_2 + \alpha_2, b_3 + \alpha_3).$$

Rasime lygiagretainio, užtempto ant vektorių $\vec{BA}$ ir $\vec{BB'}$, ploto kvadratą. Šis ploto kvadratas yra lygus vektoriaus $\vec{BA} \times \vec{BB'}$ ilgio kvadratui, o taip pat šio lygiagretainio kraštinės BB' ilgio ir ieškomo atstumo $\rho(A, l)$ tarp taško $A(a_1, a_2, a_3)$ ir tiesės l (t. y. lygiagretainio aukštinės) sandaugos kvadratui. Taigi galime užrašyti lygybę:

$$|\rho(A, l)|^2 \cdot |\vec{BB'}|^2 = |\vec{BA} \times \vec{BB'}|^2.$$

Kadangi $|\vec{BB'}|^2 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2$, o

$$|\vec{BA} \times \vec{BB'}|^2 = \begin{vmatrix} a_2 - b_2 & a_3 - b_3 \\ \alpha_2 & \alpha_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 - b_1 & a_3 - b_3 \\ \alpha_1 & \alpha_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 - b_1 & a_2 - b_2 \\ \alpha_1 & \alpha_2 \end{vmatrix}^2,$$

tai

$$|\rho(A, l)|^2 = \frac{\begin{vmatrix} a_2 - b_2 & a_3 - b_3 \\ \alpha_2 & \alpha_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 - b_1 & a_3 - b_3 \\ \alpha_1 & \alpha_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 - b_1 & a_2 - b_2 \\ \alpha_1 & \alpha_2 \end{vmatrix}^2}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2}.$$

Taigi

$$\rho(A, l) = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} a_2 - b_2 & a_3 - b_3 \\ \alpha_2 & \alpha_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 - b_1 & a_3 - b_3 \\ \alpha_1 & \alpha_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 - b_1 & a_2 - b_2 \\ \alpha_1 & \alpha_2 \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2}}.$$

Kitas sprendimas. Tegu P – plokštuma, kuriai priklauso taškas A kuri yra statmena tiesei l. Šiuo atveju tiesės l krypties vektorius $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ yra plokštumos P normalės vektorius. Vadinasi, galime užrašyti plokštumos P lygtį:

$$\alpha_1 \cdot (x_1 - a_1) + \alpha_2 \cdot (x_2 - a_2) + \alpha_3 \cdot (x_3 - a_3) = 0.$$

Radę tiesės l ir plokštumos P susikirtimo tašką C, galėsime užrašyti atstumą $\rho(l_1, l_2)$, kuris yra lygus atstumui $\rho(A, C)$ tarp taškų A ir C. Taigi išsprendę lygčių sistemą

$$\begin{cases} (\alpha_1 \cdot (x_1 - a_1) + \alpha_2 \cdot (x_2 - a_2) + \alpha_3 \cdot (x_3 - a_3) = 0, \\ \frac{x_1 - b_1}{\alpha_1} = \frac{x_2 - b_2}{\alpha_2} = \frac{x_3 - b_3}{\alpha_3}. \end{cases}$$

rasime taško C koordinates. Patogu išspręsti šią lygčių sistemą užrašius tiesės lygtį parametrine forma

$$\begin{cases} x_1 = \alpha_1 \cdot t + b_1, \\ x_2 = \alpha_2 \cdot t + b_2, \\ x_3 = \alpha_3 \cdot t + b_3. \end{cases}$$

Įrašę x_1, x_2 ir x_3 išraiškas į plokštumos lygtį, gauname:

$$\alpha_1 \cdot (\alpha_1 \cdot t + b_1 - a_1) + \alpha_2 \cdot (\alpha_1 \cdot t + b_2 - a_2) + \alpha_3 \cdot (\alpha_1 \cdot t + b_3 - a_3) = 0.$$

Šios lygties sprendinys yra

$$t_0 = -\frac{\alpha_1 \cdot (b_1 - a_1) + \alpha_2 \cdot (b_2 - a_2) + \alpha_3 \cdot (b_3 - a_3)}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2}.$$

Taigi taško C koordinatės yra

$$\begin{cases} x_1 = \alpha_1 \cdot t_0 + b_1, \\ x_2 = \alpha_2 \cdot t_0 + b_2, \\ x_3 = \alpha_3 \cdot t_0 + b_3. \end{cases}$$

Atstumo tarp taško A ir tiesės l kvadratas yra lygus

$$\rho(A, l)^2 = \frac{(\alpha_1 \cdot t_0 + b_1 - a_1)^2 + (\alpha_2 \cdot t_0 + b_2 - a_2)^2 + (\alpha_3 \cdot t_0 + b_3 - a_3)^2}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2}.$$

Įrašę t_0 reikšmę ir sutvarkę reiškinį, gausime galutinę atstumo $\rho(A, l)^2$ išraišką. Galite atlikti veiksmus.

IV. TRIMATĖS ERDVĖS TRANSFORMACIJOS

Tegu V – aibė. Kiekvieną bijekciją $f : V \to V$ būtų galima pavadinti aibės V transformacija. Kai V – trimatė erdvė, joje apibrėžta atstumo funkcija $\rho(A, B)$ tarp taškų. Nagrinėsime tik tokias bijekcijas $f : V \to V$, kurios išlaiko atstumus tarp taškų, t.y.

$$\rho(f(A), f(B)) = \rho(A, B).$$

Kaip žinome, posūkiai apie tašką bei postūmiai vektoriumi išlaiko atstumus tarp taškų.

Kyla klausimas, kaip tokias transformacijas patogiai užrašyti, kad būtų galima atlikti efektyvius skaičiavimus, sprendžiant įvairius uždavinius? Pasirodo, kad patogu užrašyti šias transformacijas pasitelkiant matricas. Pavyzdžiui, tegu duotos dvi ortonormuotos trimatės erdvės bazės i, j, k ir i', j', k'. Tuomet galime užrašyti

$$\begin{cases} i' = \alpha_{11} \cdot i + \alpha_{12} \cdot j + \alpha_{13} \cdot k, \\ j' = \alpha_{21} \cdot i + \alpha_{22} \cdot j + \alpha_{23} \cdot k, \\ k' = \alpha_{31} \cdot i + \alpha_{32} \cdot j + \alpha_{33} \cdot k. \end{cases} \tag{1}$$

Panašiai galime užrašyti

$$\begin{cases} i = \alpha'_{11} \cdot i' + \alpha'_{12} \cdot j' + \alpha'_{13} \cdot k', \\ j = \alpha'_{21} \cdot i' + \alpha'_{22} \cdot j' + \alpha'_{23} \cdot k', \\ k = \alpha'_{31} \cdot i' + \alpha'_{32} \cdot j' + \alpha'_{33} \cdot k'. \end{cases} \tag{2}$$

Dabar pasistengsime sužinoti, kaip yra susijusios matricos, sudarytos iš koeficientų prie bazinių vektorių. Anksčiau užrašytas lygybes perrašykime pasitelkę matricų daugybą. Apibrėšime matricų daugybą.

Tegu duotos matricos

$$A = (\alpha_{ij})_{i,j=1}^{m,n} \quad \text{ir} \quad B = (\beta_{ij})_{i,j=1}^{n,p}.$$

Čia svarbu, kad pirmoji matrica turėtų tiek stulpelių, kiek antroji matrica turi eilučių. Tik tokias matricas galima sudauginti. Tuomet matricų

$$(\alpha_{ij})_{i,j=1}^{m,n} \quad \text{ir} \quad (\beta_{ij})_{i,j=1}^{n,p}$$

sandauga yra vadinama matrica

$$(\alpha_{ij})_{i,j=1}^{m,n} \cdot (\beta_{ij})_{i,j=1}^{n,p} =: (\gamma_{ij})_{i,j=1}^{m,p},$$

kurios ij-elementas γ_{ij} apibrėžiamas taip:

$$\gamma_{ij} = \sum_{s=1}^{n} \alpha_{is} \cdot \beta_{sj}, \quad 1 \leqslant i \leqslant m,\ 1 \leqslant j \leqslant p.$$

Dabar (1) lygybes galime užrašyti taip:

$$\begin{pmatrix} i' \\ j' \\ k' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i \\ j \\ k \end{pmatrix} \tag{1'}$$

Šią lygybę galima užrašyti ir taip:

$$\begin{pmatrix} i' & j' & k' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & j & k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \alpha_{31} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{32} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33}. \end{pmatrix} \tag{1"}$$

Sudauginę (1”) ir (1’) lygybių kairiąsias ir dešiniąsias puses (atitinkamus vektorius dauginame skaliariškai), gauname tarp matricų tokią lygybę:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \alpha_{31} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{32} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33}. \end{pmatrix} \tag{3}$$

Apibrėžimas. Matrica $A = (\alpha_{ij})_{ij=1}^{3}$, kuri sudauginta su savo transponuota matrica A^t yra lygi vienetinei matricai (t.y. tenkinanti (3) lygybę), yra vadinama ortogonaliąja. Kitaip tariant, jei A – ortogonali matrica, tai $A^{-1} = A^t$.

Nesunku įsitikinti, kad matrica

$$\begin{pmatrix} \alpha'_{11} & \alpha'_{12} & \alpha'_{13} \\ \alpha'_{21} & \alpha'_{22} & \alpha'_{23} \\ \alpha'_{31} & \alpha'_{32} & \alpha'_{33} \end{pmatrix}$$

yra atvirkštinė matricai A. Iš tikrųjų, įrašę į (2’)-ąją lygybę (1’)-os lygybės bazės vektorių išraiškas ar atvirkščiai – į (1’)-ąją lygybę (2’)-os lygybės bazės vektorių išraiškas, gauname ryšį tarp matricų

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha'_{11} & \alpha'_{12} & \alpha'_{13} \\ \alpha'_{21} & \alpha'_{22} & \alpha'_{23} \\ \alpha'_{31} & \alpha'_{32} & \alpha'_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1. \end{pmatrix}$$

Taigi

$$\begin{pmatrix} \alpha'_{11} & \alpha'_{12} & \alpha'_{13} \\ \alpha'_{21} & \alpha'_{22} & \alpha'_{23} \\ \alpha'_{31} & \alpha'_{32} & \alpha'_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \alpha_{31} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{32} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33}. \end{pmatrix}$$

Dabar nesunku užrašyti transformacijos išraiškas ir vektorių koordinatėms. Tegu

$$v = x_1 \cdot i + x_2 \cdot j + x_3 \cdot k = x'_1 \cdot i' + x'_2 \cdot j' + x'_3 \cdot k',$$

o vektoriai i, j, k ir i', j', k' yra susieti (2)-ąja lygybe. Įrašę vektorių i, j, k išraiškas vektoriais i', j', k' į vektoriaus v išraišką, gauname

$$v = (x_1, x_2, x_3) \cdot \begin{pmatrix} \alpha'_{11} & \alpha'_{12} & \alpha'_{13} \\ \alpha'_{21} & \alpha'_{22} & \alpha'_{23} \\ \alpha'_{31} & \alpha'_{32} & \alpha'_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i' \\ j' \\ k' \end{pmatrix} = x'_1 \cdot i' + x'_2 \cdot j' + x'_3 \cdot k'.$$

Sulyginę koordinates prie bazinių vektorių i', j', k', gauname

$$(x'_1, x'_2, x'_3) = (x_1, x_2, x_3) \cdot \begin{pmatrix} \alpha'_{11} & \alpha'_{12} & \alpha'_{13} \\ \alpha'_{21} & \alpha'_{22} & \alpha'_{23} \\ \alpha'_{31} & \alpha'_{32} & \alpha'_{33}. \end{pmatrix}$$

arba, prisiminę, kad matrica, kurios elementai štrichuoti, yra atvirkštinė ortogonaliai matricai, kurios elementai be štrichų, galime parašyti taip:

$$\begin{cases} x'_1 = \alpha_{11} \cdot x_1 + \alpha_{12} \cdot x_2 + \alpha_{13} \cdot x_3, \\ x'_2 = \alpha_{21} \cdot x_1 + \alpha_{22} \cdot x_2 + \alpha_{23} \cdot x_3, \\ x'_3 = \alpha_{31} \cdot x_1 + \alpha_{32} \cdot x_2 + \alpha_{33} \cdot x_3. \end{cases} \tag{4}$$

Transformacijos, aprašomos ortogonaliomis matricomis, yra posūkiai. Atliekant posūkius ir postūmius vektoriais, bendros taškų koordinačių transformacijos formulės atrodo taip:

$$\begin{cases} x'_1 = \alpha_{11} \cdot x_1 + \alpha_{12} \cdot x_2 + \alpha_{13} \cdot x_3 + \beta_1, \\ x'_2 = \alpha_{21} \cdot x_1 + \alpha_{22} \cdot x_2 + \alpha_{23} \cdot x_3 + \beta_2, \\ x'_3 = \alpha_{31} \cdot x_1 + \alpha_{32} \cdot x_2 + \alpha_{33} \cdot x_3 + \beta_3, \end{cases} \tag{4}$$

čia $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ – vektoriaus, kuriuo atliekamas postūmis, koordinatės. Rasime vėl taško atstumo iki plokštumos išraišką, pasinaudoję transformacijomis ir suvedę bendrąjį atvejį į atskirą, labai paprastą. Pamatysite, kaip praktiškai galima pasinaudoti transformacijomis.

1'. Uždavinys. Tegu $A(a_1, a_2, a_3)$ – trimatės erdvės taškas, P – plokštuma, kurios lygtis yra

$$\alpha_1 \cdot x_1 + \alpha_2 \cdot x_2 + \alpha_3 \cdot x_3 + \beta = 0.,$$

Rasti atstumą $\rho(A, P)$ tarp taško A ir plokštumos P.

Sprendimas. Spręsime šį uždavinį suvesdami jį į paprastesnį atvejį, kai plokštumos lygtis yra, pavyzdžiui, $x_1 = 0$. Šiuo atveju atstumas tarp taško $A(a_1, a_2, a_3)$ ir plokštumos x_2x_3 yra lygus $\rho(A, P) = |a_1|$.

Dabar bendrąjį atvejį suvesime į ką tik paminėtą. Tegu taškas $B(b_1, b_2, b_3)$ – plokštumos taškas. Tuomet plokštumos lygtį galime užrašyti ir taip:

$$\alpha_1 \cdot (x_1 - b_1) + \alpha_2 \cdot (x_2 - b_2) + \alpha_3 \cdot (x_3 - b_3) = 0.$$

Rasime tokį posūkį, kuris plokštumos normalės vektorių $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ pervestų į plokštumos $x_1 = 0$ normalės vektorių $(\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2}, 0, 0)$, o plokštumos P tašką $B(b_1, b_2, b_3)$ į tašką $O(0, 0, 0)$. Tai atliksime dviem žingsniais. Pirma pasuksime erdvę apie x_3 ašį taip, kad vektoriaus $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ projekcija į plokštumą $x_3 = 0$ (t.y. x_1x_2 plokštumą) $(\alpha_1, \alpha_2, 0)$ pasisuktų ir sutaptų su x_1 ašies kryptimi. Vektoriaus $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ vaizdas $(\alpha'_1, 0, \alpha'_3)$ atsiras plokštumoje $x_2 = 0$. Po to pasuksime erdvę apie x_2 ašį taip, kad vektorius $(\alpha'_1, 0, \alpha'_3)$ pasisuktų ir sutaptų su x_1 ašies kryptimi. Radę šią transformaciją, rasime taško $A(a_1, a_2, a_3)$ vaizdo A' koordinates ir užrašysime atstumą $\rho(A', P')$ tarp taško A' ir plokštumos P', kurios lygtis yra $x_1 = 0$.

Nesunku matyti, kad pirmojo posūkio transformacijos išraiška atrodo taip:

$$\begin{cases} x'_1 = \frac{\alpha_1}{\sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2}} \cdot x_1 + \frac{\alpha_2}{\sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2}} \cdot x_2 \\ x'_2 = \frac{-\alpha_2}{\sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2}} \cdot x_1 + \frac{\alpha_1}{\sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2}} \cdot x_2 \\ x'_3 = x_3. \end{cases}$$

Antrojo posūkio transformacijos išraiška yra tokia:

$$\begin{cases} x_1'' = \frac{\sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2}}{\sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2}} \cdot x_1' + \frac{\alpha_3}{\sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2}} \cdot x_3' \\ x_2'' = x_2' \\ x_3'' = \frac{-\alpha_3}{\sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2}} \cdot x_1 + \frac{\sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2}}{\sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2}} \cdot x_3. \end{cases}$$

Dviejų posūkių, atliktų vienas po kito, transformacijos išraiška yra

$$\begin{cases} x_1'' = \frac{\alpha_1}{\sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2}} \cdot x_1 + \frac{\alpha_2}{\sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2}} \cdot x_2 + \frac{\alpha_3}{\sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2}} \cdot x_3 \\ x_2'' = \frac{-\alpha_2}{\sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2}} \cdot x_1 + \frac{\alpha_1}{\sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2}} \cdot x_2 \\ x_3'' = \frac{-\alpha_1\cdot\alpha_3}{\sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2}\cdot\sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2}} \cdot x_1 + \frac{-\alpha_2\cdot\alpha_3}{\sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2}\cdot\sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2}} \cdot x_2 + \frac{\sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2}}{\sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2}\cdot\sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2}} \cdot x_3. \end{cases}$$

Taigi trimatės erdvės transformacija, kuri plokštumos normalės vektorių $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ perveda į plokštumos $x_1 = 0$ normalės vektorių $(\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2}, 0, 0)$, o plokštumos P tašką $B(b_1, b_2, b_3)$ į tašką $O(0, 0, 0)$, yra gaunama transformacijos (1)-je sistemoje x_j pakeičiant $x_j - b_j$, $1 \leqslant j \leqslant 3$. Užrašysime tik x_1'' išraišką, nes ji mums tik ir reikalinga. Taigi

$$x_1'' = \frac{\alpha_1}{\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2}} \cdot (x_1 - b_1) + \frac{\alpha_2}{\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2}} \cdot (x_2 - b_2) + \frac{\alpha_3}{\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2}} \cdot (x_3 - b_3).$$

Galų gale gauname:

$$\rho(A, P) = \rho(A', P') = \frac{|\alpha_1 \cdot (a_1 - b_1) + \alpha_2 \cdot (a_2 - b_2) + \alpha_3 \cdot (a_3 - b_3)|}{\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2}}.$$

V. GEOMETRIJOS RAIDOS TRUMPA APŽVALGA

Goemetrija, išdėstyta Euklido "Elementuose", pagrįsta keturiolika teiginių, penki iš kurių yra vadinami postulatais (aksiomomis). Penktasis postulatas formuluojamas sudėtingai ir šis postulatas tapo daugelio kartų matematikų geometrijos aksiomatikos tyrimo paskata. Penktasis postulatas Euklido "Elementuose" formuluojamas taip: kiekvieną kartą, kai tiesė susikirsdama su kitomis dvejomis tiesėmis sudaro su jomis vidinius gretimus kampus, kurių suma mažesnė nei $2d$, tai tos tiesės kertasi ir, be to, toje pusėje, kurioje ši suma mažesnė nei $2d$. Šis postulatas ekvivalentus teiginiui: duotajai tiesei ir duotajam taškui, nepriklausančiam duotajai tiesei, egzistuoja vienintelė tiesė, kuriai priklauso duotasis taškas ir kuri yra lygiagretė duotajai tiesei. Kadangi šis postulatas matematikams atrodė labai sudėtingai formuluojamas, jie tikėjosi šį postulatą įrodyti kaip teoremą. Įrodymo paieška tęsėsi daugelį šimtmečių ir to įrodymo nepasisekė rasti. Be to, buvo dėta nemaža pastangų sukurti tobulesnę aksiomų sistemą. Euklido apibrėžimai buvo negriežti, paremti neapibrėžtomis sąvokomis ir matematikų toks geometrijos pagrindimas netenkino. Čia būtų galima paminėti daugelį matematikų ir jų pastangas sukurti tobulesnę geomtrijos aksiomatiką ir įrodyti penktąjį postulatą. Bet tai padaryti šiame trumpame konspekte neturime galimybių. Geriausia tai išdėstyti išsamiai geometrijos istorijos kurse. Paminėsime tik taip vadinamos neeuklidinės geometrijos sukūrimo keletą momentų ir išdėstysime dabartinę geometrijos pagrindų padėtį.

Penktasis postulatas buvo įrodinėjamas prieštaros metodu. Buvo daroma prielaida, kad egzistuoja bent dvi tiesės, kurioms priklauso duotasis taškas ir kurios yra lygiagretės duotajai tiesei. Buvo manoma, kad, remiantis šia prielaida, bus įmanoma įrodyti kurį nors teiginį ir šio teiginio neiginį. Taip darė beveik visi matematikai, kurie stengėsi įrodyti penktąjį postulatą. Taip bandė įrodyti ir J. Boijai (1802–1860), K.F. Gausas (1777–1855) ir N.I. Lobačevskis (1792–1856), vadinami neeuklidinės hiperbolinės geometrijos kūrėjais. Bet, remiantis šia prielaida, buvo įrodomi nauji ir nauji faktai, o gauti prieštaros nesisekė. Gausas jau apie 1800 metus buvo įsitikinęs, kad prieštaros gauti ir neįmanoma, t.y. egzistuoja visiškai kitokia geometrija. Savo rezultatus Lobačevskis atspausdino 1826 metais, o 1832 metais atspausdino savo rezultatus ir Boijai. Gauso rezultatai buvo rasti po jo mirties. Daugelis bando aiškinti tai, kad Gausas nepaskelbė savo rezultatų, Gauso bailumu būti nesuprastam. Šia nuomone galima suabejoti. Gausas daugelį savo rezultatų nespausdindavo ištisus dešimtmečius. Pavyzdžiui, jo nauji, originalūs rezultatai apie elipsines funkcijas neatspausdinti išgulėjo jo lentynuose daugiau nei 30 metų. Toks jis jau buvo. Kalbant apie penktąjį postulatą, vienintelį Gausą, kaip rodo jo laiškai, kuriuose rašoma apie naują geometriją, tik jį nepaprastai jaudino problema, kaip įrodyti naujos geometrijos neprieštaringumą. Tuomet tik Gausas intensyviai galvojo apie šią problemą, bet jos neišsprendė. Žymiai vėliau A. Puankarė (1854–1912) ir nepriklausomai F. Kleinas (1849–1925) sukonstravo neeuklidinės hiperbolinės geometrijos modelius. Tuo pačiu buvo įrodyta, kad egzistuoja neprieštaringa geometrija, kurioje kiekvienai duotajai tiesei ir šalia esančiam taškui galima nurodyti dvi tieses, kurioms priklauso taškas ir kurios yra lygiagrečios duotajai tiesei. Tuo pačiu buvo sugriautas įsitikinimas, kad egzistuoja tik vienintelė geometrija, kuri mums tik ir suvokiama iš prigimties.

Pagaliau 1899 metais buvo išleista D. Hilberto (1862–1943) "Geometrijos pagrindai" (Grundlagen der Geometrie)(ar Geometrijos pagrindimas?). Šioje knygoje pateiktos penkios aksiomų grupės ir atlikta nepaprastai gili aksiomų nepriklausomumo, išvadų iš įvairių aksiomų grupių, o taip pat, kiekvienos ar kelių aksiomų svarba vienoje ar kitoje geometrijoje, analizė. 1930 metais pasirodė šios knygos septintasis leidinys. Šis leidinys buvo išverstas į rusų kalbą. Išrašysiu aksiomų grupes iš leidinio rusų kalba. Norintiems išsamiai išnagrinėti geometrijos pagrindus ir gerai įvaldžiusiems vokiečių kalbą, patarčiau skaityti Hilberto kūrinį originalia kalba. Jūs pajusite didžiulį malonumą susipažinę su šio proto giganto mąstymo stiliumi. O dabar grįžkime prie geometrijos aksiomų. Šios aksiomų grupės tokios:

I 1–8 sujungimo (priklausomumo) aksiomos,

II 1–4 tvarkos aksiomos,

III 1–5 kongruentumo aksiomos,

IV aksioma apie lygiagretes,

V 1–2 tolydumo aksiomos.

Pirmosios grupės aksiomos: sujungimo (priklausomumo) aksiomos

I_1. Bet kuriems dviem taškams A, B egzistuoja tiesė a, priklausanti kiekvienam iš dviejų taškų A, B.

I_2. Bet kuriems dviem taškams A, B egzistuoja nedaugiau nei viena tiesė, priklausanti kiekvienam iš taškų A, B.

Čia, o taip pat ir visur kitur rašydami du, trys, ... taškai (dvi, trys, ... tiesės, plokštumos) suprantame skirtingus taškus (skirtingas tieses, plokštumas).

Vietoje žodžio "priklauso" galimi ir kiti išsireiškimai. Pavyzdžiui, vietoje "tiesė priklauso kiekvienam iš taškų A, B" mes galime išsireikšti: "tiesė, išvesta per taškus A ir B," arba "tiesė, jungianti taškus A ir B; vietoje "A priklauso a" galime išsireikšti: "A yra tiesėje a" arba "A yra a taškas" ir t.t. Jei taškas A priklauso tiesei a ir tiesei b, tai galime išsireikšti ir taip: tiesės a ir b kertasi taške A, turi bendrą tašką A ir t.t.

I_3. Egzistuoja bent du tiesės taškai. Egzistuoja bent trys taškai, nepriklausantys vienai tiesei.

I_4. Bet kuriems trims taškams A, B, C, nepriklausantiems vienai ir tai pačiai tiesei, egzistuoja plokštuma α, priklausanti kiekvienam iš trijų taškų A, B, C. Kiekvienai plokštumai visuomet egzistuoja priklausantis jai taškas.

I_5. Bet kuriems trims taškams A, B, C, nepriklausantiems vienai ir tai pačiai tiesei, egzistuoja nedaugiau nei viena plokštuma, priklausanti tiems taškams.

I_6. Jei tiesės a du taškai A, B priklauso plokštumai α, tai ir kiekvienas tiesės a taškas priklauso plokštumai α.

I_7. Jei dvi plokštumos α ir β turi bendrą tašką A, tai jos turi dar bent vieną bendrą tašką B.

I_8. Egzistuoja bent keturi taškai, nepriklausantys vienai plokštumai.

I_{1-3} aksiomos vadinamos plokštumos aksiomomis, I_{4-8} – erdvės aksiomomis.
Iš šių aksiomų galima įrodyti teoremas.

1 Teorema. Dvi tiesės, esančios vienoje ir toje pačioje plokštumoje, turi vieną bendrą tašką arba neturi nei vieno bendro taško. Dvi plokštumos arba neturi nei vieno bendro taško, arba turi vieną bendrą tiesę ir jokių kitų (nepriklausančių bendrajai tiesei) bendrų taškų. Plokštuma ir nepriklausanti jai tiesė arba neturi bendro taško, arba turi vieną benrą tašką.

2 Teorema. Per tiesę ir tašką, nepriklausanti tiesei, taip pat per dvi tieses, turinčias bendrą tašką, visuomet galima išvesti plokštumą ir tiktai vieną.

Antroji aksiomų grupė. Tvarkos aksiomos

Šios grupės aksiomos apibrėžia sąvoką "tarp" ir remiantis šia sąvoka galima nurodyti taškų tvarką tiesėje, plokštumoje ir erdvėje.

Tiesės taškai yra tarpusavyje tam tikruose sąryšiuose. Tie sąryšiai dažniausiai nusakomi žodžiu "tarp".

II_1. Jei taškas B yra tarp taško A ir taško C, tai A, B, C – trys skirtingi tiesės taškai, ir B taip pat yra tarp C ir A.

II_2. Bet kuriems taškams A ir C, esantiems tiesėje AC, egzistuoja bent vienas toks taškas B, kad C yra tarp A ir B.

II_3. Iš bet kurių trijų tiesės taškų egzistuoja nedaugiau vieno taško, esančio tarp kitų dviejų.

Be šių tvarkos aksiomų tiesėje, būtina dar viena aksioma, susijusi su tvarka plokštumoje.

Apibrėžimas. Nagrinėkime tiesėje a du taškus A ir B; dviejų taškų A ir B sistemą pavadinsime atkarpa ir žymėsime AB arba BA. Taškai, esantys tarp A ir B, vadinami atkarpos AB taškais arba taškais, esančiais atkarpos AB viduje; taškai A ir B vadinami atkarpos AB galais. Visi kiti tiesės a taškai yra vadinami taškais, esančiais už atkarpos.

II_4. Tegu A, B, C – trys taškai, nepriklausantys vienai tiesei, ir a – tiesė plokštumoje ABC, nepriklausanti nei vienam iš taškų A, B, C; jei tiesei priklauso atkarpos AB kuris nors taškas, tai tiesei priklauso atkaros AC kuris nors taškas arba atkarpos BC kuris nors taškas.

Išvados iš sujungimo ir tvarkos aksiomų

3 Teorema. Bet kuriems dviems tiesės taškams A ir C egzistuoja bent vienas taškas D, esantis tarp taškų A ir C.

4 Teorema. Iš trijų vienos ir tos pačios tiesės taškų A, B, C egzistuoja vienas, esantis tarp kitų dviejų.

5 Teorema. Keturis taškus, esančius vienoje tiesėje, galima pažymėti raidėmis A, B, C, D taip, kad taškas, pažymėtas raide B, būtų kaip tarp taškų A ir C, taip ir tarp taškų A ir D, o taškas, pažymėtas raide C, būtų kaip tarp taškų A ir D, taip ir tarp taškų B ir D.

6 Teorema (5 teoremos apibendrinimas). Kaip bebūtų išsidėstęs baigtinis taškų skaičius tiesėje, juos galima taip sužymėti raidėmis A, B, C, D, E, $\ldots$, K, kad taškas pažymėtas raide B, būtų tarp taško A iš vienos pusės ir taškų C, D, E, $\ldots$, K – iš kitos, toliau C – tarp A, B iš vienos pusės ir D, E, ..., K iš kitos, D – tarp A, B, C iš vienos pusės ir E, ..., K iš kitos ir t.t. Be šio žymėjimo egzistuoja dar tiktai atvirkštinis sužymėjimo būdas K, ..., E, D, C, B, A, turintis tą pačią savybę.

7 Teorema. Tarp dviejų tiesės taškų egzistuoja be galo daug taškų.

8 Teorema. Kiekviena tiesė a, priklausanti plokštumai α, suskirsto plokštumos α taškus, nepriklausančius tiesei a, į dvi sritis (pusplokštumes), turinčias šią savybę: kiekvienas taškas A iš kurios nors vienos srities su kiekvienu tašku B iš kitos srities apibrėžia atkarpą AB, kurios vidui priklauso vienas tiesės a taškas, o bet kurie du vienos ir tos pačios srities taškai A ir A' apibrėžia atkarpą AA', kuriai nepriklauso nei vienas tiesės a taškas.

Apibrėžimas. Sakysime, kad plokštumos α taškai A ir A' yra vienoje ir toje pačioje plokštumos pusplokštumėje tiesės a atžvilgiu, o taškai A ir B – skirtingose plokštumos pusplokštumėse tiesės a atžvilgiu.

Apibrėžimas. Tegu tiesėje a duoti keturi tokie taškai A, A', O, B, kad taškas O yra tarp taškų A ir B, bet nėra tarp taškų A ir A'; šiuo atveju sakysime, kad taškai A ir A' yra vienoje ir toje pačioje tiesės a pustiesėje taško O atžvilgiu, o taškai A ir B yra skirtingose tiesės pustiesėse taško O atžvilgiu. Tiesės taškus, priklausančius vienai tiesės pustiesei taško O atžvilgiu dar vadina spinduliu, prasidedančiu taške O. Taigi kiekvienas tiesės taškas O dalija tiesę į du spindulius, prasidedančius taške O.

Apibrėžimas. Atkarpų AB, BC, CD, ..., KL sistema vadinasi laužte, jungiančia taškus A ir L; ši laužtė žymima paprasčiau taip: $ABCD \dots KL$. Atkarpų AB, BC, CD, ..., KL vidiniai taškai, o taipogi taškai A, B, C, D, ..., K, L yra vadinami laužtės taškais. Jei visi taškai A, B, C, D, ..., K, L priklauso vienai plokštumai ir, be to, taškas A sutampa su tašku L, tai tokia laužtė yra vadinama daugiakampiu ir žymima taip: $ABCD \dots K$. Atkarpos AB, BC, CD, ..., KA yra vadinamos daugiakampio kraštinėmis, o taškai A, B, C, D, ..., K – daugiakampio viršūnėmis. Daugiakampiai, turintys 3, 4, ..., n viršūnių yra vadinami trikampiais, keturkampiais, ..., n-kampiais.

Apibrėžimas. Jei visos daugiakampio viršūnės yra skirtingos, nei viena viršūnių nepriklauso daugiakampio kraštinei ir jokia jo kraštinių pora neturi bendro vidinio taško, tai daugiakampis yra vadinamas paprastuoju (pirminiu).

9 Teorema. Kiekvienas pirminis daugiakampis, esantis plokštumoje α suskirsto plokštumos α taškus, nepriklausančius daugiakampiui, į dvi sritis – vidinę ir išorinę, – turinčias sekančias savybes: jei A vidinės srities taškas (vidinis taškas), o B – išorinės srities taškas (išorinis taškas), tai kiekviena laužtė, esanti plokštumoje α ir jungianti taškus A ir B, turi bent vieną bendrą tašką su daugiakampiu; jeigu A ir A' du daugiakampio vidiniai taškai, o B ir B' –jo išoriniai taškai, tai, atvirkščiai, visuomet egzistuoja plokštumoje α laužtės, jungiančios tašką A su A' ir tašką B su B' ir neturinčios jokių bendrų taškų su daugiakampiu. Atitinkamai parinkus pavadinimus abiem šioms sritims, plokštumoje egzistuoja tiesės, priklausančios išorinei daugiakampio sričiai ir nėra tiesių, priklausančių vidinei daugiakampio sričiai.

10 Teorema. Kiekviena plokštuma α suskirsto visus erdvės taškus, nepriklausančius plokštumai α, į dvi sritis, turinčias tokią savybę: kiekvienas vienos srities taškas A su kitos srities bet kuriuo tašku B apibrėžia atkarpą AB, kurios vidui priklauso plokštumos α taškas; bet kurie du vienos srities taškai A ir A' apibrėžia atkarpą AA', neturinčią bendrų taškų su plokštuma α.

Apibrėžimas. Sakysime, kad taškai A ir A' (naudojame 10 teoremos žymėjimus) yra viename ir tame pačiame erdvės puserdvyje plokštumos α atžvilgiu, o taškai A ir B – skirtinguose erdvės puserdvyse plokštumos α atžvilgiu.

Trečioji aksiomų grupė: kongruentumo aksiomos

III_1**.** Jei A, B kurie nors tiesės a taškai ir A' – šios tiesės arba kitos tiesės a' taškas, tai visuomet galima rasti tašką B', esantį duotoje tiesės a' pusėje ir, be to, tokį, kad atkarpa AB kongruenti, kitaip tariant, lygi atkarpai $A'B'$. Atkarpų AB ir $A'B'$ kongruentumas žymimas taip:

$$AB \equiv A'B'.$$

III_2**.** Jei atkarpa $A'B'$ ir atkarpa $A"B"$ kongruenčios vienai ir tai pačiai atkarpai AB, tai atkarpa $A'B'$ kongruenti atkarpai $A"B"$; kitaip tariant, jei dvi atkarpos kongruenčios trečiajai, tai jos kongruenčios viena kitai.

III_3**.** Tegu AB ir BC tiesės a dvi atkarpos, neturinčios nei vieno bendro taško, ir tegu $A'B'$ ir $B'C'$ tos pačios tiesės arba kitos tiesės a' dvi atkarpos, taipogi neturinčios bendro taško; jei

$$AB \equiv A'B' \text{ ir } BC \equiv B'C',$$

tai ir

$$AC \equiv A'C'.$$

Apibrėžimas. Tegu α – kuri nors plokštuma, o h ir k – jos kurie nors du spinduliai, skirtingi, turintys vieną ir tą patį pradinį tašką O ir priklausantys skirtingoms tiesėms. Tokių dviejų spindulių h ir k sistemą pavadinsime kampu ir žymėsime ją taip: $\angle(h, k)$ arba $\angle(k, h)$. Spinduliai h ir k yra vadinami kampo kraštinėmis, o taškas O – kampo viršūne.

Čia ištiestiniai ir superbūkieji kampai neapibrėžti.

III_4**.** Tegu duota plokštumoje α kampas $\angle(h, k)$ ir plokštumoje α' tiesė a', o taipogi visiškai apibrėžta plokštumos α' pusplokštumė tiesės a' atžvilgiu. Tegu h' žymi tiesės a' spindulį, prasidedantį taške O'; šiuo atveju plokštumoje α' egzistuoja vienas ir tik vienas spindulys k', turintis sekančias savybes: kampas $\angle(h, k)$ kongruentus, kitaip tariant, lygus kampui $\angle(h', k')$, ir tuo pačiu visi vidiniai kampo $\angle(h', k')$ taškai yra plokštumos α' duotoje pusplokštumėje tiesės a' atžvilgiu. Kampo $\angle(h, k)$ kongruentumas kampui $\angle(h', k')$ yra žymimas taip:

$$\angle(h, k) \equiv \angle(h', k').$$

Paaiškinimas. Kampas, kurio viršūnė yra B, vienai kraštinei priklauso taškas A, o kitai kraštinei – taškas C, taipogi yra žymimas $\angle ABC$ arba sutrumpintai $\angle B$. Kampai žymimi ir mažosiomis graikiškomis raidėmis.

III_5**.** Jei dviems trikampiams ABC ir $A'B'C'$ teisingos lygybės

$$AB \equiv A'B', \;\; AC \equiv A'C', \;\; \angle BAC \equiv B'A'C',$$

tai taip pat teisingas kongruentumas

$$\angle ABC \equiv A'B'C'.$$

Išvados iš kongruentumo aksiomų.

Apibrėžimas. Jei dviejų kampų, turinčių bendrą viršūnę ir bendrą kraštinę, kitos nebendros kraštinės sudaro tiesę, tai šie kampai yra vadinami gretimais. Jei dviejų kampų, turinčių bendrą viršūnę, kraštinės poromis sudaro tieses, tai šie kampai yra vadinami priešingais. Kampas, kongruentus savo gretimajam, yra vadinamas stačiuoju kampu.

11 Teorema. Trikampyje, kurio dvi kraštinės kongruenčios, kampai, esantys prieš šias kraštines, yra kongruentūs.

Apibrėžimas. Trikampis ABC yra vadinamas kongruenčiu trikampiui $A'B'C'$, jei

$$AB \equiv A'B', \;\; AC \equiv A'C', \;\; BC \equiv B'C',$$

$$\angle A \equiv \angle A', \;\; \angle B \equiv \angle B', \;\; \angle C \equiv \angle C'.$$

12 Teorema (Pirmoji teorema apie trikampių kongruentumą). Trikampis ABC yra kongruentus trikampiui $A'B'C'$, jei

$$AB \equiv A'B', \;\; AC \equiv A'C', \;\; \angle A \equiv \angle A'.$$

13 Teorema (Antroji teorema apie trikampių kongruentumą). Trikampis ABC yra kongruentus trikampiui $A'B'C'$, jei

$$AB \equiv A'B', \;\; \angle A \equiv \angle A', \;\; \angle B \equiv \angle B'.$$

14 Teorema. Jei kampas $\angle ABC$ kongruentus kampui $\angle A'B'C'$, tai kampas $\angle CBD$, gretimas pirmajam, yra kongruentus kampui $\angle C'B'D'$, gretimam antrajam kampui.

15 Teorema. Tegu h, k, l ir h', k', l' du trejetai spindulių, iš kurių kiekvienas prasideda viename taške ir priklauso vienai plokštumai; tuos taškus pažymėkime raidėmis O ir O', o plokštumas – α ir α'. Be to, tegu spindulių poros h, k ir h', k' arba yra vienoje pusėje arba skirtingose spindulių l ir l' atžvilgiu. Tuomet jei

$$\angle(h,l) \equiv \angle(h',l'), \;\; \angle(k,l) \equiv \angle(k',l'),$$

tai

$$\angle(h,k) \equiv \angle(h',k').$$

16 Teorema. Tegu kampas $\angle(h,k)$, esantis plokštumoje α, kongruentus kampui $\angle(h',k')$, esančiam plokštumoje α'. Be to, tegu l – spindulys, esantis plokštumoje α, prasidedantis kampo $\angle(h,k)$ viršūnėje ir esantis to kampo viduje. Tuomet plokštumoje α' egzistuoja ir tiktai vienas toks spindulys l', prasidedantis kampo $\angle(h',k')$ viršūnėje ir esantis to kampo viduje, kad

$$\angle(h,l) \equiv \angle(h',l') \text{ ir } \angle(k,l) \equiv \angle(k',l').$$

17 Teorema. Jei du taškai Z_1 ir Z_2 yra skirtingose tiesės XY pusėse ir jei, be to

$$XZ_1 \equiv XZ_2 \text{ ir } YZ_1 \equiv YZ_2,$$

tai

$$\angle XYZ_1 \equiv \angle XYZ_2.$$

18 Teorema (Trečioji teorema apie trikampių kongruentumą). Jei dviejų trikampių ABC ir $A'B'C'$ atitinkamos kraštinės kongruenčios, tai šie trikampiai yra kongruentūs.

19 Teorema. Jei kiekvienas iš dviejų kampų $\angle(h',k')$ ir $\angle(h",k")$ kongruentus trečiajam $\angle(h,k)$, tai ir kampas $\angle(h',k')$ kongruentus kampui $\angle(h",k")$.

20 Teorema. Tegu $\angle(h,k)$ ir $\angle(h',l')$ – du kampai. Jei atidedant kampą $\angle(h,k)$ šalia spindulio h' toje pačioje pusėje, kurioje yra ir spindulys l', gaunamas vidinis spindulys k', tai atidedant kampą $\angle(h',l')$ šalia spindulio h toje pačioje pusėje, kaip ir spindulys k, gaunamas išorinis spindulys l ir atvirkščiai.

Apibrėžimas. Jei atidedant kampą $\angle(h,k)$, kaip nurodyta 20 teoremoje, spindulys k' yra kampo $\angle(h',l')$ viduje, tai sakoma, kad kampas $\angle(h,k)$ mažesnis už kampą $\angle(h',l')$ ir tai žymima taip:

$$\angle(h,k) < \angle(h',l');$$

jei spindulys k' yra kampo $\angle(h', l')$ išorėje, tai sakoma, kad kampas $\angle(h, k)$ didesnis už kampą $\angle(h', l')$ ir tai žymima taip:

$$\angle(h, k) > \angle(h', l').$$

Kampams α ir β teisinga tik viena iš šių galimybių:

$$\alpha < \beta, \text{ ir} \beta > \alpha, \quad \alpha \equiv \beta, \quad \alpha > \beta, \ \alpha < \beta < \alpha.$$

21 Teorema. Visi statūs kampai kongruentūs tarp savęs.

22 Teorema (Teorema apie išorinį kampą. Trikampio išorinis kampas didesnis už kiekvieną jam negretutinį šio trikampio kampą.

23 Teorema. Kiekviename trikampyje kraštinė esanti prieš didesnį kampą yra didesnė.

24 Teorema. Trikampis, kuriame du kampai yra lygus, yra lygiašonis.

25 Teorema. Du trikampiai ABC ir $A'B'C'$ yra kongruentūs, jei

$$AB \equiv A'B', \quad \angle A \equiv \angle A', \quad \angle C \equiv \angle C'.$$

26 Teorema. Kiekvieną atkarpą galima padalinti pusiau.

Apibrėžimas. Jei taškai A, B, C, D, ..., K, L, esantys tiesėje a, ir taškai A', B', C', D', ..., K', L', esantys tiesėje a', sudaro tokias dvi taškų sekas, kad visos atitinkamos atkarpos AB ir $A'B'$, AC ir $A'C'$, BC ir $B'C'$, ..., KL ir $K'L'$ kongruenčios viena kitai, tai tos dvi taškų sekos vadinamos kongruenčiomis viena kitai; taškai A ir A', B ir B', ..., L ir L' yra vadinami kongruenčių taškų sekų atitinkamais taškais.

27 Teorema. Jei iš dviejų kongruenčių taškų sekų A, B, ..., K, L ir A', B', ..., K', L' pirmoji sutvarkyta taip, kad taškas B yra tarp A iš vienos pusės ir C, D, ..., K, L iš kitos pusės, taškas C – tarp A, B iš vienos pusės ir D, ..., K, L iš kitos pusės ir t.t., tai taškai A', B', ..., K', L' sutvarkyti taip pat, t.y. B' yra tarp A' iš vienos pusės ir C', D', ..., K', L' iš kitos pusės, taškas C' – tarp A', B' iš vienos pusės ir D, ..., K', L' iš kitos pusės it t.t..

Apibrėžimas. Baigtinė taškų visuma yra vadinama figūra; jei visi taškai priklauso vienai plokštumai, tai figūra yra vadinama plokštumine.

Dvi figūros yra vadinamos kongruenčiomis, jei galima nurodyti tokią atitinkamybę tarp jos taškų, kad atitinkamos atkarpos ir atitinkami kampai būtų kongruentūs.

28 Teorema. Jei $(A, B, C, \ldots, L)$ ir $(A', B', C', \ldots, L')$ dvi kongruenčios plokštuminės figūros ir taškas P yra pirmosios figūros plokštumoje, tai antrosios figūros plokštumoje galima rasti tokį tašką P', kad figūros $(A, B, C, \ldots, L, P)$ ir $(A', B', C', \ldots, L', P')$ būtų taip pat kongruenčios. Jei, be to, figūroje $(A, B, C, \ldots, L)$ yra bent trys taškai, nepriklausantys vienai tiesei, tai taškas P' randamas tik v i e n i n t e l i u b ū d u.

29 Teorema. Jei figūros $(A, B, C, \ldots, L)$ ir $(A', B', C', \ldots, L')$ kongruenčios, tai kiekvienam taškui P galima nurodyti tokį tašką P', kad figūros $(A, B, C, \ldots, L, P)$ ir $(A', B', C', \ldots, L', P')$ būtų taip pat kongruenčios. Jei, be to, figūroje $(A, B, C, \ldots, L)$ yra bent keturi taškai, nepriklausantys vienai plokštumai, tai taškas P' randamas tik v i e n i n t e l i u b ū d u.

Ketvirtoji aksiomų grupė: aksioma apie lygiagretes

Tegu α – kuri nors plokštuma, a – kuri nors plokštumos α tiesė, o A – tos pačios plokštumos taškas, nepriklausantis tiesei a. Nubrėšime plokštumoje α per tašką A pirmiausia tiesę c, kertančią tiesę a, po to tiesę b taip, kad tiesė c kirstų tieses a ir b lygiais atitinkamais kampais. Šiuo atveju, kaip nesunku teigti, remiantis teorema apie išorinį kampą (22 teorema), tiesės a ir b neturi bendro taško, t.y. plokštumoje α visuomet galima nubrėžti per tašką A, nepriklausantį tiesei a, tiesę, nekertančią tiesės a.

Aksioma apie lygiagretes formuluojama taip:

Euklido aksioma. Tegu a –bet kuri tiesė, A – taškas, nepriklausantis šiai tiesei; šiuo atveju, plokštumoje, apibrėžtoje tiesės a ir taško A, egzistuoja nedaugiau nei viena tiesė, kuriai priklauso taškas A, ir kuri nekerta tiesės a.

Apibrėžimas. Remiantis aksioma apie lygiagretes ir tuo, kas buvo išdėstyta anksčiau, mes žinome, kad plokštumoje, apibrėžiamoje tiese a ir tašku A, egzistuoja viena ir tik viena tiesė, kuriai priklauso taškas ir kuri nekerta tiesės a; pavadinasime šią tiesę lygiagtrete tiesei a, išvestai per tašką A.

Aksioma apie lygiagretes ekvivalenti tokiam reilalavimui:
Jei dvi tiesės a, b, esančios vienoje plokštumoje, nekerta trečiosios tiesės, esančios toje pat plokštumoje, tai ir jos nesikerta.

30 Teorema. Jei dvi lygiagrečios tiesės kertamos trečiąja, tai tuomet susidarantys aitinkami ir kryžminiai kampai yra kongruentūs, ir atvirkščiai, jei aitinkami ir kryžminiai kampai yra kongruentūs, tai tiesės yra lygiagrečios.

31 Teorema. Trikampio kampų suma lygi dviem statiems.

Apibrėžimas. Tegu M kuris nors plokštumos α taškas; visų taškų A, priklausančių plokštumai α, visuma, kuriems atkarpos MA tarpusavy kongruenčios, vadinasi apskritimu.

Penktoji aksiomų grupė: tolydumo aksiomos

V_1 **(Matavimo arba Archimedo aksioma).** Tegu AB ir CD – kurios nors dvi atkarpos; tuomet tiesėje AB egzistuoja baigtinis skaičius tokių taškų A_1, A_2, …, A_n, kad atkarpos AA_1, A_1A_2, A_2A_3, $\ldots$, $A_{n-1}A_n$ kongruenčios atkarpai CD ir taškas B yra tarp taškų A ir A_n.

V_2 **(Tiesinio pilnumo aksioma).** Tiesės taškai sudaro sistemą, kurios, išlaikant tiesinę tvarką (6 -oji teorema), kongruentumo pirmąją aksiomą ir Archimedo aksiomą (t.y. I_{1-2}, II, III_1, V_1 aksiomas) nebegalima niekaip praplėsti, t.y. prie šios taškų sistemos negalima pridėti dar taškų taip, kad sistema, sudaryta iš pradinių ir naujų taškų, tenkintų visas išvardintas aksiomas.

D. Hilbertas 32 teoremoje įrodo geometrijos pilnumą. Tuo jo veikalas nesibaigia. Toliau nagrinėjamas vienų aksiomų nepriklausomumas nuo kitų. Taip pat nagrinėjamos ir geometrijos, kurios netenkina Archimedo aksiomos ir t.t.